Блюм М.А.

Полный курс математики.

Т. 1.

Париж
1844г.

ТПК 25.09.19г

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES.

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE DES ASPIRANTS
A TOUTES LES ÉCOLES DU GOUVERNEMENT.

RENFERMANT LES CONNAISSANCES EXIGÉES POUR L'ADMISSION AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE, NAVALE, MILITAIRE DE SAINT-CYR, FORESTIÈRE, DES ARTS ET MANUFACTURES ET DES BEAUX-ARTS.

PAR M. AUGUSTE BLUM,
Professeur de mathématiques, ancien élève de l'École polytechnique.

TOME PREMIER,

ARITHMÉTIQUE
ET
ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

PARIS.
CARILIAN-GŒURY ET Vor DALMONT, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,
Quai des Augustins, nos 39 et 41.

1844

PRÉFACE.

Il existe déjà un assez grand nombre de Traités de mathématiques ayant pour objet spécial de préparer les jeunes gens aux examens d'admission aux écoles du gouvernement. Chaque année, il en paraît de nouveaux, et cela ne doit pas surprendre, quand on sait que les exigences des programmes d'examen vont toujours en augmentant. Cette rivalité d'efforts de la part des auteurs tourne d'ailleurs au profit de la science, et surtout du perfectionnement des méthodes et des procédés propres à la transmettre. Ce n'est donc point l'envie puérile d'ajouter un nouveau livre à ceux qui sont déjà faits, qui nous a déterminé à nous occuper de la rédaction et de la publication d'un cours de mathématiques à l'usage des candidats aux différentes écoles spéciales. C'est le désir de rassembler et de disposer, dans l'ordre le plus facile à suivre et à retenir, toutes les connaissances actuellement exigées, et de les présenter ensuite de la manière la plus propre à les faire comprendre. Pour cela, nous avons mis à contribution les anciennes et les nouvelles traditions de la science, donnant toujours la préférence à celles qui font le mieux apercevoir le lien qui enchaîne les vérités les unes aux autres.

Notre ouvrage ne comprendra au surplus que la série des sciences exactes qui compose l'ensemble des connaissances qu'on nomme maintenant mathématiques, et qui précèdent l'entrée à l'école polytechnique. Ainsi, l'analyse infinitésimale, le calcul différentiel, le calcul intégral,...., n'entrent point dans notre plan, non plus que la statique, partie de la science que M. Poinsot a traitée à fond par la théorie des couples dont il est l'inventeur, et que MM. Gerono et Reynaud ont présentée d'une manière qui ne laisse rien à désirer, en ce qui concerne la théorie de l'équilibre, considérée indépendamment de celle des couples.

La direction des tableaux polytechniques jointe à d'autres travaux, nous a déterminé à confier la rédaction de certaines parties du cours que nous publions à des collègues avec lesquels nous avions une longue confraternité et une grande conformité d'idées; ce qui assure l'unité de l'ouvrage. Ainsi, l'algèbre a été rédigée par M. Lorélut, professeur au collége Stanislas. Le plan de l'ouvrage avait d'ailleurs été discuté avec M. Gerono, auquel nous nous plaisons à témoigner ici la plus grande reconnaissance pour les conseils constants qu'il nous a donnés.

Nous ajouterons que si quelques théories sont présentées d'une manière qui paraisse simple, nous le devons au souvenir des leçons de M. Rouby, notre ancien professeur au collége Charlemagne, et notre ami.

On trouvera dans les notes les définitions ordinaires, mais que nous n'adoptons pas. Le texte en petit caractère pourra être passé à une première lecture. Une grande partie des applications a été rédigée ou vérifiée par M. Merpaut, à qui nous devons un travail nouveau, compris dans les n^{os} 103 à 106.

Les raisons qui nous ont porté à commencer l'arithmétique comme nous l'avons fait, sont indiquées d'une manière complète dans un très-remarquable article de M. Gerono (*), que nous empruntons en grande partie aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* du mois de septembre 1843.

» ...Comment les auteurs des Traités d'arithmétique » ont-ils été conduits à donner immédiatement, en entrant » en matière, les définitions de *quantité*, d'*unité* et de » *nombre ?*

» Si les élèves qui lisent la première page de ces ou- » vrages n'ont pas encore une idée précise du nombre » entier, s'ils ne sont pas déjà familiarisés avec les notions » de *quotient*, de *rapport*, il semble difficile qu'ils enten- » dent parfaitement que *un nombre est le* RÉSULTAT *de la* » *comparaison d'une grandeur à son unité*; et n'est-il

(*) Relatif à l'analyse d'une Arithmétique élémentaire de M. Dumouchel.

» pas à craindre que les personnes chargées de leur apprendre, au moyen de cette définition, ce que c'est qu'un » nombre, ne leur imposent une fatigue et un travail » inutiles ?

» *Euclide* a défini le nombre, l'assemblage d'une multitude d'unités ; *Newton*, le rapport abstrait d'une » quantité à une autre de même espèce, prise pour » unité ; *Wolf*, ce qui a le même rapport avec l'unité » qu'une ligne droite avec une autre ligne droite. Voici ce » qu'en a dit *Pascal* :

» *On trouvera peut-être étrange que la géométrie ne » puisse définir aucune des choses qu'elle a pour principaux objets. Car elle ne peut définir ni le mouvement, » ni les* NOMBRES, *ni l'espace ; et cependant ces trois choses » sont celles qu'elle considère particulièrement et selon » la recherche desquelles elle prend les trois différents » noms de* MÉCANIQUE, *d'*ARITHMÉTIQUE, *et de* GÉOMÉTRIE, » *ce dernier nom appartenant au genre et à l'espèce.* » *Mais on n'en sera pas surpris si l'on remarque que,* » *cette admirable science ne s'attachant qu'aux choses* » *les plus simples, cette même qualité qui les rend dignes* » *d'être ses objets, les rend incapables d'être définies, de* » *manière que le manque de définition est plutôt une perfection qu'un défaut, parce qu'il ne vient pas de leur* » *obscurité, mais au contraire de leur extrême évidence.....* »

» Dans le livre des *Pensées*, *Pascal* revient plusieurs » fois sur l'impossibilité de définir les nombres. Et en effet,

» que signifie la définition qu'on en donne le plus ordi-
» nairement, si ce n'est qu'un nombre est un nombre? Je
» demande à ceux qui l'ont défini : la réunion de PLUSIEURS
» unités, ce qu'ils entendent précisément par ce mot
» PLUSIEURS? Et d'ailleurs qu'est-ce que l'unité? le terme
» de comparaison entre *des quantités* de même espèce.
» Ainsi, en substituant l'objet défini à la définition, on
» est amené à dire, en commençant l'arithmétique : *un*
» *nombre est la réunion d'un certain nombre de termes*
» *de comparaison entre des* QUANTITÉS *de même espèce.*
» Il est peu surprenant que les élèves éprouvent des diffi-
» cultés à bien suivre des raisonnements qui commencent
» de cette manière, et l'on comprend pourquoi ils pren-
» nent quelquefois le parti de répéter ce qu'on leur ensei-
» gne sans savoir au juste ce qu'ils disent.

» Après avoir défini les nombres, quelques auteurs
» veulent de plus, les distinguer en *abstraits* et *con-*
» *crets* (*). C'est une distinction capable d'égarer encore
» le jugement de ceux à qui l'on vient d'apprendre qu'un
» nombre est le résultat de la comparaison d'une gran-
» deur à son unité. Car, comment le rapport de deux
» grandeurs de même espèce pourrait-il être *concret?...* »

(*) « Ils semblent (il s'agit des auteurs qui, du temps de *Condillac*, ont
» voulu faire des *Éléments d'arithmétique*), ne pas savoir de quelle espèce
» sont les nombres qu'on calcule. Ils en distinguent de deux espèces, les abs-
» traits, les concrets, et ils disent que les concrets sont ceux qu'on applique à
» quelque objet ; comme si dans 1 écu, 2 écus, 3 écus, 1, 2 et 3 étaient autre
» chose que 1, 2 et 3. Cette distinction est tout à fait inutile ; et *concret* sera
» pour nous un mot barbare de moins. » (CONDILLAC, *Langue des calculs.*)

Nous transcrirons encore ici quelques lignes de cet article, qui serviront à expliquer pourquoi nous n'avons pas entièrement adopté le mode d'exposition qui se trouve dans plusieurs autres ouvrages.

« ... On veut comprendre tous les cas dans un seul énon-
» cé, et prévoir ceux où le diviseur deviendrait *fraction-*
» *naire* ou bien encore *incommensurable*, peut-être
» même *imaginaire ;* pour ma part, je n'en vois guère
» la nécessité, car, en définitive, on n'opère que sur des
» nombres entiers. Le reste est seulement une indication
» de calculs à effectuer. Il est permis, sans aucun doute,
» de nommer *quotient* le résultat déterminé par une ou
» plusieurs opérations différentes de la division des en-
» tiers, en ayant soin d'expliquer pourquoi on a conservé
» le nom de *quotient* au résultat ainsi obtenu. Et cela
» n'oblige, en rien, à modifier une définition qui repré-
» sente fidèlement l'objet de l'opération définie. En con-
» sidérant les opérations de l'arithmétique sous un point
» de vue précis, le raisonnement se simplifierait en deve-
» nant plus exact, et l'explication complète des premières
» règles, ne resterait pas au-dessus de l'entendement des
» plus jeunes élèves.

» Nous l'avons dit ailleurs, ce n'est pas la rigueur des
» démonstrations qui nous semble embarrassante pour
» les commençants. La simplicité du raisonnement est,
» au contraire, une conséquence de sa plus grande ri-
» gueur. Ce qui peut contribuer à rendre difficile l'expo-
» sition des vérités les plus simples, c'est d'abord cette

» tendance à s'écarter des idées naturelles pour recher-
» cher des généralités illusoires. C'est encore la méthode
» de ceux qui, n'admettant pas les *notions primitives*,
» veulent tout expliquer, tout définir (*); de ceux qui ne
» peuvent croire qu'un raisonnement soit complet, s'il
» n'est surchargé d'*axiomes*, de *demandes*, de *lemmes*,
» et de *scolies*. Cette méthode, empruntée à je ne sais
» quelle philosophie scolastique, est déjà bien ancienne,
» et n'a encore rien fait pour le sens commun; il serait
» temps de l'abandonner.... »

Nous nous sommes décidé à diviser l'arithmétique théorique en quatre livres, et à rejeter à la fin toutes les applications. Nous engageons les lecteurs à recourir à ces applications à mesure qu'ils ont compris les différents principes de l'arithmétique. Si nous avons isolé ces principes, c'est que nous avons voulu montrer aux élèves que toutes les mathématiques se déduisent d'un petit nombre de théorèmes.

L'algèbre est complétée, d'un côté, par l'appendice qui la termine; d'un autre côté, par la théorie des fractions continues qu'on a placée à la fin de l'arithmétique, ainsi que la résolution de l'équation exponentielle, et les logarithmes considérés comme exposants.

(*) « Il y en a qui vont jusqu'à cette absurdité d'expliquer un mot par le » mot même. J'en sais qui ont défini la lumière en cette sorte : *la lumière est* » *un mouvement luminaire des corps lumineux*... » (PASCAL, *Livre des Pensées*.)

TABLE DES MATIÈRES.

ARITHMÉTIQUE.

LIVRE PREMIER.

NUMÉRATION ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES SUR LES NOMBRES ENTIERS.

Pages.

Numération parlée. 1
Numération écrite. 2
Remarque sur les différents systèmes de numération. 4
Addition. . . . . *ib.*
Preuve de l'addition. 5
Soustraction. 6
Preuve de la soustraction. 7
Multiplication. . . . . *ib.*
Table de multiplication. 9
Preuve de la multiplication. *ib.*
Principes de multiplication. 14
La multiplication appliquée à traduire dans le système décimal un nombre écrit dans un système quelconque de numération. 17
Division. . . . . *ib.*
Preuve de la division. 21
Remarques sur la division. . . . . *ib.*
Principes pour la recherche du plus grand commun diviseur. 24
Moyen de trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres. 30
Moyen de trouver le plus petit nombre exactement divisible par plusieurs nombres, ou, en d'autres termes, de trouver le plus petit multiple commun de plusieurs nombres. . . . . *ib.*
Caractères de divisibilité des nombres. 34
Preuves par 9 et par 11 de la multiplication et de la division. . . . 39

LIVRE DEUXIÈME.

FRACTIONS ORDINAIRES, FRACTIONS DÉCIMALES, RAPPORTS ET PROPORTIONS.

Idée générale des fractions. 41
Comparaison des fractions entre elles. . . . . *ib.*
Addition des fractions. 45
Soustraction des fractions. 46
Multiplication des fractions. 48

Pages.
Division des fractions. 51
Principes sur les fractions. 52
Fractions décimales. 56
Addition des fractions décimales. 58
Soustraction 59
Multiplication. . . . . *ib.*
Division. 61
Théorie des fractions décimales finies, PÉRIODIQUES SIMPLES et MIXTES. . . 63
Définition des mots *Rapport* et *Raison*. 67
Proportions en général. 68
Équidifférences. . . . . *ib.*
roportions géométriques ou *par quotient*, ou simplement proportions. . 73

LIVRE TROISIÈME.

PUISSANCES ET RACINES.

Définition du carré d'un nombre et de la racine carrée. 82
Règle générale de l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier. . . 87
Remarques relatives à l'extraction de la racine carrée. 89
Racine carrée des fractions. 90
Extraction de la racine carrée des nombres décimaux. 91
Extractions par approximation. 93
Définition du cube d'un nombre et de la racine cubique. 97
Règle générale de l'extraction de la racine cubique. 99
Exemple avec approximation. 102
Racine cubique des fractions ordinaires et des fractions décimales. 104
Extractions par approximation. 107

LIVRE QUATRIÈME.

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES.

Progressions arithmétiques. 112
Progressions géométriques. 114
Somme des termes d'une progression géométrique. 115
Théorie des logarithmes. 117
Système de logarithmes employé. 120
Caractéristique des logarithmes. 122
Construction des tables de logarithmes. 123
Disposition des tables. 124
Tables de Callet. 125
Un nombre étant donné, trouver son logarithme. 127
Un logarithme étant donné, trouver le nombre correspondant. 128

APPLICATIONS

ET PROBLÈMES DE L'ARITHMÉTIQUE.

Calcul des nombres concrets. 131
Nomenclature des mesures anciennes. 132
Système métrique. 134
Mesures de longueur. 135
Mesures de superficie. . . . . *ib.*
Mesures de capacité. 136

Pages.
Mesures des poids. 136
Monnaies. 137
Division centésimale de la circonférence. 138
Conversion des anciennes mesures en nouvelles. . . . . *ib.*
Règle de trois. 141
Exemple d'une règle de trois inverse. 142
Règle de trois composée. . . . . *ib.*
Règle de trois simple résolue par les proportions. 144
Règle de trois composée résolue par les proportions. 145
Quelques problèmes relatifs à des partages non proportionnels. 146
Partages proportionnels ou règles de société. 148
Règle de société simple. . . . . *ib.*
Règle de société composée. 149
Règle d'intérêt. 150
Règle d'escompte. 151
Règle d'alliage et de mélange. 154
Progressions par différence. 156
Progressions par quotient. 158
Intérêts composés. 160
Annuités. 162
Racines par approximation à l'aide des logarithmes . . . . *ib.*
Calculs avec approximation 165
Addition. . . . . *ib.*
Soustraction. 166
Multiplication. 167
Division. 169
Calcul des nombres complexes. . . . . *ib.*
Conversion d'un nombre complexe en unités de sa plus petite espèce. . 170
Conversion d'un nombre complexe en fractions de l'unité de la plus forte espèce. . . . . *ib.*
Conversion d'un nombre entier incomplexe en nombre complexe. 171
Conversion en nombre complexe d'un nombre fractionnaire rapporté à une unité concrète. 172
Conversion en nombre complexe d'une fraction d'une unité concrète. . . *ib.*
Addition des nombres complexes. 173
Soustraction. 174
Multiplication. 175
Division. 179

EXERCICES ET PROBLÈMES DIVERS.

Écrire, dans un autre système, un nombre écrit dans le système décimal. 182
Un nombre étant écrit dans un système différent du système décimal, l'écrire dans le système décimal. 184
Un nombre étant écrit dans un système différent du système décimal, l'écrire dans un système aussi différent du système décimal. . . . . . *ib.*
Problèmes des fontaines coulant ensemble. 185
Problèmes des courriers. 186
Problème des aiguilles d'une montre. 188
Règle de fausse position ou de fausse supposition. 189
Change des monnaies. 19

Pages.
Densités. 192
Thermomètres comparés. 195
Chute des corps dans le vide. 196

TABLES UTILES

ET NOTES DE L'ARITHMÉTIQUE.

Définitions de la grandeur, de l'unité et du nombre. 201
Monnaies décimales de France. 202
Poids et diamètres des monnaies. 203
Tableau du poids des monnaies et de leur diamètre. 205
Proportion de la valeur des métaux dans les monnaies. 206
Prix du kilogramme d'or et du kilogramme d'argent. . . . . *ib.*
Valeur au pair des monnaies et au kilogramme. 207
Densités de quelques gaz. 209
Densités de quelques vapeurs. 210
Pesanteurs spécifiques de quelques liquides. . . . . *ib.*
Table des pesanteurs spécifiques de certains corps. . . . . *b.*
Quelques problèmes rélatifs aux monnaies. 211
Vitesse de la lumière. 213
Vitesse acquise par un corps tombant dans le vide. . . . . *ib.*
Durée des oscillations d'un pendule. . . . . *ib.*
Énoncés de questions à résoudre. 215
Quantités numériques incommensurables. 218
Démonstration élémentaire du principe que $\left(1+n\frac{1}{d}\right)$ est moindre que $\left(1+\frac{1}{d}\right)^n$. 220
Compléments arithmétiques. 222
Logarithmes négatifs ou logarithmes des fractions. 224

APPENDICE.

Complément numérique. Sa définition. 226
Multiplication par compléments. *ib.*
Preuve très-commode de la multiplication. 228
Division par complément. . . . . *ib.*
Preuve par complément de la division. 230
Ce qu'on doit entendre par complément de complément. 231
Combinaison de l'addition et de la soustraction au moyen du complément de complément. . . . . *ib.*
Fractions continues. 232
Réduites. 234
Equations exponentielles. 237
Logarithmes considérés comme exposants. 239

ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES. — DÉFINITIONS.

Pages.

Objet de l'*Algèbre*. Notation algébrique ; avantages de cette notation. . 243

Exemple de l'application de la notation algébrique à la résolution d'un problème. 244

Différence entre l'algèbre et l'arithmétique 245

Polynôme, Termes. Termes additifs, termes soustractifs. Monôme, binôme, trinôme. Coefficient. Valeur numérique d'un polynôme. 246

Termes semblables ; *réduction* d'un polynôme au plus petit nombre de termes. 247

CHAPITRE DEUXIÈME.

OPÉRATIONS OU TRANSFORMATIONS ALGÉBRIQUES.

Objet des opérations algébriques ; calcul algébrique. Différence entre les opérations de l'algèbre et les opérations arithmétiques. 248

Addition. — *Soustraction*. — *Multiplication* des monômes. 249

Multiplication des polynômes. Nombre des termes d'un produit. 250

Degré d'un terme. Polynôme homogène. Produit de polynômes homogènes. 253

Ordonner un polynôme. Termes d'un produit, qui ne peuvent se réduire avec aucun autre terme. Corollaires. 254

Carré et cube d'un binôme. Produit de la somme de deux quantités par leur différence. 256

Produit $(a^m + a^{m-1}b + \ldots + b^m)(a - b) = a^{m+1} - b^{m+1}$. 257

Produit $(a^{2m-1} - a^{2m-2}b + \ldots - b^{2m-1})(a + b) = a^{2m} - b^{2m}$.
Produit $(a^{2m} - a^{2m-1}.b + \ldots + b^{2m})(a + b) = a^{2m+1} + b^{2m+1}$. 258

Il peut arriver qu'un produit de facteurs polynômes se réduise à un binôme. 259

Nombre carré égal à la somme de deux nombres carrés ou de trois nombres carrés. 259

Cas où les multiplicateurs des puissances de la lettre ordonnatrice sont des polynômes. 260

Division. Quantités algébriques *entières*. Division des monômes ; conditions nécessaires et suffisantes, pour que le quotient soit entier. . . . 263

Pages.

Division des polynômes. Cas où les deux termes de la division ne renferment qu'une lettre, et où le dividende est le produit de deux facteurs entiers. 265

Règle des signes dans la division. 267

Exemple d'une division *qui se fait exactement*. Abréviation dans la pratique du calcul. 267

Caractère auquel on reconnaît que *le quotient ne peut être entier*, lorsque les termes ont été ordonnés par rapport aux puissances *décroissantes* de la lettre qu'ils renferment. 269

Dividende et diviseur ordonnés par rapport aux puissances *croissantes* de la lettre qu'ils renferment. 270

Cas où l'on obtient une suite illimitée de termes *entiers* au quotient. . . 271

Caractère auquel on reconnaît que *la division ne se terminera pas*. . 272

Division des polynômes qui renferment plus d'une lettre. 273

Conditions nécessaires pour qu'un polynôme soit divisible par un monôme. 277

Conditions nécessaires pour qu'un polynôme soit divisible par un autre polynôme qui ne renferme pas l'une des lettres que contient le premier. 278

Un monôme n'est jamais divisible par un polynôme. 279

Pour obtenir le quotient d'une division proposée, il n'est pas *nécessaire* d'ordonner les deux termes. Pourquoi l'on ordonne les deux termes. . 280

Le binôme $x^m - a^m$ est divisible par $x - a$. Loi du quotient 281

Le binôme $x^{2m} - a^{2m}$ est divisible par $x + a$. Loi du quotient 282

Le binôme $x^{2m+1} + a^{2m+1}$ est divisible par $x + a$. Loi du quotient. . . 283

Les binômes $x^{2m}+a^{2m}$, $x^{2m+1}-a^{2m+1}$ ne sont pas divisibles par $x+a$; le binôme $x^m + a^m$ n'est pas divisible par $x - a$. Valeurs des restes dans ces différents cas. 284

Calcul des fractions algébriques. En quoi les fractions algébriques diffèrent des *fractions* arithmétiques. Principe unique sur lequel on s'appuie pour étendre aux fractions algébriques toutes les règles du calcul des fractions arithmétiques. 284

Réduction au même dénominateur; addition, soustraction, multiplication, division des fractions. 285

Calcul des expressions NÉGATIVES. La résolution d'une question peut conduire à un résultat formé d'un nombre affecté du signe —; exemple. 286

Définition des *expressions négatives*; valeur *absolue* d'une expression négative. Valeur négative d'un polynôme. Objet de l'introduction des expressions négatives dans les calculs algébriques. 288

Addition. Ce qu'on entend par *somme algébrique* de quantités qui peuvent être négatives. 289

Soustraction. Ce qu'on entend par *différence algébrique* de deux quantités. 289

Caractère commun à la différence algébrique de deux quantités, et à la différence arithmétique de deux nombres. 290

Multiplication. Conventions relatives à la détermination d'un produit . 290

Pages.

Un produit est positif ou négatif, selon que le nombre des expressions négatives employées comme facteurs, est pair ou impair. 291

Un produit de facteurs positifs ou négatifs ne change pas, dans quelque ordre qu'on indique les multiplications. 291

Division. Conventions relatives à la détermination du quotient. 292

Fractions. Lorsqu'on admet des expressions négatives dans le calcul, toutes les règles des opérations sur les fractions sont encore applicables. 292

Valeurs relatives des expressions négatives. 293

Exposant zéro. Calcul des exposants négatifs. Comment on est conduit à admettre l'expression a^0 comme égale à 1, et l'expression a^{-r} comme égale à $\frac{1}{a^r}$. 294

Règle des exposants dans la multiplication et la division 296

Ordonner un polynôme qui renferme des lettres affectées d'exposants négatifs. 297

Multiplication et division des polynômes fractionnaires 297

Polynôme entier par rapport à une lettre. 298

Cas où l'on admet au quotient d'une division, des termes fractionnaires, ou des puissances négatives de la lettre principale. 299

Caractère auquel on reconnait que *la division ne se terminera pas*, quand les deux termes ont été ordonnés par rapport aux puissances *décroissantes* de la lettre principale. 300

Cas où l'impossibilité reconnue d'obtenir un polynôme entier pour quotient, entraine l'impossibilité absolue de la division. 302

Caractère d'impossibilité de la division, quand les deux termes ont été ordonnés par rapport aux puissances *croissantes* de la lettre principale. 303

Remarques sur la fraction complémentaire qu'on ajoute au quotient partiel obtenu, lorsque la division n'est pas terminée. 305

CHAPITRE TROISIÈME.

ÉQUATIONS. PREMIER DEGRÉ. INÉGALITÉS.

Définitions. Identité, égalité, équation; résoudre une équation; racines d'une équation; équation satisfaite. 307

Équation indéterminée; équation impossible; équations équivalentes. . . 309

Principes sur lesquels est fondée la résolution d'une équation. Transposition des termes. Réduction des termes semblables. Évanouissement des dénominateurs. 309

Cas où il n'est pas permis de multiplier ou de diviser les deux membres d'une équation par une même expression algébrique. 311

Degré d'une équation à une ou à plusieurs inconnues. 312

Équation complète, incomplète; équation à deux termes. 313

Équation littérale, équation numérique. 313

Équation du premier degré à une seule inconnue. Règle pour résoudre l'équation. 313

Pages.

Exemples de résolution d'une équation numérique, d'une équation littérale. 314

Cas d'impossibilité ou d'indétermination dans la résolution d'une équation *numérique* du premier degré. 316

L'équation du premier degré à une inconnue ne peut admettre qu'une seule solution, à moins qu'elle n'en admette une infinité. 318

Discussion de la formule générale $x = \frac{B}{A}$. Objet de cette discussion. . 318

Interprétation des expressions de la forme $\frac{B}{0}$, $\frac{0}{0}$. 319

Cas où la fraction $\frac{B}{A}$ prend la forme $\frac{0}{0}$ en vertu d'une seule hypothèse. . 321

Si, dans un polynôme X, entier par rapport à la lettre x, on remplace x par la valeur a, le résultat de cette substitution sera identiquement égal au reste R indépendant de x auquel on parviendrait en effectuant la division du polynôme X par le binôme $x - a$. 324

La fraction $\frac{B}{A}$ qui prend la forme $\frac{0}{0}$ en vertu de la seule hypothèse $x = a$ peut être ramenée à la forme $\frac{P(x-a)^m}{P'(x-a)^n}$, dans laquelle P, P' désignent des quantités qui ne s'annulent pas lorsqu'on suppose $x = a$: il en résulte que la valeur de la fraction $\frac{B}{A}$ est déterminée, et égale à une quantité finie, ou à zéro, ou à l'infini. 325

Interprétation des expressions $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\pm\infty$, $\frac{n}{\infty}$. 326

Équations où l'inconnue entre en dénominateur. 330

Équation du premier degré à plusieurs inconnues. Forme à laquelle cette équation peut être ramenée par la transposition des termes et la *réduction*. 331

Indétermination d'une seule équation à plusieurs inconnues. 332

Solution commune à plusieurs équations à plusieurs inconnues; ce que c'est que *résoudre le système* de ces équations. Système d'équations à plusieurs inconnues, qui est *équivalent* à un autre système. 333

Résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues. Cas où l'une des deux équations contient une inconnue seulement. . . 333

Élimination de l'une des inconnues. Élimination par substitution, par comparaison, par réduction. 334

Cas où les deux équations à deux inconnues sont incompatibles ou contradictoires; cas où elles sont équivalentes. 337

Résolution des équations qui renferment plus de deux inconnues. . . . 339

Équations générales du premier degré à deux inconnues. Valeurs générales des inconnues. Discussion de ces valeurs, lorsquelles prennent la forme $\frac{m}{0}$, ou $\frac{0}{0}$. 341

Pages.

Remarque sur la composition du dénominateur commun et des deux numérateurs des valeurs générales des inconnues 345

Équations générales du premier degré à 3 inconnues. Valeurs des inconnues; composition du dénominateur commun et des trois numérateurs. 346

Équations à deux ou à trois inconnues, dans lesquelles il n'entre pas de terme indépendant des inconnues. . . . . *ib.*

Résolution des problèmes. Règle pour mettre un problème en équations, ou le traduire algébriquement. 349

Les équations d'un problème n'offrent pas toujours une traduction *complète* de conditions de la question. Valeurs des inconnues qui satisfont aux équations sans résoudre la question elle-même. 350

Les équations d'un problème n'offrent pas toujours une traduction *exacte* de toutes les conditions de la question. Si les valeurs des inconnues qui satisfont aux équations ne satisfont pas au problème, on ne peut pas toujours en conclure que le problème soit impossible. 351

Ce qu'on entend par *problèmes du premier degré.* Exemples de la résolution de problèmes du premier degré; interprétation et discussion des solutions négatives et infinies. *ib.*

Problèmes du premier degré à résoudre. 365

Des inégalités. Transformations des inégalités, lorsque toutes les quantités que l'on considère sont positives, et lorsqu'on admet dans le calcul des quantités négatives. 367

Résolution d'une inégalité à une inconnue élevée à la première puissance. 370

CHAPITRE QUATRIÈME.

RACINE CARRÉE DES QUANTITÉS LITTÉRALES
ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

Extraction de la racine carrée. Terme rationnel, polynôme rationnel. La racine carrée de toute quantité positive admet deux déterminations, et n'en admet pas plus de deux. 371

Racine carrée d'une expression négative. Expression *imaginaire;* quantité *réelle*. 372

Carré d'un *monôme* entier ou fractionnaire; règle pour extraire la racine carrée d'un monôme. Quantités irrationelles, radicaux du second degré. . . . . *ib.*

Carré d'une *polynôme*; loi de formation. Règle pour extraire la racine carrée d'un polynôme. 373

Cas où le polynôme dont il faut extraire la racine carrée, est le carré d'un polynôme rationnel qui ne renferme qu'une seule lettre.. 374

Cas où le carré donné renferme plus d'une lettre; exemple. 376

Caractères d'impossibilité dans l'extraction de la racine carrée d'un polynôme. 378

Des opérations sur les quantités incommensurables. Ce qu'on entend par somme, différence, produit, quotient de quantités incommensurables. Égalité des produits qui diffèrent seulement par l'ordre des facteurs.. 379

Pages.

Calcul des radicaux du second degré. Radicaux semblables, réduction. 381

Faire sortir un facteur du radical; faire entrer un facteur sous le radical. 382

Addition, soustraction, multiplication, division. . . . . *ib.*

Exposant fractionnaire $\frac{n}{2}$. Convention faite au sujet de cet exposant; comment on y est conduit. Extension des règles qui déterminent l'exposant d'une lettre dans un produit ou dans un quotient, quand les exposants sont entiers, au cas où l'on admet dans les calculs l'exposant de la forme $\frac{n}{2}$. 384

Ordonner un polynôme qui renferme des radicaux du second degré. Extraction de la racine carrée d'un polynôme, lorsqu'on admet des radicaux du second degré dans cette racine. Terme et polynôme *rationnels par rapport à une lettre*. 385

Condition pour que le trinôme ax^2+bx+c soit le carré d'un binôme rationnel par rapport à x. 386

Équations du second degré. Réduire à trois termes l'équation du second degré à une inconnue. 387

Cas où le terme connu est nul; résolution de l'équation du second degré *à deux termes*. . . . . *ib.*

La résolution de l'équation complète du second degré se ramène à résoudre une équation à deux termes, ou deux équations du premier degré. L'équation complète a deux racines et n'en admet pas plus de deux. 388

Règle pour former les valeurs des racines de l'équation $x^2+px+q=0$. Vérification. 389

Règle pour former les valeurs des racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$. 390

Décomposition du trinôme x^2+px+q en deux facteurs du premier degré. . . . . *ib.*

Si la quantité α est racine de l'équation, le premier membre est divisible par $x-\alpha$, et réciproquement. Relation entre les racines et les coefficients de l'équation du second degré. 391

Former une équation du second degré qui admette pour racines deux quantités données. 392

Discussion des racines de l'équation $x^2+px+q=0$. Conditions pour que les racines soient réelles et inégales, réelles et égales ou imaginaires. . . . . *ib.*

Forme du premier membre de l'équation dans ces différents cas. 393

Les seules équations du second degré à coefficients réels, qui puissent avoir leurs racines *imaginaires*, sont celles dont le dernier terme est positif. Comment on décide, dans ce cas, si les racines sont imaginaires, ou réelles et inégales, ou réelles et égales. . . . . *ib.*

Les racines étant reconnues réelles, déterminer leurs signes, à l'inspection des signes des coefficients de l'équation. 394

Conditions pour que les racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$ soient réelles et inégales, réelles et égales, ou imaginaires. . . . . *ib.*

Pages

Résoudre directement l'équation $ax^2+bx+c=0$. Première méthode, en complétant le carré du binôme $x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$, dans lequel a est positif. 395

Deuxième méthode, en complétant le carré du binôme $\sqrt{c}+\frac{bx}{2\sqrt{c}}$, dans lequel c est positif. 396

Ces deux méthodes déterminent les valeurs des racines par des formules différentes ; mais les premières valeurs des racines et les dernières, diffèrent seulement par un facteur commun aux deux termes des fractions qui expriment les racines. . . . . *ib.*

Discussion des racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$, dans les hypothèses $a=0$; $a=0$, $b=0$; $a=0$, $b=0$, $c=0$. 397

Équations réductibles au second degré. Résolution de l'équation bicarrée. 399

Réduction de l'expression $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ à la forme $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$. 400

Conditions pour que α et β soient rationnelles. 401

Équations à plusieurs inconnues. La résolution du système de deux équations à deux inconnues, l'une du premier degré, l'autre du second, se ramène à la résolution d'une équation du second degré à une seule inconnue. 402

Système de deux équations du second degré à deux inconnues. L'équation résultant de l'élimination est, en général, du quatrième degré ; elle ne peut jamais être d'un degré supérieur au quatrième. 402

Ce qu'on entend par *problèmes du second degré.* Les valeurs réelles des inconnues peuvent ne pas satisfaire aux conditions du problème proposé. On peut être conduit à des valeurs imaginaires des inconnues sans que le problème soit impossible ; exemple. 403

Exemples de résolution de problèmes du second degré ; double solution, interprétation des valeurs négatives. 405

Problème des lumières ; exemple de discussion. 408

Usage de l'équation du second degré dans les questions relatives aux maximums et aux minimums. Diviser un nombre en deux parties telles que leur produit soit un maximum. Connaissant le produit de deux nombres, déterminer le minimum de leur somme. 411

Calcul des expressions imaginaires. Conventions relatives aux calculs des expressions imaginaires de la forme $a+b\sqrt{-1}$. 412

Comment les quantités réelles se trouvent comprises, comme cas particulier, dans les expressions imaginaires de la forme $a+b\sqrt{-1}$. 414

Expressions imaginaires égales ; expressions imaginaires conjuguées ; module. Deux expressions imaginaires différentes et non conjuguées peuvent avoir même module. 414

La somme, la différence, le produit et le quotient d'expressions de la forme $a+b\sqrt{-1}$, sont des expressions de même forme. Module d'un produit, d'un quotient. 415

Pages.

Puissances de l'expression imaginaire $\sqrt{-1}$. 415
Problèmes du second dégré à résoudre. 416

CHAPITRE CINQUIÈME.

PROPOSITIONS SUR LES NOMBRES. — PROGRESSIONS.

Les puissances successives d'un nombre plus grand que l'unité croissent au delà de toute limite. 418

Les puissances successives d'un nombre plus petit que l'unité s'approchent indéfiniment de zéro. 419

On peut toujours déterminer l'indice de la racine d'un nombre plus grand ou moindre que l'unité, de manière que cette racine diffère de l'unité aussi peu qu'on le voudra. . . . . *ib.*

Progressions arithmétiques. Valeur d'un terme d'un rang déterminé. Valeur de la raison ; insertion de moyens. 420

Insertion d'un même nombre de moyens différentiels entre les termes consécutifs d'une progression arithmétique donnée. 421

Somme de deux termes également distants des extrêmes. Somme de tous les termes. . . . . *ib.*

Combinaison des deux formules qui donnent la valeur du dernier terme, et la somme de tous les termes d'une progression arithmétique. Dix questions, dont deux conduisent à des équations du second degré. . . 422

Tableau des valeurs des inconnues dans ces dix questions. 423

Sommation des nombres impairs consécutifs. Trouver deux carrés dont la somme soit un carré. 424

Progressions géométriques. Valeur d'un terme d'un rang déterminé. Valeur de la raison. Trouver le nombre des termes, question qui conduit à résoudre une *équation exponentielle*. . . . . *ib.*

Insertion de moyens. Insertion d'un même nombre de moyens proportionnels entre les termes consécutifs d'une progression géométrique. . 425

Différence de deux termes consécutifs d'une progression par quotient. La différence des deux derniers termes d'une progression croissante est plus grande que toutes les différences précédentes. La différence de deux termes consécutifs croît au delà de toute limite lorsque la progression croissante est indéfinie. 426

Entre deux nombres donnés, on peut insérer un nombre de moyens tel que la différence de deux termes consécutifs soit moindre qu'une quantité donnée, aussi petite qu'on voudra. . . . . *ib.*

Entre les termes d'une progression géométrique donnée, on peut insérer un nombre de moyens tel qu'il en résulte une nouvelle progression dans laquelle se trouvent des termes qui différeront aussi peu qu'on voudra des nombres entiers consécutifs compris entre les extrêmes de la progression primitive. 428

Produit de deux termes également distants des extrêmes ; produit de tous les termes de la progression. 429

Pages.

Somme de tous les termes d'une progression géométrique. 429

Discussion de la formule, lorsqu'on suppose la raison supérieure, égale ou inférieure à l'unité. 430

Limite de la somme des termes d'une progression géométrique indéfiniment décroissante. Une même limite peut convenir à une infinité de progressions différentes. 431

Combinaison des formules qui donnent le dernier terme et la somme de tous les termes. Dix questions, parmi lesquelles quatre conduisent à des équations exponentielles, et deux autres conduisent à des équations d'un degré supérieur au second. 432

Tableau des valeurs des inconnues dans ces dix questions. 433

CHAPITRE SIXIÈME.

ARRANGEMENTS ET COMBINAISONS. PUISSANCES EN GÉNÉRAL. NOMBRES FIGURÉS ET SOMMATION DES PILES DE BOULETS.

Définitions : arrangements, permutations combinaisons. 434

Formules des nombres d'arrangements, de permutations et de combinaisons. 435

Le nombre des combinaisons de m lettres prises n à n, est égal au nombre des combinaisons de m lettres prises $m-n$ à $m-n$. 437

Puissances en général. Puissance entière d'un monôme entier ou fractionnaire. Règle pour extraire la racine $m^{ième}$ d'un monôme qui est une puissance $m^{ième}$ exacte. 438

Puissance fractionnaire. Convention faite au sujet des exposants fractionnaires. 439

Puissances entières d'un binôme. Loi de composition quant aux lettres ; nombre des termes ; coefficients de deux termes équidistants des extrêmes. Développement des puissances successives, sans effectuer de multiplications. Triangle arithmétique de Pascal. 440

Formule du binôme de Newton. Objet de cette formule. Loi de composition des coefficients. 441

Terme général. Former immédiatement le terme du développement qui occupe un rang déterminé. Déduire chaque terme de celui qui le précède. 444

Les coefficients numériques des termes équidistants des extrêmes sont égaux. 446

Dans quels cas le coefficient numérique d'un terme est supérieur, égal ou inférieur au coefficient du terme précédent. 446

Somme de tous les coefficients numériques. 447

Développement de $(x-a)^m$. . . . . *ib.*

La somme des coefficients des termes de rang impair et la somme des coefficients numériques de rang pair, sont égales. 447

Le développement de $(a \pm b\sqrt{-1})^m$ est de la forme $A \pm B\sqrt{-1}$. *ib.*

Puissances entières des polynômes. 448

Pages.

Calcul des radicaux arithmétiques et des exposants fractionnaires. Valeur absolue, détermination arithmétique d'un radical; déterminations algébriques 448

On ne change pas la valeur arithmétique d'un radical en multipliant ou en divisant par un même nombre l'indice du radical et l'exposant de la quantité placée sous le radical. On ne change pas la valeur d'une puissance fractionnaire d'une quantité, en multipliant ou en divisant par un même nombre les deux termes de l'exposant fractionnaire. — Réduction des radicaux au même indice; réduction des exposants fractionnaires au même dénominateur 449

La racine entière *m* d'un produit de plusieurs facteurs, est égale au produit des racines *m* des facteurs. Ce qu'on entend par faire sortir des facteurs du radical, et faire entrer des facteurs sous le radical 450

Règles pour simplifier un radical . . . . . *ib*

Réduction de plusieurs radicaux à un même indice égal au plus petit multiple des indices de ces radicaux simplifiés; réduction des exposants fractionnaires au plus petit dénominateur commun 451

Définition des radicaux *semblables*. Radicaux qui deviennent semblables après avoir été simplifiés. *Réduire* au plus petit nombre de termes un polynôme qui renferme des radicaux . . . . . *ib.*

Addition, soustraction, multiplication, division des radicaux 452

Puissances d'un radical. Racine d'une quantité radicale 453

Produit et quotient de puissances fractionnaires. Mêmes règles que dans le cas où les exposants sont entiers 454

Puissances entières ou fractionnaires d'une puissance fractionnaire. Même règle que dans le cas où les exposants sont entiers. *Racine* d'une puissance fractionnaire . . . . . *ib.*

Indice fractionnaire. Exposant fractionnaire négatif 455

Somme des puissances semblables des termes d'une progression. Progression par quotient; progression par différence 456

Somme des carrés, des cubes des termes d'une progression arithmétique. 457

Formule générale de la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique 458

Nombres figurés. Définition des nombres figurés en général. Distinction des différents *ordres* de nombres figurés déduits d'une même progression arithmétique. Ce qu'on entend par nombres figurés de la *première classe*, *de la deuxième*, etc. 459

Des nombres figurés du deuxième ordre. Nombres triangulaires, nombres quadrangulaires ou carrés, nombres pentagones. Formule générale des nombres polygones 460

Des nombres figurés du troisième ordre. Nombres pyramidaux. Formule des nombres pyramidaux triangulaires. Formule des nombres pyramidaux quadrangulaires 461

Piles de boulets. Composition d'une pile de boulets . . . . . *ib.*

Déterminer le nombre des boulets contenus dans une pile triangulaire ou quadrangulaire, lorsqu'on connaît le nombre des boulets qui forment un côté de la base 462

Pages.

Déterminer le nombre des boulets contenus dans une pile rectangulaire lorsqu'on connaît le nombre des boulets de la file supérieure et du plus petit côté de la base, ou bien les nombres de boulets des deux côtés de la base. 462

Ce qu'on entend par *piles tronquées*. Evaluation du nombre des boulets. 463

Problème. Disposer en pile triangulaire un nombre de boulets donné. Reconnaître si un nombre donné est un nombre pyramidal triangulaire. 464

Problème. Disposer en pile quadrangulaire un nombre de boulets donné. Reconnaître si un nombre donné est un nombre pyramidal quadrangulaire. 465

APPENDICE.

Analyse indéterminée du premier degré. 467

FIN DE LA TABLE.

ARITHMÉTIQUE.

LIVRE PREMIER.

NUMÉRATION ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES SUR LES NOMBRES ENTIERS.

1. L'idée de l'unité et celle de la pluralité sont des idées premières qui ne peuvent être définies.

Pour distinguer les nombres, on leur donne des noms, puis on les représente par des caractères abréviatifs, de là deux numérations :

NUMÉRATION PARLÉE, FORMATION DES NOMBRES.

L'unité ajoutée à l'unité donne un nouveau nombre ; à ce nombre si l'on ajoute l'unité, on forme un nombre nouveau, puis, si l'on ajoute l'unité à ce nombre, on obtient encore un autre nombre, et ainsi de suite indéfiniment. La suite des nombres est donc indéfinie.

Les nombres qu'on obtient ainsi sont *entiers*.

On leur donne les noms un, deux, trois, quatre, etc. Le nombre de ces mots distincts est indiqué par le nombre des doigts des deux mains ; ces mots sont :

Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf et dix. Le nombre dix est considéré comme une nouvelle espèce d'unité que l'on nomme *dizaine*, et par suite on compte par *dizaines* comme on compte par *unités simples*. On dit donc une dizaine, deux dizaines, trois dizaines, etc., comme on a dit une *unité*, deux unités, etc.

Par la même raison, on donne à la collection de *dix dizaines* un nom nouveau : dix dizaines forment une centaine. On compte par *centaines* comme on comptait par unités simples et par dizaines. Dix centaines forment un *mille*.

L'analogie conduisait à compter par mille comme on avait compté par centaines, dizaines et unités simples. Pour limiter encore le nombre des mots à retenir, on est convenu que l'on compterait par mille comme on avait compté par unités simples et de dire, dix mille et cent mille comme on avait dit dix et cent; et alors on donna à la collection de mille mille le nom nouveau million; de même que l'on a compté par mille et par unités simples, on compte par million : mille millions forment un billion, mille billions forment un trillion, mille trillions un quatrillion, etc. Ce sont là toutes les conventions au moyen desquelles on peut énoncer tous les nombres.

Résumons, neuf mots se reproduisent continuellement, ce sont les mots un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf. Les mots dizaines ou *dix* et *cent* se reproduisent périodiquement de trois en trois, ainsi l'on dit : unité, dizaine, centaine,

unités de mille, dizaines de mille, centaines de mille;

unités de million, dizaines de millions, etc.

Les mots dizaine, centaine, sont des unités de l'ordre simple, les mille, millions, billions, sont de l'ordre ternaire.

Des mots dérivés du latin remplacent deux dizaines, trois dizaines, etc.; ce sont les mots vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, septante ou soixante et dix, octante ou quatre-vingts, nonante ou quatre-vingt-dix.

Mais entre deux unités d'un certain ordre se trouvent toutes les unités de l'ordre inférieur : ainsi, entre deux dizaines et trois dizaines se trouvent un, deux, trois, etc., unités; on dit donc vingt et un, vingt-deux, vingt-trois, etc.

La corruption des mots latins correspondants aux mots dix et un, dix et deux, etc., a donné les mots *onze*, *douze*, *treize*, *quatorze*, *quinze*, *seize*, puis reparaît la dénomination naturelle dix-sept, dix-huit, dix-neuf.

Ainsi, avec douze mots et la terminaison illion, on pourrait énoncer tous les nombres imaginables, si l'usage n'avait pas consacré les noms que nous venons d'indiquer.

NUMÉRATION ÉCRITE (1).

2. Chacun des mots qui se représentent dans l'énoncé de tout nombre,

(1) Voir les recherches de MM. Vincent et Chasles.

c'est-à-dire un, deux, trois, etc., est représenté par un caractère que l'on nomme chiffre :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Pour faire exprimer aux chiffres les qualités pour ainsi dire adjectives de dizaine, de centaine, etc., probablement on employa d'abord les initiales D, C, M, etc., comme dans le tableau suivant, qui renferme 3 nombres :

M	C	D	U
3	5	7	4
»	4	8	2
6	»	7	»

1° Trois mille cinq cents, 7 dizaines, 4 unités ;
2° Quatre cents, 8 dizaines, 2 unités ;
3° Six mille, 7 dizaines.

En commençant par la gauche, parce que l'on énonce toujours le nombre le plus considérable d'abord ; ainsi, les mille, puis les centaines, etc.

On a dû remarquer bientôt que les initiales étaient inutiles, et on a pu établir cette convention :

Tout chiffre placé à la gauche d'un autre exprime une unité de l'ordre immédiatement supérieur ;

Et encore, *pour tenir la place des unités de certains ordres qui manquent, on emploie le caractère* 0 (*zéro*), *qui n'a point de valeur par lui-même.*

Ainsi, les trois nombres ci-dessus peuvent être écrits sans initiales et d'une manière indépendante les uns des autres :

3574 ; 482; 6070 ;

Les chiffres ont donc deux valeurs, l'une absolue, l'autre relative

La considération des unités de l'ordre ternaire permet d'énoncer un nombre d'une manière rapide ; il suffit, pour cela, de partager le nombre en tranches de trois chiffres, et de donner à chaque tranche le nom qui lui convient. La première tranche à droite exprime des unités, la seconde des mille, la troisième des millions, etc. (1).

Exemples : 5.347.200.632 ; 400006270049006.

---

(1) Comptez le nombre des chiffres, divisez ce nombre par 3, prenez le quotient en plus, retranchez-en 2, et terminez le reste par le mot illion, vous aurez le nom des unités de la tranche à gauche.

REMARQUES.

3. Au lieu de compter de dix en dix, on peut compter de sept en sept, de douze en douze, de deux en deux, et alors on a le système dont la base est sept, douze ou deux, au lieu d'avoir un système décimal. Le nombre des caractères résulte du système dans lequel on compte; il y a un nombre de chiffres significatifs égal à la base du système moins un, puisque le 0 n'a pas de valeur par lui-même, ainsi, tout nombre, excepté 1, peut servir de base d'un système de numération; par exemple, dans le système dont la base est 4, on dira, tout chiffre placé à la gauche d'un autre exprime des unités de l'ordre immédiatement supérieur, c'est-à-dire, 4 fois plus grandes (1).

Les nombres que nous avons énoncés sont entiers, parce qu'ils résultent de l'assemblage d'unités entières; mais si l'on conçoit l'unité partagée, on obtient alors une fraction, et la réunion d'entiers avec des fractions donne un nombre fractionnaire.

4. La partie élémentaire des combinaisons usuelles que l'on peut faire sur les nombres forme un ensemble de principes et de règles pratiques qu'on nomme arithmétique. En un mot, l'arithmétique est la partie élémentaire de la science des nombres.

Toutes ces combinaisons, d'ailleurs, dérivent de la numération, et sont des simplifications successives des *combinaisons* ou *opérations* qui les précèdent.

On peut donc dire : il y a une seule opération fondamentale de l'arithmétique, c'est la numération. Cependant, nous nous conformerons à l'usage, et nous dirons qu'il y a quatre opérations fondamentales, savoir :

L'*addition*, la *soustraction*, la *multiplication* et la *division*.

Addition.

5. Ajouter des nombres entre eux, c'est en former un nouveau qui contienne toutes les unités dont se composent les nombres donnés. Le nombre cherché est la *somme* des autres.

Si je veux ajouter 5 à 12, je dirai 12 et 1 font 13; 13 et 1 font 14; et 1, 15; et 1, 16; et 1, 17.

C'est donc faire une numération. L'habitude de l'*ordre* a fait trouver cette règle, qu'il fallait ajouter les unités aux unités, les dizaines aux dizaines, etc.

---

(1) Tout ce qui est relatif aux différents systèmes de numération trouvera sa place à la suite des premières opérations de l'arithmétique, puis dans quelques problèmes d'algèbre du premier ou du second degré.

Ainsi, pour ajouter entre eux plusieurs nombres entiers, on les écrit les uns au-dessous des autres, de manière que les unités de même ordre se correspondent dans une même colonne verticale, et on trace un trait horizontal sous le dernier nombre, puis, en commençant par la droite et par le haut, on ajoute les chiffres successifs; l'habitude fait trouver les résultats de ces additions partielles, arrivé au dernier chiffre de la colonne des unités, on fait la somme qui peut être moindre que dix ou plus grande; dans le premier cas, on écrit le chiffre qui représente la somme; dans le second cas, il est naturel de réserver les dizaines pour les ajouter à toutes les dizaines des nombres donnés; on opère sur la colonne des dizaines comme on a opéré sur la colonne des unités, etc.; parvenu à la colonne des plus hautes unités, si la somme surpasse dix, on écrit cette somme :

Exemples :

$$\begin{array}{r} 5247 \\ 352 \\ \hline 5599 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6048 \\ 739 \\ 504 \\ 27 \\ 8446 \\ \hline 15764 \end{array}$$

Il est évident que dans une addition, on peut intervertir l'ordre des nombres à ajouter, sans que le résultat soit altéré. Ce principe permet de vérifier le résultat d'une addition.

C'est là ce qu'on appelle faire la *preuve*. Il est de la plus haute importance d'obtenir des vérifications des calculs; jamais, cependant, on ne peut avoir une certitude complète, parce qu'une preuve est une nouvelle opération qui peut encore donner des erreurs; toutefois, si l'on retrouve un résultat qu'on devait prévoir, on peut regarder la probabilité comme équivalente à une certitude.

Ainsi, pour faire la preuve de l'addition, il faut changer l'ordre des nombres donnés, ou commencer de bas en haut, quand on a opéré de haut en bas.

Faire une opération en arithmétique, c'est chercher un résultat le plus promptement et le plus sûrement possible; on peut donc dire, en général, qu'on ne *doit* pas commencer une addition par la gauche, parce qu'on arriverait à la somme après avoir effacé des chiffres, ou bien après avoir recommencé plusieurs additions, ce qui multiplierait les chances d'erreur.

Remarque.—Si une partie d'une somme augmente d'un certain nombre, la somme augmente de ce nombre, ainsi en ajoutant 8 à une partie d'une somme, cette somme augmente de 8.

Soustraction.

6. La soustraction est une opération inverse de l'addition, elle a pour but de faire trouver ce qu'il faut ajouter à un nombre pour en obtenir un autre, ce qu'on exprime de cette manière :

Étant donnés une somme et l'une de ses parties, trouver l'autre partie, tel est le but de la soustraction. Le résultat se nomme reste, excès ou différence.

On doit opérer d'une manière inverse de l'addition, ainsi, on écrit le nombre à retrancher au-dessous du nombre dont il faut retrancher, et l'on dit : quel nombre d'unités faut-il ajouter au chiffre des unités du plus petit nombre pour avoir les unités du plus grand, et ainsi de suite, par exemple, soit à *retrancher* 524 de 869, j'écris :

$$\begin{array}{r} 869 \\ 524 \\ \hline 345 \end{array}$$

et je dis, quel nombre faut-il ajouter à 4 pour avoir 9? c'est 5; que faut-il ajouter à 2 pour avoir 6? c'est 4; quel nombre faut-il ajouter à 5 pour avoir 8? c'est 3; le reste est donc 345. Pour *abréger*, ce qui est le but de l'*arithmétique*, on dit : 4 de 9, reste 5; 2 de 6, reste 4; 5 de 8, reste 3.

Prenons un autre exemple :

$$\begin{array}{r} 3042 \\ 1568 \\ \hline 1474 \end{array}$$

Je dis, quel nombre faut-il ajouter à 8 pour obtenir 2? il n'y en a point, ce n'est pas 2 que je dois avoir, mais bien 12; je reprends donc une dizaine sur 4, et je dis : 8 de 12 reste 4; et continuant, je dis : 6 de 3 (car j'ai ôté 1 de 4), par la même raison, il faut dire : 6 de 13 reste 7.

5 de 9 (car, d'une part, on ne peut dire 5 de 0, il faudrait dire 5 de 10, mais on a pris une unité de centaine, il reste donc 9) reste 4.

Enfin, on dit, 1 de 2 reste 1.

Le reste est 1474.

Mais cette manière d'opérer est trop longue; on préfère se servir d'un autre procédé, fondé sur ce principe. Si, aux deux nombres d'une soustraction, on ajoute une même quantité, le reste ne change pas. Cela résulte de la définition.

En effet, si j'ajoute un nombre à une somme composée de deux parties, si l'une des parties ne change pas, il faudra que l'autre augmente de ce nombre; ainsi, en ajoutant 10 au plus grand nombre d'une soustraction, le reste augmente de 10 évidemment; si j'ajoute 10 au plus petit nombre, la somme ne changeant pas, ce qu'il faudra ajouter sera moindre de 10, donc le reste aura diminué de 10, donc enfin le principe est démontré. Reprenons donc notre exemple :

$$\begin{array}{r} 3042 \\ 1568 \\ \hline 1474 \end{array}$$

Nous dirons : 8 de 12 reste 4; puis 6 et 1 font 7 dizaines, de 14 dizaines reste 7; ou pour abréger, 7 de 14 reste 7; 5 et 1 font 6, 6 de 10 reste 4; 1 et 1 font 2, 2 de 3 reste 1.

Dans un cas particulier, cependant, on préfère employer un procédé différent : soit à retrancher 5847 de 10000, on retranche 7 de 10, et chacun des chiffres suivants est retranché de 9, on dit donc : 7 de 10 reste 3; 4 de 9 reste 5; 8 de 9 reste 1; 5 de 9 reste 4. On voit, en effet, que 9990 plus 10, est égal à 10000; le reste 4153, est ce qu'on appelle complément arithmétique du nombre 5847 (1).

La *preuve* de la soustraction se fait par l'addition, d'après la définition même.

Ainsi, on ajoute le reste au plus petit nombre, et la somme doit être égale au plus grand. Reprenons nos exemples :

$$\begin{array}{rr} & 869 \\ & 524 \\ \hline & 345 \\ \hline\hline \text{Preuve} & 869 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 3042 \\ & 1568 \\ \hline & 1474 \\ \hline\hline \text{Preuve} & 3042 \end{array}$$

Multiplication.

7. Multiplier un nombre par un autre, c'est répéter le premier autant de fois qu'il y a d'unités dans le second. Le résultat se nomme pro-

(1) On peut faire une soustraction par les compléments.

duit; le premier est appelé multiplicande, le second, multiplicateur; le multiplicande et le multiplicateur sont les *facteurs* du *produit*.

La multiplication des nombres entiers est donc une simplification des additions dans lesquelles tous les nombres à ajouter entre eux sont égaux; ainsi, pour multiplier 8 par 3, il suffit de faire la somme de *trois* nombres égaux à 8; le produit sera un multiple du multiplicande.

Il faut observer encore que le *produit contient* le *multiplicande* autant de fois que le multiplicateur contient l'unité.

Dans la multiplication, il y a trois cas à examiner :

1° Multiplier un nombre d'un seul chiffre par un nombre d'un seul chiffre;

2° Un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul;

3° Un nombre de plusieurs chiffres par un nombre de plusieurs chiffres. Nous verrons que les deux derniers cas se ramènent au premier.

Premier cas. Tous les résultats de la multiplication d'un nombre d'un seul chiffre par un nombre d'un seul chiffre sont renfermés dans la table de multiplication suivante que l'on forme par voie d'addition.

Sur une ligne horizontale, on écrit les 9 premiers nombres, on les souligne, puis on les sépare par des traits verticaux; on prolonge ces traits verticaux au-dessous des nombres de la première ligne; on place les sommes qu'on obtient en ajoutant chaque nombre à lui-même; on obtient ainsi : 2, 4, 6, 8, 10, etc. On souligne tous les nombres qu'on a ainsi obtenus.

Pour obtenir la troisième ligne, on ajoute chaque nombre à celui qui se trouve au-dessus; ainsi, l'on dit : 2 et 1 font 3; 4 et 2 font 6; 6 et 3 font 9, etc.

Pour avoir la quatrième ligne, on ajoute chaque nombre de la dernière ligne formée avec le nombre correspondant de la première ligne horizontale; ainsi, l'on dit : 3 et 1 font 4; 6 et 2 font 8; 9 et 3 font 12, etc.

En général, les nombres d'une ligne horizontale se forment en ajoutant les nombres de la ligne précédente avec les nombres correspondants de la première; on trouve ainsi 9 lignes horizontales et 9 colonnes verticales.

Pour se servir de la table de multiplication, par exemple pour multiplier 8 par 7, on prend le chiffre 8 de la première tranche, puis l'on descend verticalement jusqu'à ce que l'on rencontre la 7e ligne horizontale, c'est-à-dire, jusqu'à ce qu'on se trouve vis-à-vis du chiffre 7 de la première colonne ; le nombre 56, qu'on trouve ainsi, est le produit demandé ; en effet, il a été trouvé en ajoutant 7 fois le nombre 8 à lui-même ou mieux en formant la somme de 7 nombres égaux à 8.

Table de multiplication.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Une observation attentive de ce tableau conduit aux remarques suivantes :

1° En général, tout nombre contenu dans les petites cases se retrouve plusieurs fois dans le tableau, ainsi 24 se retrouve 4 fois ; 12 se retrouve 4 fois ; 16 se retrouve 3 fois, etc. On en peut conclure qu'un nombre peut s'obtenir en multipliant entre eux des nombres différents, par exemple 28 s'obtient en multipliant 7 par 4 ou bien 4 par 7, ce qui conduit à ce principe général que nous démontrerons bientôt : *dans un produit de deux facteurs, on peut, sans changer la valeur du produit, intervertir leur ordre* (ce qui fournit un moyen de faire la preuve de la multiplication).

24 est aussi bien le produit de 8 multiplié par 3 que de 6 multiplié par 4, ce qui conduit à d'autres principes que nous examinerons bientôt ;

2° En tirant une ligne droite de 1 à 81, on trouve les nombres 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, qui résultent de 1 par 1, de 2 par 2, de 3 par 3, et, en général, du produit d'un chiffre multiplié par lui-même. Ces produits sont nommés les *carrés* de leurs facteurs; ainsi, 9 est le carré de 3, 16 est le carré de 4, et pour abréger (ce qui est le but général des sciences mathématiques), au lieu d'écrire 5×5, on écrit 5^2, 2 est dit l'exposant de 5, et on prononce encore ainsi : 5 *puissance* 2. Inversement, 5 est la racine carrée de 25; 6 est la racine carrée de 36.

Deuxième cas. Multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul.

Il faut remonter à la définition.

Multiplier 548 par 3, c'est faire la somme de 3 nombres égaux à 548. Posons cette addition :

$$\begin{array}{r} 548 \\ 548 \\ 548 \end{array}$$

Il faudra procéder en ajoutant les unités aux unités, les dizaines aux dizaines, les centaines aux centaines; il faudra donc faire la somme de 3 nombres égaux à 8 unités; faire la somme de 3 nombres égaux à 4 dizaines, et enfin, la somme de 3 nombres égaux à 5 centaines; cela reviendra donc à multiplier les unités par 3, les dizaines par 3 et les centaines par 3, c'est-à-dire, à multiplier tous les chiffres du multiplicande par le multiplicateur 3; ce qui ramène ce deuxième cas au premier, comme nous l'avions dit. Effectuant cette multiplication, nous dirons :

3 fois 8 font 24, je pose 4 et je retiens 2; 3 fois 4 font 12, 12 et 2 retenus font 14, je pose 4 sous la dizaine et je retiens 1; 3 fois 5 font 15, 15 et 1 font 16, j'écris 16 centaines :

$$\begin{array}{r} 548 \\ 3 \\ \hline 1644 \end{array} \quad \text{Le produit est 1644.}$$

Troisième cas. Prenons enfin un nombre de plusieurs chiffres à multiplier par un nombre de plusieurs chiffres.

Soit, par exemple, à multiplier 3457 par 648, on l'indique ainsi : 3457×648 (le signe $\times$ placé entre deux nombres indique qu'il faut multiplier le premier par le second); d'après la définition, cela revient à faire la somme de 648 nombres égaux à 3457; concevons cette addition indiquée comme il suit. Les points font concevoir que 3457 est omis un grand nombre de fois :

$$\left.\begin{array}{r}3457\\3457\\\vdots\\\vdots\end{array}\right\} 8 \text{ ou bien } 3457\times 8$$

$$345\times 648 \text{ ou bien } \left.\begin{array}{r}3457\\3457\\\vdots\\\vdots\\3457\\\vdots\\\vdots\end{array}\right\} 40 \text{ ou bien } 3457\times 40$$

$$\left.\begin{array}{r}3457\\3457\\\vdots\\\vdots\end{array}\right\} 600 \text{ ou bien } 3457\times 600$$

Je prends les 8 premiers nombres écrits, et je fais leur somme, ce qui revient à dire que je multiplie 3457 par 8.

Je prends les 40 nombres suivants, et je fais leur somme, c'est-à-dire, je multiplie 3457 par 40.

Je prends les 600 nombres suivants, c'est-à-dire, je multiplie 3457 par 600.

Ces trois produits partiels obtenus, je fais leur somme, et j'obtiens enfin le produit de 3457 par 648.

Ainsi, nous voyons d'abord que pour multiplier 3457 par 648, il suffit de savoir multiplier un nombre par 8, par 40 et par 600, nous avons multiplé par 8 (deuxième cas).

Voyons comment on multiplie un nombre par 40 : d'après la définifion, il faut faire la somme de 40 nombres égaux à 3457 ; écrivons ces 40 nombres les uns au-dessous des autres, comme il suit :

$$\left.\begin{array}{r}3457\\3457\\\vdots\\\vdots\end{array}\right\} 4 \text{ ou bien } 3457\times 4.$$

$$\left.\begin{array}{r}3457\\3457\\\vdots\\\vdots\end{array}\right\} 4 \text{ ou bien } 3457\times 4.$$

$$\left.\begin{array}{r}3457\\ \vdots\\ \vdots\end{array}\right\}\ 4\text{ ou bien }3457\times4.$$

$$\left.\begin{array}{r}3457\\ 3457\\ \vdots\\ \vdots\end{array}\right\}\ 4\text{ ou bien }3457\times4.$$

Prenons les 4 premiers nombres, puis les 4 suivants, puis les 4 nombres qui suivent encore, et ainsi de suite, et faisant ces sommes nous aurons ainsi 10 groupes de 4 fois 3457, c'est-à-dire qu'après avoir multiplié 3457 par 4, il suffira de multiplier ce produit par 10, ce qui s'indique ainsi $3457\times4\times10$ (parce qu'on suit l'ordre de l'écriture de gauche à droite, ainsi j'écris : $5\times7\times3\times8$, cela veut dire : multipliez 5 par 7, puis multipliez ce produit obtenu par 3, puis multipliez ce dernier produit par 8).

Un raisonnement analogue prouve que pour multiplier 3457 par 600, il suffit de multiplier 3457 par 6 et le produit obtenu par 100.

Ainsi, nous voyons qu'il faudra multiplier le multiplicande par tous les chifffres du multiplicateur, avec cette condition qu'après avoir multiplié par le chiffre des dizaines, il faut multiplier le produit par 10, après avoir multiplié par le chiffre des centaines, il faut multiplier le produit par 100, et ainsi de suite pour les autres chiffres qui pourront se trouver dansle multiplicateur.

Mais pour multiplier un nombre par 10, il suffit d'écrire un *zéro* à sa droite, car alors toutes les parties du nombre sont rendues 10 fois plus grandes.

Pour multiplier un nombre par 100, il suffit d'écrire deux zéros à la droite du nombre, car chaque chiffre représente des unités 100 fois plus grandes.

En général, pour multiplier un nombre par l'unité suivie d'un certain nombre de zéros, il suffit d'écrire ce nombre de zéros à la droite du nombre.

Pour multiplier par les dizaines, il suffit d'écrire le produit par le chiffre des dizaines, de manière que le dernier chiffre à droite de ce produit soit sous les dizaines du premier produit.

Pour le produit par les centaines, écrire le produit de manière que le dernier chiffre à droite soit sous les centaines, et ainsi de suite. Ces produits partiels obtenus, on fait leur somme.

Voici l'opération :

```
    3457
     648
   27656. . . . . produit par les unités.
  13828 . . . . . produit par les dizaines.
 20742  . . . . . produit par les centaines.
 2240136. . . . . somme de trois produits par-
                     tiels ou produit demandé.
```

Quand on a des zéros interposés dans les multiplicateurs, on passe aux chiffres suivants à gauche, en ayant soin d'écrire le dernier chiffre à droite du produit partiel au-dessous du chiffre correspondant du multiplicateur.

Donc, en général, pour multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre de plusieurs chiffres, on écrit le multiplicateur sous le multiplicande, de manière que les unités soient sous les unités, on souligne le multiplicateur, puis on multiplie le multiplicande successivement par chacun des chiffres du multiplicateur, en écrivant les produits partiels comme il a été indiqué, puis on fait la somme de ces produits partiels, ce qui donne le produit demandé.

Remarque. Quand les deux facteurs d'un produit sont considérables, on a un grand avantage à faire les produits partiels par voie d'addition : soit, par exemple, à multiplier 31415926 par 5748002.

On ajoutera 31415926 à lui-même, puis ce nombre trouvé à lui-même, on obtiendra le produit par 4; au nombre trouvé, en ajoutant 31415926, on obtient le produit par 5; si on ajoute le produit par 2, on aura ainsi le produit par 7; puis, enfin, on ajoute à ce nombre le multiplicande, et on trouve le produit par 8.

Opération.

```
  31415926
  62831852 . . . pour 2          31415926
 125663704 . . . pour 4           5748002
           . . . . . . 5         62831852
           . . . . . . 7      . . . . . . . .
           . . . . . . 8       . . . . . .
```

Par ce procédé, on s'expose bien moins à se tromper dans les calculs, parce que la mémoire est moins consultée.

Nous n'avons pas examiné le cas où l'on aurait à multiplier un nombre d'un seul chiffre par un nombre de plusieurs chiffres. Nous allons montrer, en effet, qu'on peut intervertir l'ordre des facteurs dans un produit de deux facteurs, et, par conséquent, ramener le cas dont nous parlons au deuxième cas considéré.

Le nombre des chiffres d'un produit est compris entre deux limites qu'on obtient en remplaçant chaque facteur par 1 suivi de zéros, etc.

PRINCIPES SUR LA MULTIPLICATION.

8. I. Principes ; dans un produit de deux facteurs on peut intervertir leur ordre sans changer le produit, ainsi 8×3 est égal à 3×8.

Pour démontrer il faut toujours remonter aux définitions ou aux principes déjà connus. 8 est l'unité répétée 8 fois, on peut donc représenter 8 par 8 unités

1 1 1 1 1 1 1 1

Pour multiplier 8 par 3 il faut faire la somme de 3 nombres égaux à 8,

on écrira	8	1 1 1 1 1 1 1 1
	8	1 1 1 1 1 1 1 1
	8	1 1 1 1 1 1 1 1
	8×3	3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3 ou bien 3×8

les unités contenues dans ce tableau représentent 8×3.

Prenons les unités contenues dans ce tableau en colonne verticale, nous obtenons 3, 3, 3..., en un mot autant de fois 3 qu'il y a d'unités dans 8, c'est-à-dire 8 fois 3, ce qu'on écrit ainsi 3×8.

Or ce tableau représente 8×3, mais il est représenté à son tour par 3×8, *deux quantités égales à une troisième sont égales* entre elles, donc enfin 8×3 est égal à 3×8.

Le raisonnement que nous avons fait s'appliquerait à deux nombres entiers quelconques; donc en général on peut intervertir l'ordre de deux facteurs dans un produit sans changer la valeur de ce produit (1).

II. Dans un produit de 3 facteurs on peut intervertir l'ordre des 2 derniers et par suite l'ordre de tous les facteurs sans changer le produit.

Soit $8\times3\times5$.

Multiplier 8 par 3 c'est faire la somme de 3 nombres égaux à 8, ainsi 8×3 est $8+8+8$.

---

(1) Nous pensons qu'un élève arrivé à ces principes a acquis l'habitude du raisonnement, et nous rendrons désormais nos démonstrations plus concises, ce que nous n'avons pas cru devoir faire jusqu'ici.

Nous nous servirons du signe +, qui veut dire *plus*; et du signe =, qui est le signe de l'*égalité*; de parenthèses, qui indiquent un résultat effectué.

$$8\times3\times5 \text{ est donc } \left\{\begin{array}{l} 8+8+8 \\ 8+8+8 \\ 8+8+8 \\ 8+8+8 \\ 8+8+8 \end{array}\right.$$

ce tableau représente $8\times3\times5$. Ajoutons les nombres écrits en colonne verticale nous obtiendrons $8\times5+8\times5+8\times5$. C'est-à-dire $8\times5\times3$, ce tableau représente $8\times3\times5$, mais il est représenté par $8\times5\times3$, donc enfin $8\times3\times5=8\times5\times3$. Ce qu'il fallait démontrer d'abord.

Mais on a $8\times3=3\times8$ donc $8\times3\times5=3\times8\times5$, etc., ainsi dans un produit de 3 facteurs on peut faire occuper à un facteur toutes les places.

III. Dans un produit d'un nombre quelconque de facteurs on peut intervertir comme on veut l'ordre de tous les facteurs.

Nous partageons cette démonstration en deux parties : soit à multiplier $5\times3\times7\times4\times8\times6\times9$.

Nous pouvons intervertir l'ordre de deux facteurs consécutifs, par exemple des facteurs 4 et 8.

En effet il faut d'abord effectuer le produit de $5\times3\times7$ qui est 105, ce qu'on désigne ainsi $(5\times3\times7)$.

On multiplie ensuite par 4 puis par 8, mais d'après le principe précédent, $(5\times3\times7)\times4\times8=(5\times3\times7)\times8\times4$
ou, en supprimant les parenthèses qui ne servent à rien, on a

$$5\times3\times7\times4\times8=5\times3\times7\times8\times4$$

puis multipliant ces deux nombres égaux, d'abord par 6 puis par 9, on trouve enfin $5\times3\times7\times4\times8\times6\times9=5\times3\times7\times8\times4\times6\times9$
ainsi un facteur peut être avancé d'un rang ou bien reculé d'un rang Donc de proche en proche un facteur peut occuper toutes les places et par suite tous les facteurs peuvent occuper toutes les places. Ce qu'il fallait démontrer.

IV. Pour multiplier un nombre par un produit effectué de plusieurs facteurs, il suffit de multiplier ce nombre successivement par les facteurs du produit.

Par exemple pour multiplier 8 par 105, qui est égal à $7\times5\times3$, il suffit de multiplier 8 par 7, le produit effectué par 5, et le produit effectué par 3, ce qu'on indique d'une manière abrégée ainsi en mettant des points au lieu du signe $\times$, et $8\times(7.5.3)=8\times7\times5\times3$.

En effet $8\times(7.5.3)=(7.5.3)\times8$, ou bien d'après la définition d'un produit de plusieurs facteurs $(7.5.3)\times8=7\times5\times3\times8$.

Mais dans ce produit on peut faire occuper au facteur 8 la première place donc enfin on a $8\times(7.5.3.)=8\times7\times5\times3$. la réciproque est vraie, c'est-à-dire que $8\times7\times5\times3=8\times(7.5.3)$.

V. Pour multiplier un produit de plusieurs facteurs par un nombre, il suffit de multiplier un des facteurs du produit par ce nombre, et *de le faire entrer ainsi modifié dans le produit primitif*. La réciproque est vraie, c'est-à-dire, si on multiplie un facteur d'un produit par un nombre, le produit est multiplié par ce nombre.

Ainsi $(5\times7\times4)\times3=5\times(7\times3)\times4.$

En effet, $(5\times7\times4)\times3$ est égal à $5\times7\times4\times3$. Car les parenthèses sont inutiles.

Or, $5\times7\times4\times3=7\times3\times5\times4$, ou bien $7\times3)\times5\times4$.

Ou bien en intervertissant l'ordre des facteurs. $5\times(7\times3)\times4$.

Donc enfin $(5\times7\times4)\times3=5\times(7.3)\times4$.

Ce qu'il fallait démontrer.

De ces principes ou *théorèmes*, on déduit les conséquences ou corollaires qui suivent.

1° Pour faire la preuve d'une multiplication, après avoir multiplié le multiplicande par le multiplicateur, si l'on multiplie le multiplicateur par le multiplicande, le produit qu'on obtiendra devra être le même que le précédent.

Ainsi, on peut dire que le produit des deux nombres entiers est aussi bien un multiple du multiplicateur que du multiplicande.

Et inversement que le multiplicateur est un *sous-multiple* du produit comme le multiplicande est un *sous*-multiple de ce produit ou une partie *aliquote* de ce produit.

2° Quand on rend le multiplicande un certain nombre de fois plus grand, le produit est rendu le même nombre de fois plus grand, cela résulte du principe V.

3° Nous avons démontré généralement (principe IV) que pour multipler un nombre par 40, il suffit de le multiplier par 4, puis par 10, mais il n'en était pas moins nécessaire de donner la démonstration particulière.

4° Pour élever un produit de plusieurs facteurs à la deuxième puissance, il suffit d'élever chacun des facteurs du produit à la deuxième puissance.

Ainsi $(5\times7\times4\times3)^2=5^2\times7^2\times4^2\times3^2$.

En effet, élever $5\times7\times4\times3$ à la deuxième puissance, c'est le multiplier par lui-même; mais pour multiplier un nombre par un produit, il suffit de multitiplier ce nombre successif par les facteurs du produit. Ainsi je multiplie : $5\times7\times4\times3$ successivement par 5, par 7, par 4 et par 3.

Mais pour multiplier $5\times7\times4\times3$, par 5, il suffit de multiplier 5 par 5.

Ce qui donne $5^2\times7\times4\times3$, de même pour multiplier par 7, il suffit de multiplier 7 par 7 et ainsi de suite.

Donc $(5\times7\times4\times3)^2=5^2\times7^2\times4^2\times3^2$.

Au lieu d'écrire $5\times5\times5$, on écrit 5^3.

5 est élevé à la puissance 3, de même $8^4=8\times8\times8\times8$.

Cela posé, on peut dire que pour élever un produit de plusieurs facteurs à une puissance, il suffit d'élever chaque facteur à cette puissance.

Ainsi $(5\times7)^4=5^4\times7^4$.

En effet
$$\begin{aligned}(5\times7)^4&=(5\times7)(5\times7)(5\times7)(5\times7)\\&=(5^2\times7^2)\times(5\times7)\times(5\times7)\\&=(5^3\times7^3)\times(5\times7)\\&=5^4\times7^4.\end{aligned}$$
Ce qu'il fallait démontrer.

Pour appliquer d'une manière utile la multiplication, nous transformerons dans le système décimal, un nombre écrit dans un système dont la base est quelconque.

Pour indiquer dans quel système le nombre est écrit, on place la base à gauche du nombre, entre parenthèses, et un peu au-dessus de ce nombre. Par exemple : $^{(12)}\,3067\beta64$

est écrit dans le système dont la base est 12; dans ce système, il y a 11 chiffres significatifs :

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \alpha,\ \beta.$$

α vaut dix, β vaut onze.

D'après la convention fondamentale de tout système de numération, tout chiffre placé à la gauche d'un autre, exprime des unités de l'ordre immédiatement supérieur, le nombre $^{(12)}\,3067\beta64$ vaut

$$4+6\times12+\beta\times12^2+7\times12^3+6\times12^4+0\times12^5+3\times12^6.$$

ou bien $4+72+11\times144+7\times1728+6\times12^4+0\times12^5+3\times12^6$.

Division.

9. La division est une opération inverse de la multiplication.

Définition. Diviser un nombre par un autre, c'est trouver un troisième nombre qui, multiplié par le second, reproduise le premier, ou plus simplement, on peut dire : étant donnés un produit et l'un de ses facteurs, trouver l'autre facteur.

Le *produit* est le *dividende*.

Le facteur connu (le multiplicande, par exemple) est le *diviseur*.

Le facteur cherché est le *quotient*.

De la définition générale, on peut déduire cette autre définition, savoir: que diviser un nombre par un autre, c'est trouver combien de fois le premier contient le second, ce qui explique l'origine du mot *quotient*.

En effet, nous avons vu qu'un produit de deux facteurs contient le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur.

En examinant la table de multiplication, on trouve les quotients des divisions des nombres de deux chiffres par des nombres d'un seul chiffre. Mais on peut remarquer aussi que si l'on veut diviser 58 par 7, par exemple, aucun nombre entier multiplié par 7 ne peut donner pour produit 58; dans ce cas, la division a pour objet de faire trouver le plus grand nombre de fois que 58 contient 7.

Nous verrons, dans d'autres opérations de l'arithmétique, que souvent les résultats que l'on cherche ne peuvent être exprimés par un nombre que d'une manière approchée.

Ainsi, en général, quand le quotient d'une division ne peut être un nombre entier, le but de la division est de trouver le plus grand nombre de fois que le diviseur est contenu dans le dividende.

Nous prendrons, pour exemple, deux nombres composés chacun de plusieurs chiffres, les raisonnements s'appliquant à tous les autres cas.

Soit à diviser 582982 par 268; d'après la définition de la division, il serait naturel de multiplier successivement 268 par 1, 2, 3, 4, et ainsi de suite, en un mot, de faire les multiples successifs de 268, jusqu'à ce qu'on trouve 582982, ou deux multiples consécutifs, l'un plus petit, l'autre plus grand que le dividende. Cette manière d'opérer serait trop longue; on la simplifie en faisant dépendre la division de deux nombres quelconques de divisions partielles dans lesquelles le quotient ne doit être composé que d'un seul chiffre.

On cherche à mettre en évidence les produits du diviseur par les différents chiffres du quotient, et pour reconnaître la nature des plus hautes unités du quotient, on multiplie 268 par 1, 10, 100, 1000, on obtient 268, 2680, 26800, 268000; 268000 est contenu dans 582982; il y a donc au moins un mille au quotient; mais en multipliant 268 par 10000, on trouve 2680000, qui est plus grand que le dividende donné, donc le quotient est plus petit que 10000; ainsi, le quotient est plus grand que 1000 et plus petit que 10000, c'est-à-dire qu'il est composé de 4 chiffres, ou bien encore que le chiffre des plus hautes unités est de l'ordre des mille.

Le produit du diviseur par le nombre des mille du quotient est un nombre de mille qui ne peut surpasser le nombre des mille du dividende.

En effet, 268 multiplié par des mille, donne un nombre de mille;

ce produit ne peut donc se trouver que dans les mille de 582982, c'est-à-dire dans 582 mille.

On est conduit à séparer les mille du dividende, ou plus généralement, on est conduit à séparer sur la gauche autant de chiffres qu'il en faut pour contenir le diviseur.

Cette séparation faite, on cherche le plus grand nombre de fois que 582 contient 268, on y parvient en prenant les multiples successifs de 268, et en choisissant le plus grand de ces multiples contenus dans 582; on trouve que c'est 2 fois 268, ou bien 536; ainsi, 2 est le chiffre des mille du quotient, car 536000 ou bien 268×2000 est contenu dans 582000, à plus forte raison, est-il contenu dans 582982.

D'autre part, 3 fois 268 est plus grand que 582, au moins d'une unité, et par suite, 268×3000 est plus grand que 582000 au moins d'un mille, il est donc plus grand que 582982; ainsi, le dividende est compris entre 268×2000 et 268×3000, le quotient est donc compris entre 2000 et 3000; donc le chiffre des mille est le chiffre 2.

Ce chiffre étant trouvé, je retranche de 582 le produit du diviseur par le chiffre obtenu, produit qui est 536, j'obtiens pour reste 46; en abaissant les chiffres suivants, j'obtiens 46982, nouveau dividende qui devra donner les trois chiffres suivants du quotient cherché; en raisonnant comme précédemment, il faudra séparer les centaines du dividende, ou plutôt, il fallait abaisser, à la droite du reste 46, le chiffre des centaines, ce qui aurait donné 469 je dis; en 469 combien de fois 268? il y est contenu une fois; je multiplie 268 par 1, et je retranche de 469, j'obtiens pour reste 201, j'abaisse le chiffre 8 à la droite, ce qui donne 2018, il faut trouver combien de fois 268 est contenu dans ce nombre. Au lieu de faire les multiples successifs de 268, on raisonne de cette manière: le quotient de cette division partielle doit avoir un seul chiffre; or, 2 centaines du diviseur multipliées par les chiffres du quotient, ne peuvent donner que des centaines; ce produit ne peut donc se trouver que dans les centaines de 2018, je suis donc conduit à chercher combien de fois 20 contient 2, nous savons à l'avance que le quotient ne peut avoir plus d'un chiffre. Essayons 9, ce chiffre peut être trop grand, car 20 n'est pas seulement le produit de 2 par le chiffre cherché, mais il contient encore les retenues provenant des produits des chiffres suivants 6 et 8; ainsi, 9 peut être trop grand, et pour essayer, on multiplie 268 par 9, ce qui donne 2312, 9 est donc trop grand; essayons 8, nous trouvons pour produit de 268 par 8, 2144; 8 est donc encore trop grand; essayons 7, 7 fois 268 donne 1876, 7 est donc le chiffre des dizaines; en retranchant 1876 de 2018, on trouve pour reste 142; j'abaisse le chiffre suivant 2, je trouve 1422, 14 contient 2 fois 7, mais 7 est trop grand, ce que j'apprends, à cause des retenues provenant des produits de 6 et de 8 par 7; j'essaye 6, 6 fois 268 est plus grand que 1422; j'essaye enfin 5, 5 fois 268 donne 1340, que je retranche de 1422, il reste 82; ainsi, le quotient est 2175 et le reste est 82, c'est-à-dire que si du dividende donné on retranche 2175 fois 268, il reste 82. Dans ce premier exemple, la division ne donne pas pour quotient un nombre entier; le quotient est compris entre 2175 et 2176; en prenant 2175, on a ce quotient approché, à moins d'une unité.

On dispose l'opération de la manière suivante : on écrit le dividende, et à la droite, on écrit le diviseur, on sépare les deux nombres par un trait vertical, au-dessous du diviseur on tire une barre horizontale, sous laquelle on écrira le quotient.

1°		
	582982	268
	536	2175
1er reste.	469	
	263	
2e reste.	2018	
	1876	
3e reste.	1422	
	1340	
4e reste.	82	

2°.	
582982	268
469	2175
2018	
1422	
82	

Règle pratique. On sépare sur la gauche du dividende autant de chiffres qu'il en faut pour contenir le diviseur, et l'on cherche combien de fois le dividende partiel contient le diviseur : ce chiffre est celui des plus hautes unités du quotient. Pour simplifier cette opération, on cherche combien de fois le premier chiffre à gauche du diviseur est contenu dans le premier chiffre ou les deux premiers chiffres à gauche du dividende; ce nombre trouvé peut être trop grand, et pour l'essayer, on multiplie tout le diviseur par ce chiffre. Au lieu d'écrire le produit partiel sous le dividende partiel, on retranche immédiatement les produits à mesure qu'ils se présentent, 2° en ayant égard aux principes de la soustraction; à la droite du reste, on abaisse le chiffre suivant; si le nombre ainsi obtenu est plus petit que le diviseur, on écrit zéro au quotient, et on abaisse encore le chiffre suivant; puis, si le nombre est plus grand que le diviseur, on opérera sur ce dividende partiel comme sur le premier, et ainsi de suite.

Nous le répétons, le cas général comprend tous les cas qui peuvent se présenter.

Soit pour exemple : 17048 à diviser par 858.

La preuve de la division, quand le quotient est entier, se fait par la multiplication. Le produit du diviseur par le quotient doit être le dividende. On peut faire la preuve par une nouvelle division; en effet, si on divise le dividende par le quotient, on doit trouver pour quotient le diviseur donné.

Quand le quotient n'est pas entier, en retranchant du dividende le reste obtenu, on retombe sur le cas précédent, mais on préfère opérer de la manière suivante : on multiplie le diviseur par le quotient, on ajoute au produit le reste de la division, et la somme doit être le dividende.

Pour abréger le langage arithmétique, on dit qu'un nombre est divisible par un autre quand le quotient est entier; ainsi, on peut indifféremment dire qu'un nombre est *multiple* d'un autre, ou bien qu'il est divisible par cet autre quand le quotient du premier par le second est entier.

Application. Écrire 3847 dans le système dont la base est 6. En divisant 3847 par 6, on trouve le nombre d'unités du second ordre, le reste est le chiffre des unités simples, on obtiendra de même les chiffres des ordres suivants.

Remarques sur la division (1).

1° Si le dividende augmente, le diviseur restant le même, le quotient entier augmente en général.

2° Si le dividende augmente d'une fois le diviseur le quotient augmente d'une unité, en effet le quotient indique combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Inversement, si l'on retranche du dividende une fois le diviseur, le quotient diminue d'une unité.

I. En supposant le dividende divisible par le diviseur, si l'on rend le dividende deux, trois fois plus grand, le diviseur restant le même, le quotient est rendu deux, trois fois plus grand; et en généralisant, on peut dire que si on multiplie le dividende par un nombre le quotient est multiplié par ce nombre, car si un produit de deux facteurs est multiplié par un nombre, l'un des facteurs ne changeant pas, l'autre facteur

---

(1) Le signe de la division est (:), qu'on prononce *divisé par*.

doit être multiplié par le nombre. Exemple : 105 divisé par 7, on trouve pour quotient 15; si l'on multiplie 105 par 4 et qu'on divise par 7 on trouve pour quotient 60.

II. En supposant encore le dividende divisible par le diviseur, si l'on multiplie le diviseur par un nombre entier, et si le quotient de la nouvelle division est encore entier, ce dernier quotient sera le premier divisé par le nombre entier.

En prenant la définition simple de la division, savoir, que le quotient exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, on voit que si le diviseur est multiplié par 2, il sera contenu deux fois moins dans le dividende; s'il est rendu trois fois plus grand, le dividende le contiendra trois fois moins : en général que si le diviseur est multiplié par un nombre le quotient sera divisé par ce nombre.

$$140 : 7 = 20$$
$$140 : 7 \times 5 = 4$$
$$4 = 20 : 5$$

(A) Des deux principes qui précèdent on conclut que si le quotient d'une division est entier, en multipliant le dividende et le diviseur par un nombre entier, le quotient ne change pas de valeur; de même, si l'on divise le dividende et le diviseur par un entier, ce quotient ne change pas de valeur.

$$56 \times 5 : 8 \times 5 = 7, \quad 56 : 8 = 7$$

Quand le quotient d'une division n'est pas entier, nous avons vu qu'on trouve le quotient approché à moins d'une unité; alors *le reste de la division est plus petit que le diviseur;* c'est là désormais ce qu'il faut entendre par reste d'une division.

Cela posé, on doit modifier le premier principe; quand il y a un reste dans une division, il peut se faire qu'en multipliant le dividende par un nombre entier le quotient défini comme nous l'avons dit ne soit pas le premier quotient multiplié par le nombre entier.

111 : 7 donne pour quotient 15, et il reste 6.

Si nous multiplions 111 par 4 sans changer le diviseur 7, le quotient 15 sera multiplié par 4, et le reste 6 sera aussi multiplié par 4; ce sera alors 24; or, 24 n'est pas plus petit que 7, donc on pourra encore diviser 24 par 7, ce qui donnera le quotient 3 qu'il faudra ajouter à 60; on voit en effet qu'en divisant immédiatement 444 par 7 on trouve 63 pour quotient et 3 pour reste.

III. Si l'on multiplie le dividende et le diviseur par le même nombre, le quotient ne change pas de valeur, mais le reste est multiplié par ce nombre.

En effet si du dividende je retranche le reste, j'obtiens un nouveau dividende qui contient exactement le diviseur, et alors on retombe sur le principe (A) ; mais en négligeant le reste on n'a pas eu le dividende donné ; ainsi il faut que ce reste soit multiplié par le nombre entier ; or dans ce cas on voit bien que le nouveau diviseur est plus grand que le reste ainsi multiplié.

$$111 = 7\times15+6$$
$$444 = 28\times15+24$$

6 était plus petit que 7, 24 est plus petit que 28. Ce qu'il fallait démontrer.

N'oublions pas que l'on a toujours pour objet en arithmétique de simplifier les calculs ; or quatre remarques sur la division doivent être faites à ce sujet.

1° Si le diviseur est un nombre d'un seul chiffre on fait la division d'une manière rapide.

Mais ici une observation doit être faite sur une expression fréquemment employée. Nous entrerons dans quelques détails.

6 est six fois plus grand que l'unité ; évidemment 1 est six fois plus petit que 6 ; on dit simplement que 1 est le sixième de 6.

Prendre le sixième de 6 c'est trouver un nombre six fois plus petit que 6.

On conçoit donc qu'on peut demander le sixième de 12, le sixième de 18, etc. ; c'est pour cette raison qu'on dit que si l'on divise un nombre par 6, on en prend le sixième.

Soit à diviser 5784 par 6 : nous dirons le sixième de 57 est 9 pour 54 et il reste 3 ; 3 suivi de 8 donne 38, le sixième de 38 est 6 pour 36 et il reste 2 ; 2 suivi de 4 donne 24, le sixième de 24 est 4 et il reste zéro. On écrit le quotient sous le dividende, les chiffres des restes successifs sont retenus dans la mémoire.

Opération. 5786 : 6
Quotient 964

2° Quand le diviseur est formé d'un grand nombre de chiffres il convient de faire les multiples de ce diviseur par les nombres d'un seul chiffre comme dans la *multiplication* pour le cas analogue, et alors on trouve rapidement les chiffres successifs du quotient, et les multiples étant déjà formés, les soustractions peuvent se faire de suite.

3° Pour diviser un nombre par un produit indiqué de plusieurs facteurs il suffit de diviser ce nombre successivement par les facteurs du produit.

Pour fixer les idées, je prends le dividende 840 et le diviseur $3\times7\times5$, *on voit en effet que* 840 *divisé par* 105 *étant égal à* 8, *en divisant* 840 *par*

3 on trouve le quotient 280, en divisant le quotient par 7, on trouve le quotient 40, puis en divisant 40 par 5 on trouve 8.

Mais il faut donner une démonstration indépendante de la preuve par le calcul, je m'appuie sur une définition et sur un principe.

Voici cette définition : le quotient est le nombre qui multiplié par le diviseur donne pour produit le dividende.

Et le principe est celui-ci : pour multiplier un nombre par un produit de plusieurs facteurs il suffit de multiplier ce nombre successivement par les facteurs du produit.

Soit donc le quotient obtenu en divisant successivement 840 et les quotients obtenus par les facteurs 3, 7 et 5, on l'indique ainsi au moyen de parenthèses

$$[(840 : 3) : 7] : 5$$

au lieu de multiplier ce quotient par $3\times7\times5$, immédiatement, je multiplie successivement par 5, 7 et 3, j'obtiens successivement $(840 : 3) : 7$; $840 : 3$, et enfin 840; le principe est donc démontré. Ce principe est d'une application continuelle; nous examinerons *dans les notes le cas où les divisions donnent des restes.*

D'après cette remarque on voit qu'il pourra être utile de connaître tous les facteurs d'un nombre et qu'il sera nécessaire de reconnaître si un nombre est divisible par un nombre d'un seul chiffre; ces recherches et les principes qu'on en déduit forment une partie *très-importante* de l'arithmétique à laquelle on a donné le titre général de DIVISIBILITÉ.

Des nombres comme 2, 5, 11, 23 n'admettent aucun diviseur; il est utile de connaître les nombres de cette nature, on les nomme *premiers absolus* ou simplement premiers; ainsi un nombre premier est celui qui n'a d'autre diviseur que lui-même ou l'unité.

4° Si l'on voit que le dividende et le diviseur sont divisibles par un même nombre, les deux termes de la division peuvent être débarrassés de ce diviseur commun, puisque le quotient ne change pas alors.

On conçoit que cette simplification conduit à rechercher le plus grand commun diviseur entre deux nombres, recherche qui donne lieu à des résultats extrêmement utiles dans plusieurs parties de la science des quantités.

RECHERCHE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

Principes préliminaires.

10. *Premier principe.* La somme de deux multiples d'un nombre est un multiple de ce nombre, et en général la somme de tant de multiples d'un nombre qu'on voudra, est un multiple de ce nombre.

En effet, cette somme est encore le nombre donné répété un nombre entier de fois.

Par exemple si j'ajoute 7 fois 15 à 3 fois 15, puis à cette somme 6 fois

15 et encore 2 fois 15, j'aurai 7 fois + 3 fois + 6 fois + 2 fois 15 ou bien 18 fois 15 qui est un multiple de 15.

On énonce plus souvent ce principe de cette manière :

Si un nombre divise toutes les parties d'une somme, il divise aussi la somme.

Corollaire. 1° Tout diviseur d'un nombre divise tous les multiples de ce nombre, et inversement ; 2° tout nombre divisible par un autre est divisible par les diviseurs de cet autre.

1° En effet si un nombre en divise un autre, ce dernier peut être considéré comme le produit du diviseur par le quotient ; ainsi 582 divisible par 6 est égal à 6×97. Si je multiplie 582 par 8, le quotient 97 sera multiplié par 8, donc 6 divisera encore le produit de 582 par 8.

2° Si j'ai le produit de plusieurs facteurs $5 \times 7 \times 3 \times 4 \times 2 \times 14$.

Le produit 11760 est divisible par chacun des facteurs, ou, si l'on veut, par les produits deux à deux, trois à trois, quatre à quatre de ces facteurs.

Or le dividende d'une division est égal au diviseur multiplié par le quotient, ou bien, au quotient multiplié par les facteurs successifs du diviseur. Donc tous les facteurs du diviseur sont diviseurs du dividende. En un mot les deux parties de ce corollaire ne forment au fond qu'une seule remarque.

Deuxième principe. La différence de deux multiples d'un nombre est un multiple de ce nombre.

En effet, si d'un nombre entier de fois un nombre je retranche plusieurs fois ce nombre, j'obtiens encore un nombre entier de fois ce dernier nombre.

Exemple, de 36 je retranche 28, c'est-à-dire que de 9 fois 4 je retranche 7 fois 4, je trouve 9 fois moins 7 fois 4 c'est-à-dire 2 fois 4.

On énonce encore ce principe de cette manière :

Tout nombre qui divise une somme composée de deux parties et l'une de ces parties divise l'autre partie.

De ces deux principes et du corollaire on déduit ces corollaires très-importants :

Tout nombre qui divise le dividende et le diviseur, divise le reste de la division, et inversement tout nombre qui divise le diviseur et le reste, divise le dividende.

Ainsi 7 divise 161 et 28 ; il divise le reste 21 de la division.

En effet, 7 divise 28, donc il divise le multiple 28×5, 7 divise donc une somme 161 et l'une de ses parties 28×5 ; 7 divise donc l'autre partie 21.

Inversement 6 divise 48 et 276, divisant le reste de la division dans laquelle 276 est le dividende, 48 le diviseur et 36 de reste, 6 divise 276.

En effet 6 divise 48, donc 6 divise 48×5, 6 divise par conséquent les deux parties 36 et 48×5 de 276, donc 6 divise 276.

Ainsi le dividende et le diviseur ont les mêmes diviseurs que le diviseur et le reste.

De là le procédé employé pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres ou de plusieurs nombres. On nomme *plus grand commun* diviseur entre deux nombres ou plusieurs nombres le plus grand de tous les diviseurs communs à ces nombres.

Soit à chercher le plus grand commun diviseur entre les deux nombres 548 et 236.

Le plus grand commun diviseur doit diviser 236, il ne peut donc être plus grand que 236. Si 236 divisait 548, il serait lui-même le plus grand commun diviseur. Il est donc naturel d'essayer la division de 548 par 236.

236 ne divise pas 548, le quotient est 2 et le reste est 76.

548	236
76	2

236 n'est donc pas le plus grand commun diviseur des deux nombres donnés ; mais l'opération faite peut nous servir.

En effet tous les diviseurs communs à 548 et 236 sont aussi diviseurs de 236 et 76. Et réciproquement tous les diviseurs entre 236 et 76 sont diviseurs de 236 et 548 ; donc le plus grand commun diviseur de 548 et 236 est le même que celui de 236 et 76. Ainsi nous devons chercher le plus grand commun diviseur entre 236 et 76, ce qui est plus simple que de chercher celui des deux nombres donnés ; il faut diviser 236 par 76, le quotient est 3 et le reste est 8.

Un raisonnement semblable au précédent conduit à chercher le plus grand commun diviseur entre 76 et 8, dans cette opération nouvelle le quotient est 9 et le reste est 4 ; je divise encore 8 par 4, le quotient est 2 et le reste est zéro. Donc 4 est le plus grand commun diviseur entre 8 et 4, il est donc le plus grand commun diviseur entre 8 et 76 ; par suite 4 est le plus grand commun diviseur entre 76 et 236, et enfin 4 est le plus grand commun diviseur entre 236 et 548.

Pour placer successivement les restes des divisions, ces restes étant successivement les diviseurs, on dispose l'opération comme ci-dessous :

	2	3	9	2
548	236	76	8	4
76	8	4	0	

En un mot on écrit les quotients au-dessus des diviseurs correspondants.

Il peut arriver que deux nombres n'aient pas d'autre diviseur commun que l'unité, exemples 9 et 16, 18 et 25, les deux nombres sont *premiers entre eux*.

Quand on cherche le plus grand commun diviseur entre deux nombres, si le reste qui précède le dernier reste zéro est différent de 1, les deux nombres ont un plus grand commun diviseur.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand le reste qui précède 0 est 1, les deux nombres sont premiers entre eux.

Les réciproques sont vraies.

Ainsi quand deux nombres ont un plus grand commun diviseur, l'avant-dernier reste n'est pas l'unité, et quand deux nombres sont premiers entre eux, l'avant-dernier reste est 1.

Cette dernière remarque nous permet d'exprimer que deux nombres sont premiers entre eux.

On voit par ce qui précède quelle est la règle à suivre pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres. On peut simplifier les opérations de deux manières :

1° Si deux restes consécutifs ont un *facteur commun*, on peut diviser ces deux nombres par leur *facteur commun*, et opérer ensuite sur les quotients obtenus ; l'opération terminée, on multiplie le plus grand commun diviseur entre ces quotients par le facteur, comme cela résulte de la remarque suivante.

Si on multiplie deux nombres par un facteur, et si on cherche le plus grand commun diviseur entre les produits, ce plus grand commun diviseur sera égal au plus grand commun diviseur primitif multiplié par ce facteur.

Car dans une division, si je multiplie le dividende et le diviseur par un facteur, le reste est multiplié par ce facteur.

Ainsi dans les divisions successives qu'il faut faire pour obtenir le plus grand commun diviseur, tous les restes sont multipliés par le facteur, donc l'avant-dernier reste, c'est-à-dire le plus grand commun diviseur est multiplié par ce facteur.

Exemple :

48 et 30

	1	1	1	2
48	30	18	12	6
18	12	6	0	

Je multiplie 48 et 30 par 7, il vient :

$$48\times7,\quad 30\times7 \text{ et } 18\times7,$$

Je divise 30×7 par 18×7, le reste 12 est multiplié par 7 et ainsi de suite ; le plus grand commun diviseur est donc 6×7. Ce qu'il faut démontrer.

Donc je pourrai diviser immédiatement 548 et 236 par 2, ce qui me donne 274 et 118, l'opération est ainsi simplifiée, car la recherche du plus grand commun diviseur entre 274 et 118 est plus facile que cette recherche du plus grand commun diviseur entre 548 et 236.

Tout nombre qui en divise deux autres divise leur plus grand commun diviseur.

En effet, tout nombre qui en divise deux autres divise le reste de la division du plus grand par le plus petit; ce nombre divise donc à son tour le reste de la division du plus petit nombre et du reste: il divise donc ainsi tous les restes qu'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur entre les deux nombres donnés; donc il divise le dernier reste, c'est-à-dire le plus grand commun diviseur.

Prenons pour exemple :

174 et 48, 3 divise ces deux nombres; donc il divise 30 puis 18, puis 12, puis enfin 6. Ce qu'il faut démontrer.

11. Des considérations qui précèdent nous déduisons un des principes fondamentaux de l'arithmétique.

Principe : Si un nombre divise un produit de deux facteurs, et s'il est premier avec l'un des facteurs du produit, il doit diviser l'autre facteur.

15 divise le produit 45×28, 15 est premier avec 28, je dis qu'il divise 45.

En effet 15 et 28 sont premiers entre eux ce qu'on *exprime ainsi :*

28 et 15 ont pour plus grand commun diviseur 1; exprimons que 15 divise 28×45 ou 45×28, ce qui est le même produit, pour cela multiplions 28 par 45, mais en même temps nous multiplierons 15 par 45 et par suite 1 par 45, en un mot nous pourrons écrire 28×45 et 15×45 ont pour plus grand commun diviseur 1×45; or, 15 se divise lui-même, donc il divise 15×45 son multiple, par *hypothèse* il divise 28×45, donc il doit diviser 45.

Ce qu'il fallait démontrer.

On déduit de ce principe cette conséquence *que si un nombre premier absolu divise un produit de plusieurs facteurs, il doit diviser un des facteurs du produit.* 7 est premier absolu; s'il divise $21\times8\times15\times12$, il devra diviser un des facteurs du produit; en effet le produit des facteurs donnés peut être considéré comme un produit du facteur $21\times8\times15$ et du facteur 12, ce qui ramène au principe précédent, comme nous allons le voir.

7 étant premier absolu, s'il ne divise pas 12, c'est qu'il est premier avec 12; donc 7 devra diviser $21\times8\times15$.

Mais alors 7 devra diviser 21×8 ou 15; or il est premier avec 15, donc on voit enfin qu'il devra diviser 21. Ce qu'il fallait démontrer.

De là encore ce nouveau principe :

Un nombre n'est décomposable que d'une seule manière en facteurs premiers; ce qu'on énonce encore ainsi : deux nombres ne peuvent être égaux que s'ils sont composés de part et d'autre des mêmes facteurs premiers.

Par exemple 7 est l'un des facteurs premiers du premier produit, il divise donc ce produit; par suite on voit qu'il doit diviser le second produit qui est égal au premier; il doit donc diviser l'un des facteurs premiers de ce produit.

En effet, tout nombre qui en divise deux autres divise le reste de la division du plus grand par le plus petit; ce nombre divise donc à son tour le reste de la division du plus petit nombre et du reste; il divise donc ainsi tous les restes qu'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur entre les deux nombres donnés; donc il divise le dernier reste, c'est-à-dire le plus grand commun diviseur.

Prenons pour exemple :

174 et 48, 3 divise ces deux nombres; donc il divise 30 puis 18, puis 12, puis enfin 6. Ce qu'il faut démontrer.

11. Des considérations qui précèdent nous déduisons un des principes fondamentaux de l'arithmétique.

Principe : Si un nombre divise un produit de deux facteurs, et s'il est premier avec l'un des facteurs du produit, il doit diviser l'autre facteur.

15 divise le produit 45×28, 15 est premier avec 28, je dis qu'il divise 45.

En effet 15 et 28 sont premiers entre eux ce qu'on *exprime ainsi :*

28 et 15 ont pour plus grand commun diviseur 1; exprimons que 15 divise 28×45 ou 45×28, ce qui est le même produit, pour cela multiplions 28 par 45, mais en même temps nous multiplierons 15 par 45 et par suite 1 par 45, en un mot nous pourrons écrire 28×45 et 15×45 ont pour plus grand commun diviseur 1×45; or, 15 se divise lui-même, donc il divise 15×45 son multiple, par *hypothèse* il divise 28×45, donc il doit diviser 45. Ce qu'il fallait démontrer.

On déduit de ce principe cette conséquence *que si un nombre premier absolu divise un produit de plusieurs facteurs, il doit diviser un des facteurs du produit.* 7 est premier absolu; s'il divise $21 \times 8 \times 15 \times 12$, il devra diviser un des facteurs du produit; en effet le produit des facteurs donnés peut être considéré comme un produit du facteur $21 \times 8 \times 15$ et du facteur 12, ce qui ramène au principe précédent, comme nous allons le voir.

7 étant premier absolu, s'il ne divise pas 12, c'est qu'il est premier avec 12; donc 7 devra diviser $21 \times 8 \times 15$.

Mais alors 7 devra diviser 21×8 ou 15; or il est premier avec 15, donc on voit enfin qu'il devra diviser 21. Ce qu'il fallait démontrer.

De là encore ce nouveau principe :

Un nombre n'est décomposable que d'une seule manière en facteurs premiers; ce qu'on énonce encore ainsi : deux nombres ne peuvent être égaux que s'ils sont composés de part et d'autre des mêmes facteurs premiers.

Par exemple 7 est l'un des facteurs premiers du premier produit, il divise donc ce produit; par suite on voit qu'il doit diviser le second produit qui est égal au premier; il doit donc diviser l'un des facteurs premiers de ce produit.

Or un nombre premier n'est divisible que par lui-même ou l'unité, donc 7 se trouve parmi les facteurs premiers du second produit.

On peut débarrasser de ce facteur les deux produits égaux; les quotients ne peuvent avoir que des facteurs premiers égaux et ainsi de suite.

Donc les deux produits des facteurs premiers ne sont égaux que s'ils sont composés des mêmes facteurs premiers.

Si le nombre premier 7 est 3 fois dans le premier produit, il devra entrer aussi 3 fois dans le second: donc on a cet énoncé général : deux nombres égaux ne peuvent se décomposer que d'une seule manière en facteurs premiers; chacun d'eux élevé à des puissances égales de part et d'autre.

Si deux nombres sont premiers entre eux, toutes les puissances de ces deux nombres donnent de nouveaux nombres qui sont premiers entre eux.

On peut considérer le *plus grand commun diviseur entre deux nombres comme le produit des facteurs premiers communs à ces deux nombres.* Pour le prouver il suffit de démontrer *qu'en divisant deux nombres par leur plus grand commun diviseur les quotients obtenus sont premiers entre eux.*

En effet multiplions par ces deux quotients le plus grand commun diviseur, nous retrouvons pour produits les deux nombres donnés; mais en supposant que les deux quotients aient un facteur commun, pour multiplier le plus grand commun diviseur par les deux quotients, on pourrait le multiplier par le facteur commun des deux quotients et les produits par les autres facteurs de ces deux quotients, les deux nombres donnés auraient donc un diviseur commun plus grand que le plus grand commun diviseur supposé, ce qui est absurde, donc les deux quotients sont premiers entre eux.

12. Nous ferons encore deux remarques :

1° Pour qu'un nombre entier en divise un autre il faut qu'il ne contienne pas d'autres facteurs premiers que ceux contenus dans cet autre, et ces facteurs à des puissances plus élevées que celles auxquelles sont élevés les facteurs du dividende.

En effet le dividende est égal au diviseur multiplié par le quotient; donc le dividende contient, non-seulement tous les facteurs du diviseur, mais encore ceux du quotient, donc le diviseur ne renferme pas de facteurs premiers qui ne soient compris dans ceux du dividende.

La seconde remarque est pour ainsi dire la première un peu modifiée.

Pour qu'un nombre entier soit divisible par un autre nombre, il faut qu'il contienne les facteurs de cet autre élevés au moins à des puissances égales à celles des facteurs premiers contenus dans cet autre.

La démonstration précédente convient à cette remarque.

Ces remarques permettent de résoudre deux problèmes très-importants.

PREMIER PROBLÈME.

Trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres.

Ce plus grand commun diviseur est le produit de tous les facteurs premiers communs à tous les nombres, chacun d'eux élevé à la plus petite puissance à laquelle il soit élevé dans tous les nombres donnés, car d'après la définition il doit diviser tous les nombres, et il doit être le plus grand de tous les diviseurs communs.

Prenons pour exemple les quatre nombres décomposés en leurs facteurs premiers:

$$2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 7$$
$$2^3 \times 5^2 \times 11^3 \times 7^3$$
$$2^2 \times 5^6 \times 7^2$$
$$5^3 \times 2^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 7$$

Le plus grand commun diviseur est $2^2 \times 5^2 \times 7$.

En effet, il divise les quatre nombres, et s'il contenait d'autres facteurs, soit égaux, soit inégaux, il ne les diviserait pas tous.

On emploie un autre procédé pour trouver le plus grand commun diviseur entre plusieurs nombres ; soit par exemple à trouver le plus grand commun diviseur entre les nombres 360, 504 et 693.

On cherche le plus grand commun diviseur entre 360 et 504, puis on cherche le plus grand commun diviseur entre ce nombre obtenu et 693, et le plus grand commun diviseur obtenu est le plus grand commun diviseur demandé. En effet ce nombre divise 693 et le plus grand commun diviseur entre 504 et 360; donc il divise les trois nombres; mais le plus grand commun diviseur entre les trois nombres doit diviser le dernier plus grand commun diviseur obtenu dans ce nombre, il est bien le plus grand commun diviseur demandé, car ces deux plus grands communs diviseurs se divisent l'un l'autre. Ainsi il faut trouver le plus grand commun diviseur entre les deux premiers, chercher le plus grand commun diviseur entre ce nombre obtenu et le troisième, puis le plus grand commun diviseur entre ce nombre obtenu et le quatrième, et ainsi de suite.

DEUXIÈME PROBLÈME.

Trouver le plus petit nombre exactement divisible par plusieurs nombres, ou, en d'autres termes, *trouver le plus petit multiple de plusieurs nombres donnés*.

Ce plus *petit* multiple doit renfermer tous les facteurs premiers contenus dans les nombres donnés, et il ne doit contenir que ces facteurs premiers pour être le plus petit possible, d'où cette règle :

Les nombres donnés étant décomposés en leurs facteurs premiers le plus petit multiple est le produit de tous les facteurs premiers contenus dans les nombres, chacun d'eux pris avec le plus haut exposant avec lequel il se trouve dans les nombres donnés.

Prenons les mêmes nombres que ceux du problème précédent :

$$2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 7$$
$$2^3 \times 5^2 \times 11^3 \times 7^3$$
$$2^2 \times 5^6 \times 7^2$$
$$5^3 \times 2^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 7$$

Le plus petit multiple est $2^4 \times 3^2 \times 5^6 \times 7^3 \times 11^3 \times 13 + 17$.

Nous voyons par là qu'il est utile de savoir décomposer un nombre en ses facteurs premiers. Mais pour cela il faut connaître une *table des nombres premiers*. Voici le procédé qu'on emploie pour former une table de nombres premiers compris entre 1 et 1000 par exemple : (Crible d'Ératosthène) on écrit la suite naturelle des nombres impairs après 2 car tous les nombres pairs sont divisible par deux.

De cette manière :

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \underline{9},\ 11,\ 13,\ \underline{15},\ 17,\ 19,\ \underline{21},\ 23,\ \underline{25},\ \underline{27},\ 29,\ \text{etc.},\ 997,\ 999$$

On compte de 3 en 3 à partir de 3, ainsi on trouve 9 que l'on souligne, puis 15, puis 21, etc., tous ces nombres sont divisibles par 3 ; car si l'on tenait compte des nombres pairs, c'est comme si l'on comptait encore de 6 en 6 à partir de 3. On compte ensuite à partir de 5, de 5 en 5, puis à partir de 7, de 7 en 7, puis de 11 en 11, et ainsi de suite en ne tenant pas compte des nombres soulignés ; tous les nombres qui n'ont pas été soulignés ainsi sont des nombres premiers absolus ; car d'après les suppressions faites, aucun des nombres qui restent ne peut être multiple des nombres premiers qui précèdent.

Quand on n'a pas une table des nombres premiers, il peut être utile de savoir comment on peut reconnaître si un nombre est premier absolu ou non.

Cherchons par exemple si le nombre 641 est premier absolu.

Il est naturel de penser qu'il faudra essayer toutes les divisions de 641 par les nombres premiers plus petits que 641 ; cependant une remarque prouvera que cela n'est pas nécessaire.

Quand une division donne pour quotient un nombre entier, le *quotient* est aussi bien un *diviseur* du dividende que le *diviseur* lui-même.

Or, admettons que cherchant les diviseurs de 641 sans qu'on ait pu en trouver encore, on soit parvenu à un quotient plus petit que le diviseur, et qu'il y ait un reste ; je dis que 641 sera premier ; en effet en essayant les nombres plus grands que le diviseur, on trouvera un quotient plus petit que le précédent ; or si ce quotient était obtenu sans reste, il serait diviseur de 641, il serait plus petit que les nombres essayés d'abord, ce qui est contraire à la supposition ; ainsi 641 serait premier.

On trouve en effet qu'en divisant 641 par 29 sans avoir encore rencontré de diviseurs, le quotient est 22 avec un reste 3.

$$\begin{array}{r|l} 641 & 29 \\ \cline{2-2} 61 & 22 \\ 3 & \end{array} \qquad 641=29\times22+3$$

13. Pour terminer les problèmes relatifs à cette partie de l'arithmétique, il nous en reste deux à résoudre :

1° Décomposer un nombre en ses facteurs premiers.

2° Trouver tous les diviseurs d'un nombre et le nombre de ces diviseurs.

1° Soit donné le nombre 5040, pour mettre de l'ordre dans cette opération nous prendrons les facteurs premiers successifs 2, 3, 5, 7, etc., sous le nombre 5040 nous écrirons le premier quotient et à droite le premier diviseur, puis nous opérerons sur le quotient comme sur le nombre donné et ainsi de suite. On écrit d'abord 1.

$$\begin{array}{r|l} 5040 & 1 \\ 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

5040 est donc égal à $2^4\times3^2\times5\times7$.

2° Tous les diviseurs de 5040 ne pourront se composer que des facteurs 2, 3, 5, 7, combinés entre eux un à un, deux à deux, etc.

Pour trouver tous ces diviseurs on dispose les facteurs sur plusieurs lignes horizontales en commençant dans chacune de ces lignes par 1, puis par le facteur ; ensuite, ce facteur élevé à la puissance 2 s'il y a lieu, puis à la puissance 3, etc.

On multiplie ensuite tous les nombres de la première ligne par ceux de la seconde, puis les produits obtenus par les nombres de la troisième ligne, et ainsi de suite.

Indiquons ces opérations :

$$5040=2^4\times3^2\times5\times7$$

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4 \\ 1,\ 3,\ 3^2 \\ 1,\ 5 \\ 1,\ 7 \end{array}$$

Ainsi, on multipliera 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4 par 1, ce qui donne ces nombres eux-mêmes ; puis on multiplie cette première ligne par 3, et cette première ligne même par 3^2. Ces trois séries de produits étant obtenues, on les multiplie par 1 et par 5, et ainsi de suite.

On a de cette manière :

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4;\ 1\times3,\ 2\times3,\ 2^2\times3,\ 2^3\times3,\ 2^4\times3;$$
$$1\times3^2,\ 2\times3^2,\ 2^2\times3^2,\ 2^3\times3^2,\ 2^4\times3^2;$$
$$1\times5,\ 2\times5,\ 2^2\times5,\ 2^3\times5,\ 2^4\times5;\ 3\times5,\ 2\times3\times5,\ \text{etc.}$$

Tous ces produits sont différents, parce qu'ils se composent de facteurs premiers différents, ou des mêmes facteurs premiers élevés à des puissances différentes.

Au moyen de cette indication, on peut trouver le nombre de tous les diviseurs, en y comprenant 1 et 5040.

Ce nombre est égal au produit qu'on obtient, en multipliant entre eux les exposants des facteurs premiers, chacun d'eux étant augmenté d'une unité, ce sera alors : $(4+1)\ (2+1)\ (1+1)\ 1+1)$.

En effet, la première ligne donne 5 diviseurs : en multipliant par chacun des nombres de la seconde ligne, on obtient à chaque fois 5 diviseurs ; on obtient donc 3 fois 5 diviseurs, c'est-à-dire 15. Ces diviseurs, multipliés par chacun des nombres de la troisième ligne, donnent autant de fois 15 diviseurs qu'il y a de nombres dans cette troisième, c'est-à-dire 2, et ainsi de suite.

On voit que l'unité placée en tête de chaque ligne horizontale est indispensable ; car, sans cette précaution, on n'aurait que des facteurs composés, et point de facteurs simples.

Ainsi, 5040 aura 60 diviseurs, en y comprenant 1 et 5040.

On dispose les diviseurs autrement, en se servant de la décomposition en facteurs premiers :

5040	1	1
2520	2	2
1260	2	4
630	2	8
315	2	16
105	3	3, 6, 12, 24, 48
35	3	9, 18, 36, 72, 144
7	5	5, 10, 20, 40, 80, 15, 30, 60, etc.
	7	7, 14, 28, 56, 112, 21, 42, etc.

14. La décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers conduit à chercher si un nombre est divisible par 2, par 3, par 5, par 7, par 11, etc.

D'un autre côté, il est utile dans bien des cas, par exemple dans la recherche du plus grand commun diviseur par le procédé de la division, de reconnaître si un nombre est divisible par les nombres simples 1, 2, 3, 4, 5, 6, jusqu'à 30. On cherche ces caractères pour tous ces nombres, excepté pour 13, 17, 19, 23 et 29.

Nous savons, au reste, que pour qu'un nombre soit divisible par un autre, il faut qu'il soit divisible par les facteurs premiers de cet autre.

Nous pouvons démontrer aussi ce nouveau principe, que si un nombre est divisible séparément par des nombres qui sont tous premiers entre eux, il est divisible par le produit de ces nombres.

Si un nombre 5040 est divisible par 8, par 3, par 5 et par 7, je dis qu'il est divisible par leur produit : $8 \times 3 \times 5 \times 7$.

En effet :

$$5040 = 8 \times 315$$

Mais 5040 est divisible par 3, donc 8×315 est divisible par 3; or, 3 est premier avec 8, donc 3 doit diviser 315; ainsi, j'ai $315 = 3 \times 105$; par suite, $5040 = 8 \times 3 \times 105$.

On trouverait que 105 doit être divisible par 5, etc., donc 5040 est égal à $(8 \times 3 \times 5 \times 7) \times 3$, donc 5040 est divisible par le produit $8 \times 3 \times 5 \times 7$. Ce qu'il fallait démontrer.

CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ.

15. *Un nombre est divisible par 2 quand son dernier chiffre à droite est 0 ou un chiffre pair.*

En effet, 10 est égal à 2×5. Tout nombre de dizaines est donc divisible par 2; mais tout nombre de plus d'un chiffre est décomposable en dizaines et en unités; ce nombre de dizaines est divisible par 2; donc, si le chiffre des unités est divisible par 2, le nombre lui-même sera divisible par 2.

Un nombre est divisible par 4 quand le nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite est divisible par 4, ou bien, quand ces deux derniers chiffres sont deux 0.

En effet, $100 = 4 \times 25$; ainsi, tout nombre de centaines est divisible par 4. Or, tout nombre plus grand que 100 peut se décomposer en centaines et en un nombre formé des deux derniers chiffres à droite; donc, si ce nombre est divisible par 4, le nombre lui-même sera divisible par 4.

Exemple : $5728 = 5700 + 28$.

En remarquant : 1° que 1000 est divisible par 8,
2° que 10000 est divisible par 16,
on trouverait le caractère de divisibilité par 8 et par 16.

Si un nombre est terminé à droite par 0 ou 5, il est divisible par 5.

En effet, $10 = 5 \times 2$.

Tout nombre de dizaines est donc divisible par 5, donc, etc.

Si un nombre est terminé à droite par deux zéros ou par un nombre de deux chiffres divisible par 25, le nombre sera divisible par 25.

En effet, $100 = 25 \times 4$, etc.

Faisons observer l'analogie qui existe entre les caractères de divisibilité par 2 et 5, 4 et 25, 8 et 125, 16 et 625; cela tient à ce que :

$$10 = 2 \times 5$$
$$100 = 10^2 = 2^2 \times 5^2 = 4 \times 25$$
$$1000 = 10^3 = 2^3 \times 5^3 = 8 \times 125$$
$$10000 = 10^4 = 2^4 \times 5^4 = 16 \times 625$$

Il serait naturel de donner le caractère de divisibilité d'un nombre par 3. On déduit ce caractère de celui de la divisibilité par 9. Nous commencerons donc par trouver le caractère de divisibilité par 9.

10 est un multiple de 9 plus 1, 100 est égal à 99 plus 1 ; 100 est donc un multiple de 9 plus 1.

En général, si de l'unité, suivie de tant de zéros qu'on voudra, on retranche 1, on trouve pour reste autant de 9 qu'il y avait de zéros dans le nombre; donc, en général, l'unité, suivie d'un certain nombre de zéros, est un multiple de 9 plus 1. 2 fois 10 ou 20 est un multiple de $9 + 2$; 3 fois 10 ou 30 est un multiple de $9 + 3$.

400 est un multiple de $9 + 4$
5000 est un multiple de $9 + 5$

En général, tout chiffre suivi d'un certain nombre de zéros est un multiple de 9, plus ce chiffre.

Soit à reconnaître si le nombre 5463 est divisible par 9, ce nombre est décomposable de la manière suivante :

5000	est un multiple de	9 plus	5
400	id.	id.	4
60	id.	id.	6
3	id.	id.	3

En faisant la somme d'une manière convenable, on trouve que 5463 est égal à la somme de 4 multiples de 9, plus la somme des chiffres significatifs du nombre, c'est-à-dire à 18. Si 18 est divisible par 9, le nombre sera divisible par 9, d'ou cette règle :

Si la somme des chiffres significatifs est 9 ou multiple de 9, le nombre sera divisible par 9.

Pour l'application, on opère sur la somme des chiffres significatifs comme sur le nombre lui-même.

Le procédé général employé pour reconnaitre les caractères de divisibilité par un nombre, consiste à décomposer les nombres en multiples du diviseur essayé, puis à mettre à part les restes successifs.

Ainsi, nous avons dit :

$$5000 = \text{M}^{\text{e}} \text{ de } 9 + 5$$
$$400 = \text{M}^{\text{e}} \text{ de } 9 + 4, \text{ etc.}$$

Or, on conçoit que toutes les fois qu'en faisant la somme des parties non divisibles, on trouve un multiple de 9, on pourra le réunir à ceux déjà considérés.

Mais cette manière d'opérer sera très-simple, car en faisant la somme des chiffres successifs du nombre, on trouvera en général un nombre de deux chiffres.

Prenons un exemple :

5542752816

Nous dir ons : 6 et 1 font 7 et 8 font 15 ; au lieu de retrancher 9 de 15, nous dirons : 1 et 5 font 6 ; on continuera en disant : 6 et 2 font 8, 8 et 5 font 13 ; 1 et 3 font 4, 4 et 7 font 11 ; 1 et 1 font 2, 2 et 2 font 4, 4 et 4 font 8, 8 et 5 font 13 ; 1 et 3 font 4 et 5 font 9.

Ce nombre est donc divisible par 9.

Quand la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3, ce nombre est divisible par 3.

En effet, 3 est diviseur de 9. Or, un nombre peut se décomposer en deux parties, l'une divisible par 9, l'autre formée de la somme des chiffres significatifs, mais la partie divisible par 9 est divisible par 3 ; donc, si la somme des chiffres significatifs est divisible par 3, le nombre donné sera divisible par 3.

Prenons pour exemple : 5232

On dira, en négligeant le chiffre 3 : 2 et 2 font 4, si on retranche 3, il reste 1 ; au lieu de dire : 1 et 5 font 6, on retranche 3 de 5, ce qui donne 2 ; 2 et 1 font 3 ; avec un peu d'habitude, cette manière d'appliquer les règles ci-dessus simplifie beaucoup les calculs.

16. Le caractère de divisibilité par 11 est un peu plus compliqué ; cependant encore, dans ce cas, une remarque permet d'effectuer les calculs d'une manière rapide.

Prenons le nombre de deux chiffres, 37.

Pour trouver le reste de la division de 37 par 11, je retranche 3 de 7, ce qui donne 4.

Pour le démontrer, je remarque que 10 est égal à 11, diminué de 1 ; 20 est un multiple de 11, diminué de 2 ; 30 est un multiple de 11, diminué de 3 ; en un mot, au lieu de 30, je puis prendre 33, diminué de 3 ; mais 37 est égal à 30 plus 7, c'est-à-dire à 33 moins 3 plus 7, ou bien à un multiple de 11 plus 7 moins 3, c'est-à-dire à 7 moins 3 ou 4.

Prenons un autre exemple. Voyons quel est le reste de la division de 62 par 11 : il faudrait, d'après le caractère indiqué ci-dessus, retrancher 6 de 2, ce qui n'est pas possible. Mais on peut opérer autrement : 60 est égal à 5 fois 11 plus une fois 11 moins 6 ; donc le reste est égal à $11-6$ ou à 5.

Ainsi, 62 est un multiple de 11 plus 5 plus 2 ; donc le reste de la division de 62 par 11 est 7.

Faites la somme des chiffres de rang impair, faites la somme des chiffres de rang pair, retranchez cette dernière somme de la première, si cela est possible, si le reste est 0, 11 ou un multiple de 11, le nombre sera un multiple de 11.

Pour le démontrer, posons ces principes : l'unité suivie d'un nombre pair de zéros est un multiple de 11 plus 1.

L'unité suivie d'un nombre impair de zéros est un multiple de 11 moins 1.

Soit pris 100, si j'en retranche 1, je trouve 99, qui est égal à 9 fois 11.

Ainsi, 100 est un multiple de 11 plus 1.

1000 est égal à 9999 plus 1 ; or, 9999 = 9900 plus 99 ; 1000 est donc un multiple de 11 plus 1.

Et en général, si, de l'unité suivie d'un nombre pair de 0, je retranche 1, j'obtiens un nombre pair de 9 ; or, une série de couples de 9 écrits à la suite les uns des autres, donne toujours un multiple de 11 ; donc, enfin, l'unité suivie d'un nombre pair de 0 est un multiple de 11 plus 1.

En second lieu, si de l'unité suivie d'un nombre impair de zéros je retranche 10, j'obtiens une série de couples de 9 suivie d'un zéro. Or, l'unité suivi d'un nombre impair de zéros est égal à 10 plus un nombre *pair* de 9 sui i e zéro.

Ainsi : 1000 est égal à 990 plus 10
100000 id. 99990 plus 10
etc.

Donc, l'unité suivie d'un nombre impair de zéros est un multiple de 11 plus 10, ou bien est un multiple de 11 moins 1.

Soit pris le nombre 573428.

Il peut se décomposer comme il suit :

	plus	moins
500000 est un multiple de 11	. .	5
70000	7	. .
3000	. .	3
400	4	. .
20	. .	2
8	8	. .
	19	10

Le nombre 573428 est donc un multiple de 11, plus la somme des chiffres de rang impair, moins la somme des chiffres de rang pair.

Ainsi, nous avons à retrancher la somme des chiffre de la seconde colonne de la somme des chiffres de la première, c'est-à-dire, 10 de 19, le reste est 9, donc le nombre donné n'est pas divisible par 11, et le reste de la division de ce nombre par 11 est 9.

On opère ainsi : 573428. En commençant par la droite de deux en deux, on dit : 8 et 4 font 12, 2 moins 1 reste 1 ; 1 et 7 font 8.

En commençant au second chiffre à droite, et en poursuivant de deux en deux, on dit : 2 et 3 font 5, 5 et 5 font 10.

Je ne puis retrancher 10 de 8, mais alors je retranche 10 de 11, ce qui me donne 1, et j'ajoute 1 à 8, ce qui me donne 9.

Il est bien évident que j'ai pu prendre une fois 11 sur les multiples de 11, pour en retrancher la somme des chiffres de rang pair.

Prenons un autre exemple :

734289643

3 et 6 font 9 et 8, 17, 1 de 7 reste 6 ; 6 et 4 font 10, 10 et 7 font 17, 1 de 7 RESTE 6, je mets à part 6.

4 et 9 font 13, 1 de 3 reste 2 ; 2 et 2 font 4, 4 et 3 font 7, 7 de 11 reste 4 ; 4 *et* 6 *font* 10 ; le reste de la division du nombre donné par 11 est donc 10.

Les caractères de divisibilité par 9 et par 11 sont utiles surtout pour faire une preuve de la multiplication et de la division dite par 9 ou par 11, nous l'expliquerons bientôt.

17. Pour avoir le caractère de divisibilité d'un nombre par 7, nous poserons des principes analogues aux précédents.

Ainsi, nous dirons :

	1	est égal à		1
	10	est égal à	7 plus	3
	100	est un multiple de	7 plus	2
Puis maintenant,	1000	est un multiple de	7 plus	6
Ou plutôt,	1000	est un multiple de	7 moins	1
	10000	id.	moins	3
	100000	id.	moins	2
Et encore	1000000	id.	plus	1

Nous voyons les mêmes restes 1, 3, 2 se présenter périodiquement de 3 en 3 : mais les premiers sont additifs et les seconds sont soustractifs ; ainsi, nous sommes conduits à séparer le nombre donné en tranches de 3 chiffres, à partir de la droite.

Nous considérerons d'abord les tranches de rang impair, puis les tranches de rang pair ; dans chacune des tranches, on opère comme il suit :

Le premier chiffre à droite est multiplié par		1
Le second	id.	3
Le troisième	id.	2

On fait la somme de ces trois produits.

On fait ensuite la somme des sommes partielles provenant des tranches de rang impair, et on en retranche la somme provenant de celles des tranches de rang pair; si le reste est 0, 7 ou un multiple de 7, le nombre est divisible par 7.

Mais là encore nous verrons qu'on peut faire de grandes simplifications.

Soit pris pour exemple le nombre 32,648,535.

Opérons comme il a été dit d'abord :

Tranches de rang impair.	5×1	5	
	3×3	9	
	5×2	10	
		24	24
	2×1	2	
	3×3	9	
		11	11
1re somme générale. . . .			35
Tranche de rang pair.	8×1	8	
	4×3	12	
	6×2	12	
		32	
2e somme générale. . . .			32

Je retranche la deuxième somme de la première, et j'obtiens pour reste 3; le nombre n'est donc pas divisible par 7, et le reste de la division, est 3.

Mais on pourrait simplifier beaucoup en se servant de cette considération qu'il faut retrancher 7 à mesure qu'on le rencontre dans le calcul indiqué; par exemple, quand je trouve 9, je puis en retrancher immédiatement 7, et il me reste 2. C'est là, même, ce qui est indiqué par la méthode générale, qui consiste à mettre à part tous les multiples de 7 que l'on rencontre; je dirai donc : 5 et 2 font 7, que j'ajoute à tous les multiples de 7; puis je passe à 10, qui donne 3, car, d'après la règle, j'ai :

0×1 ou 0; 1×3 ou 3; 3 et 2 font 5; en continuant. Au lieu de prendre 9, je prends 2, que j'ajoute à 6, j'obtiens 7, que je puis ajouter aux multiples de 7.

Maintenant, je passe à la tranche de rang pair, et je dis : 8 moins 7 reste 1; 4×3 donne 12, c'est-à-dire, 2 et 3 donnent 5, et 1 font 6; j'ai encore 6×2 ou 12, d'où 5, 5 et 6 font 11, d'où 4; donc le nombre donné n'est pas divisible par 7, et pour avoir le reste, il faut retrancher de 7, ce qui donne 3.

Quand un nombre n'est pas divisible par 2, 4, 5, 9, 11, le reste de la division s'obtient d'une manière abrégée, comme on l'a pu remarquer, et comme il est toujours utile de vérifier le produit d'une multiplication ou le quotient d'une division, on fait *une preuve dite par 9 ou par 11*.

Elle est fondée sur ce principe :

Si deux nombres divisés par un même diviseur donnent deux restes, et si l'on multiplie entre eux ces deux restes, en divisant le produit des deux nombres donnés par le même diviseur, on devra obtenir le même reste que celui que donnerait la division du produit des deux premiers restes par le même diviseur.

$$3457 = \text{M}^{\text{ple}}\ 9 + 1$$
$$645 = \text{M}^{\text{ple}}\ 9 + 6$$
$$\text{Produit.}\ \ldots\ 2238765 = \text{M}^{\text{ple}}\ 9 + 6$$
$$6 = 1 \times 6$$

En effet, les deux facteurs du produit peuvent être considérés comme des multiples du diviseur augmentés de leurs restes correspondants.

Ainsi, chaque facteur est composé de deux parties, le produit se composera donc de 4 parties, les trois premières seront des multiples du diviseur; par suite, la quatrième seulement pourra donner un reste qui sera égal au reste donné par le produit des deux premiers restes divisé par 9.

Ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on remarque que le dividende est égal au diviseur multiplié par le quotient, on verra que l'on peut vérifier une division en se servant des restes du dividende, du diviseur et du quotient divisés par 9 ou par 11.

Si une division donne un reste, on retranche ce reste du dividende, et l'on obtient trois nombres qui permettent d'appliquer *la preuve dite par 9 ou par 11*.

Nous avons vu que si un nombre admet deux diviseurs premiers entre eux, il est divisible par leur produit et réciproquement; ainsi, nous pouvons dire que si un nombre est divisible par 2 et par 9, il est divisible par 9×2 ou 18; que si un nombre doit être divisible par 6, il doit être divible par 3 et par 2.

LIVRE DEUXIÈME.

FRACTIONS ORDINAIRES, FRACTIONS DÉCIMALES, RAPPORTS ET PROPORTIONS.

18. Nous savons que l'unité est le sixième de 6.

Nous pouvons concevoir que l'unité est 6 fois plus grande qu'un autre nombre, ce nombre sera donc le sixième de 1 ; de là l'origine des fractions.

On compte par sixièmes comme on compte par unités, on dit donc un sixième, deux sixièmes, trois sixièmes, etc. ; six sixièmes forment une unité d'après la définition.

Une fraction est une ou plusieurs parties égales de l'unité. Deux termes servant à désigner une fraction, l'un indique en combien de parties égales *on a divisé* l'unité, c'est le dénominateur, l'autre indique *combien* on prend de ces parties, c'est le numérateur. On sépare le numérateur du dénominateur par un trait placé sous le numérateur. Ainsi $\frac{5}{7}$ est 5 fois la 7e partie de l'unité, ou plus simplement les cinq septièmes de l'unité. L'usage a consacré les expressions moitié ou demie pour un deuxième ; tiers, pour un troisième ; quart, pour un quatrième.

De cette définition d'une fraction, on peut conclure que si une division donne un reste, on peut compléter le quotient par une fraction dont le numérateur serait le reste, le dénominateur étant le diviseur de la division.

Par exemple je divise 31 par 7, j'ai pour quotient 4 et pour reste 3, il fallait prendre le 7e de 31, je prendrai donc le 7e de 3, le quotient est donc 4 plus $\frac{3}{7}$.

Comparaison des fractions entre elles.

19. Deux fractions ont même numérateur, laquelle est la plus grande ?

Évidemment c'est la fraction dont le dénominateur est le plus petit : par exemple, pour $\frac{3}{7}$ et $\frac{3}{11}$, il suffit de comparer $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{11}$; or il faut 11 onzièmes pour former l'unité, tandis qu'il ne faut que 7 septièmes pour obtenir cette unité, ainsi $\frac{1}{7}$ est plus grand que $\frac{1}{11}$.

Et, en général, on peut dire que si dans une fraction le dénominateur augmente (le numérateur restant le même), la fraction diminue. La réciproque est vraie, ainsi quand le dénominateur d'une fraction diminue, la fraction augmente.

Deux fractions ont même dénominateur, la plus grande est évidemment celle qui a le plus grand numérateur. Ainsi $\frac{3}{7}$ est plus petit que $\frac{5}{7}$; car 3 est plus petit que 5. Ainsi quand le numérateur d'une fraction augmente ou diminue, la fraction augmente ou diminue en même temps que son numérateur.

Il est naturel de chercher ce que devient une fraction, quand son numérateur devient 2, 3, 4 fois plus grand, en général quand le numérateur est multiplié par un nombre, et aussi ce que devient une fraction quand le dénominateur est multiplié par un nombre.

Ces remarques nous permettront de composer deux fractions qui n'ont aucun terme commun.

Soit prise la fraction $\frac{3}{7}$.

Si j'ajoute $\frac{3}{7}$ et $\frac{3}{7}$, j'aurai évidemment $\frac{6}{7}$ qui sera double de $\frac{3}{7}$; en un mot, puisque l'on compte par 7es, comme on compte par unités, il en résulte qu'en rendant le numérateur un certain nombre de fois plus grand, la fraction est rendue ce même nombre de fois plus grande.

Ainsi en multipliant le numérateur par un nombre, la fraction est multipliée par ce nombre.

Inversement, si l'on divise le numérateur par un nombre, la fraction est divisée par ce nombre. Prenons pour exemple $\frac{18}{29}$, si je divise 18 par 2 j'aurai $\frac{9}{29}$ qui est moitié de $\frac{18}{29}$, puisque $\frac{18}{29}$ est double de $\frac{9}{29}$, etc.

Supposons maintenant que le dénominateur d'une fraction soit rendu 2, 3, 4 fois plus grand : prenons pour exemple $\frac{5}{9}$, je multiplie 9 par 2, et je trouve la fraction $\frac{5}{18}$.

Il faut comparer $\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{18}$, or il faut deux fois plus de 18èmes pour former l'unité qu'il ne faut de 9èmes, donc $\frac{1}{18}$ est 2 fois plus petit que $\frac{1}{9}$.

Je multiplie 9 par 3, j'obtiens la fraction $\frac{5}{27}$. Mais $\frac{1}{27}$ est 3 fois plus petit que $\frac{1}{9}$, donc $\frac{5}{27}$ est trois fois plus petit que $\frac{5}{9}$.

Donc, en général, en multipliant le dénominateur d'une fraction par un nombre entier, la fraction est rendue ce même nombre de fois plus petite, et par suite elle est divisée par ce nombre; donc alors *pour diviser une fraction par un entier, il suffit de multiplier son dénominateur par cet entier.*

Si inversement on divise le dénominateur d'une fraction par un nombre, la fraction est rendue ce même nombre de fois plus grande, en un mot elle est multipliée par ce nombre. Soit prise la fraction $\frac{12}{35}$, je divise 35 par 5, j'obtiens 7 et la fraction devient $\frac{12}{7}$.

La fraction $\frac{12}{35}$ est 5 fois plus petite que $\frac{12}{7}$, donc $\frac{12}{7}$ est 5 fois plus grand que $\frac{12}{35}$, ce qu'on voulait faire voir.

Ainsi, en résumé, nous avons deux moyens de rendre une fraction un certain nombre de fois plus grande.

Nous avons aussi deux moyens de la rendre un certain nombre de fois plus petite.

Exemple : $$\frac{15}{36}.$$

Si je multiplie 15 par 2, j'obtiens $\frac{30}{36}$, qui est deux fois plus grand que $\frac{15}{36}$; mais si je divise 36 par 2, j'obtiens $\frac{15}{18}$, qui est aussi deux fois plus grand que $\frac{15}{36}$. On peut raisonner de la même manière pour les autres cas, il faut toutefois observer que la division n'est pas toujours applicable.

Il résulte des principes qui précèdent, que si l'on multiplie les deux termes d'une fraction par un même nombre, la fraction ne change pas de valeur, ainsi en indiquant sans les effectuer les opérations, nous trouvons que $\frac{5\times3}{7\times3}$ est égal à $\frac{5}{7}$; car en multipliant le numérateur par 3, la fraction est rendue 3 fois plus grande ; d'autre part, en multipliant le dénominateur par 3, la fraction est rendue 3 fois plus petite, elle n'a donc pas changé de valeur.

Une fraction ne change pas de valeur, quand on divise ses deux termes par un même nombre, ce qui conduit à simplifier une fraction quand on aperçoit un *facteur commun* aux deux termes (voir à la fin des fractions pour toutes les simplifications et les principes sur les fractions irréductibles).

Comparons donc entre elles deux fractions qui n'ont point de terme commun, par exemple $\frac{3}{7}$ et $\frac{2}{5}$, multiplions les deux termes de $\frac{3}{7}$ par 5, nous obtenons $\frac{3\times5}{7\times5}$, fraction égale à $\frac{3}{7}$; multiplions les deux termes de $\frac{2}{5}$ par 7, nous obtenons $\frac{2\times7}{5\times7}$, fraction égale à la seconde; ainsi nous avons les deux fractions $\frac{3\times5}{7\times5}$ et $\frac{2\times7}{5\times7}$ qui ont même dénominateur; on peut donc les comparer, et par suite on en déduit que :

Pour réduire deux fractions au même dénominateur, il suffit de multiplier les deux termes de chacune d'elles par le dénominateur de l'autre.

20. Voyons comment on peut réduire 3 fractions au même dénominateur, nous nous appuierons sur le cas précédent.

Soient les 3 fractions

$$\frac{2}{8},\ \frac{2}{5} \text{ et } \frac{7}{9}.$$

Je réduis au même dénominateur les deux premières, j'obtiens alors $\frac{3\times5}{8\times5}$ et $\frac{2\times8}{5\times8}$; au lieu des 3 premières fractions, je puis prendre les trois suivantes

$$\frac{3\times5}{8.5},\ \frac{2\times8}{5.8} \text{ et } \frac{7}{9}.$$

Je réduis au même dénominateur, la première et la troisième, je trouve évidemment $\frac{3\times5\times9}{8\times5\times9}$ et $\frac{7\times(8.5)}{9\times(8.5)}$, d'où la règle suivante :

pour réduire trois fractions au même dénominateur, il *suffit de multiplier les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs des deux autres.*

On voit ainsi que tous les dénominateurs seront formés des mêmes facteurs : ces facteurs ne seront pas d'ailleurs écrits dans le même ordre.

Il est naturel d'étendre cette règle à un nombre quelconque de fraction.

Ainsi pour réduire plusieurs fractions à un même dénominateur, il suffit de multiplier les deux termes de chaque fraction, par le produit des dénominateurs de toutes les autres.

Nous verrons bientôt que l'on peut opérer d'une manière plus simple.

Addition des fractions.

21. La définition est la même que la définition de l'addition des nombres entiers.

Il y a trois cas à considérer :

1° Les fractions ont le même dénominateur;

2° Les fractions ont des dénominateurs différents.

Enfin 3° les fractions sont unies à des entiers. En un mot on peut avoir à ajouter entre eux, des nombres fractionnaires, ou bien des fractions à des nombres fractionnaires.

1° Pour ajouter les fractions $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{7}$, il suffit d'ajouter entre eux les numérateurs, et de donner pour dénominateur à la somme obtenue le dénominateur commun.

Ainsi, nous aurons $\frac{3+2+1}{7}$, c'est-à-dire $\frac{6}{7}$.

Prenons un autre exemple :

$$\frac{5}{9}+\frac{4}{9}+\frac{2}{9}+\frac{6}{9}.$$

On trouve, en faisant la somme des numérateurs, $\frac{17}{9}$; mais 17 est plus grand que 9; on peut donc diviser 17 par 9 et trouver un quotient entier; on trouve 1 pour quotient entier, et pour le compléter, on trouve $\frac{8}{9}$; ainsi, $\frac{17}{9}$ est égal à $1+\frac{8}{9}$.

Cette opération est nommée extraction de l'entier d'une fraction; pour extraire l'entier d'un nombre fractionnaire, il faut diviser le numérateur par le dénominateur, le quotient sera l'entier, le reste sera le numérateur de la fraction qui complète l'entier.

Par exemple, en extrayant l'entier de $\frac{34}{9}$, on trouve 3 et $\frac{7}{9}$.

Inversement, pour réduire un entier en fraction, il faut multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction à obtenir, et donner pour dénominateur à ce produit le dénominateur donné.

Ainsi, pour réduire 7 en 5^{mes}, j'écris : $\frac{7 \times 5}{5}$ ou bien $\frac{35}{5}$

2° Si les dénominateurs des fractions sont différents, on réduit toutes les fractions au même dénominateur, puis on opère comme dans le premier cas.

Exemple : $\frac{3}{7}+\frac{4}{5}+\frac{5}{8}+\frac{2}{3}$.

L'opération terminée, il est toujours utile d'extraire l'entier de la somme, quand il y a lieu.

3° Pour l'addition des nombres fractionnaires, on peut, d'après la remarque que $\frac{18}{5}$, nombre fractionnaire est égal à $3+\frac{3}{5}$, faire l'addition des nombres fractionnaires de deux manières, soit en laissant les entiers ajoutés aux fractions; soit en extrayant les entiers partout où cela est possible; cela fait, on ajoute entre elles les fractions proprement dites, puis on extrait l'entier de cette somme s'il y a lieu; on ajoute ensuite cet entier à la somme de tous les entiers obtenus.

Exemples : 1er. $\frac{37}{8}+\frac{25}{7}+\frac{48}{5}+\frac{5}{6}$;

2^{e}. $4+\frac{5}{7}$, $2+\frac{3}{8}$, $5+\frac{2}{21}+\frac{7}{18}$

Soustraction des fractions.

22. La soustraction est l'inverse de l'addition; on en conclut donc immédiatement le procédé à suivre pour faire cette opération.

Si les deux fractions ont même dénominateur, on soustrait les numérateurs l'un de l'autre. Si les deux fractions n'ont pas le même dénominateur, on les réduit au même dénominateur, et on opère comme dans le premier cas.

Exemples :

$$\frac{15}{19} \text{ moins } \frac{3}{19};$$

$$\text{le reste est } \frac{15 \text{ moins } 3}{19}, \text{ c'est-à-dire, } \frac{12}{19}.$$

2° Retrancher $\frac{3}{7}$ de $\frac{4}{5}$. Réduisant au même dénominateur, nous trouvons $\frac{28}{35}-\frac{15}{35}=\frac{28-15}{35}$, effectuant on trouve $\frac{13}{35}$.

3° Les nombres peuvent être formés d'entiers et de fractions.

Alors, quand cela sera nécessaire, on empruntera une ou plusieurs unités sur l'entier du plus grand nombre.

Exemple : retrancher 3 et $\frac{2}{7}$ de 8 et $\frac{4}{7}$, le reste est évidemment 5 et $\frac{2}{7}$.

2° exemple : de 4 et $\frac{3}{5}$ retrancher 2 et $\frac{4}{5}$, je ne puis retrancher $\frac{4}{5}$ de $\frac{3}{5}$, j'emprunte 1 sur 4, 1 vaut $\frac{5}{5}$, je dirai donc $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{5}$ font $\frac{8}{5}$; de $\frac{8}{5}$ si je retranche $\frac{4}{5}$, il reste $\frac{4}{5}$, et alors je dis : 2 de 4 moins 1, ou de 3 reste 1. On pose l'opération ainsi :

$$\begin{array}{rr} & 4+\frac{3}{5} \\ & 2+\frac{4}{5} \\ \hline \text{reste} & 1+\frac{4}{5} \end{array}$$

3° exemple : $7+\frac{2}{9}$

$$3+\frac{8}{11}$$

Les fractions n'ayant pas même dénominateur, il faut les y réduire, ce qui donne $\frac{22}{99}$ et $\frac{72}{99}$, j'ai donc alors $7+\frac{22}{99}$ et $3+\frac{75}{99}$, ce qui ramène au cas précédent. Le reste est $3+\frac{79}{99}$.

Multiplication des fractions.

23. *Multiplier un nombre par un autre, c'est composer un nombre avec le premier, comme le second est composé avec l'unité.*

Ainsi, le produit doit être composé avec le multiplicande comme le multiplicateur est composé avec l'unité.

Dans la multiplication des fractions, trois cas principaux peuvent se présenter.

On peut avoir à multiplier 1° une fraction par un nombre entier; 2° un entier par une fraction; 3° une fraction par une fraction. Ce dernier cas comprend les deux autres.

Un autre cas doit être noté aussi, c'est celui dans lequel le multiplicande et le multiplicateur, ou seulement l'un d'eux, contiennent des entiers joints à des fractions.

Pour plus de simplicité, nous dirons encore une fois pour toutes que le *produit* se compose avec le multiplicande comme le multiplicateur se compose avec l'unité.

1° Soit $\frac{3}{5}$ à multiplier par 4, on écrit $\frac{3}{5}\times 4$.

Le produit doit se composer avec $\frac{3}{5}$ comme 4 est composé avec l'unité, or 4 est quatre fois plus grand que l'unité, donc le produit doit être quatre fois plus grand que $\frac{3}{5}$; on rend une fraction quatre fois plus grande en multipliant son numérateur par 4, ainsi le produit sera $\frac{3\times 4}{5}$, d'où la règle suivante : *pour multiplier une fraction par un nombre entier, il suffit de multiplier le numérateur par l'entier et de conserver le dénominateur* (1).

2° Un entier à multiplier par une fraction; soit $3\times\frac{5}{7}$.

$\frac{5}{7}$ est 5 fois le 7^e^ de l'unité, il faut donc prendre 5 fois le 7^e^ de 3.

---

(1) Voyons comment on a été conduit à nommer multiplication une pareille opération. Raisonnons sur un exemple :

Le prix d'un mètre de drap étant 28 fr., le prix de 3 mètres sera 28×3. Ainsi il faut multiplier le prix de l'unité par le nombre de ces unités pour avoir le prix demandé. *Par analogie*, on dira qu'il faut multiplier $\frac{8}{11}$ par $\frac{7}{9}$, si $\frac{8}{11}$ est le prix de l'unité et $\frac{7}{9}$ la quantité.

Le 7e de 3 d'après la définition est $\frac{3}{7}$, 5 fois $\frac{3}{7}$ est $\frac{3\times5}{7}$ d'après la règle précédente, ainsi $$3\times\frac{5}{7}=\frac{3\times5}{7}.$$

Donc : *pour multiplier un entier par une fraction, il suffit de multiplier l'entier par le numérateur, et de donner au produit pour dénominateur, le dénominateur de la fraction.*

3° Multiplier une fraction par une fraction, $\frac{5}{7}\times\frac{3}{8}$.

Il faut prendre les $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{7}$, c'est-à-dire 3 fois le huitième de $\frac{5}{7}$. Mais d'abord le 8e de $\frac{5}{7}$ doit être 8 fois plus petit que $\frac{5}{7}$, on obtient ce 8e en multipliant 7 par 8. Ainsi le 8e de $\frac{5}{7}$ est $\frac{5}{7\times8}$, il faut prendre 3 fois ce huitième, ce qu'on obtient en multipliant le numérateur 5 par 3. Ainsi
$$\frac{5}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{5\times3}{7\times8}.$$

Donc *pour multiplier une fraction par une fraction, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux, et les dénominateurs entre eux.*

Enfin, si des entiers sont joints à des fractions, il est naturel de ramener ce cas aux précédents, au moyen de ce principe que pour multiplier une somme par un nombre, il suffit de multiplier ses différentes parties par le nombre, et que, pour multiplier un nombre par une somme, il suffit de multiplier le nombre par les différentes parties de la somme, et d'ajouter les produits obtenus.

Exemple : soit $3+\frac{2}{7}$, à multiplier par $4+\frac{5}{9}$.

On obtiendra : 1° $3\times4+\frac{2\times4}{7}$,

2° $3\times\frac{5}{9}+\frac{2\times5}{7\times9}$,

puis on fera la somme de ces quatre nombres. En simplifiant le plus possible, on trouve $12+1+\frac{1}{7}+1+\frac{6}{9}+\frac{10}{63}$,

puis $14+\frac{1}{7}+\frac{2}{3}+\frac{10}{63}$ et $14+\frac{9+42+10}{63}$, enfin $14+\frac{61}{63}$, produit de $3+\frac{2}{7}$ multiplié par $4+\frac{5}{9}$.

24. Les principes relatifs aux facteurs d'un produit, peuvent s'étendre au cas où les facteurs sont des fractions ou des nombres fractionnaires. Ainsi on peut intervertir l'ordre des facteurs dans un produit de plusieurs fractions. Prenons les trois fractions $\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}\times\frac{11}{15}$.

Je dis que ce produit est égal à $\frac{11}{15}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}$; en effet, si nous effectuons les deux produits indiqués, nous obtenons $\frac{5\times3\times11}{7\times4\times15}$ et $\frac{11\times5\times3}{15\times7\times4}$.

Or les numérateurs de ces deux fractions sont composés des mêmes facteurs, il en est de même des dénominateurs; donc ces deux fractions sont égales; *ce qu'il fallait démontrer*.

Nous pouvons voir aussi que pour élever une fraction à une puissance, il suffit d'élever chaque terme de la fraction à cette puissance.

Soit à faire le carré de $\frac{5}{8}$; on a $\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{5\times5}{8\times8}$ ou bien $\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{5^2}{8^2}$; de même $\left(\frac{5}{8}\right)^3=\frac{5^3}{8^3}$.

Nous avons dit que multiplier un nombre par $\frac{5}{8}$, c'était en prendre les $\frac{5}{8}$, donc inversement prendre les $\frac{5}{8}$ d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par $\frac{5}{8}$. Ainsi prendre des fractions de fractions, c'est faire des multiplications de fractions.

Exemple : prendre les $\frac{3}{7}$ des $\frac{5}{8}$ des $\frac{4}{9}$ des $\frac{14}{15}$ de $\frac{6}{11}$, c'est faire la multiplication suivante: $\frac{6}{11}\times\frac{14}{15}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}$.

On commence par indiquer les calculs, et on simplifie en débarrassant le numérateur et le dénominateur de leurs facteurs communs, puis on effectue, quand on n'aperçoit plus de simplification à faire.

En se reportant à la définition de la multiplication, on peut savoir immédiatement si le produit est plus grand ou plus petit que le multiplicande; en effet, ce produit se compose avec le multiplicande, comme le multiplicateur se compose avec l'unité; donc, si le multiplicateur est plus grand ou plus petit que l'unité, le produit sera plus grand ou plus petit que le multiplicande.

Division des fractions.

25. La définition donnée pour les nombres entiers convient aussi pour les fractions. Ainsi, diviser un nombre par un autre, c'est trouver un troisième nombre qui, multiplié par le second, reproduise le premier.

Ainsi, le *dividende* se compose avec le *quotient* comme le *diviseur* se compose avec l'unité.

Il y a aussi trois cas à considérer dans la division des fractions.

1° Diviser une fraction par un nombre entier, $\frac{5}{7} : 3$

$\frac{5}{7}$ se compose avec le quotient comme 3 est composé avec l'unité; or, 3 est 3 fois plus grand que l'unité, donc $\frac{5}{7}$ est 3 fois plus grand que le quotient; ce quotient doit donc être 3 fois plus petit que $\frac{5}{7}$; pour rendre $\frac{5}{7}$ trois plus petit, il suffit de multiplier le dénominateur 7 par 3; ainsi,

$$\frac{5}{7} : 3 = \frac{5}{7 \times 3},$$

ce que nous savions déjà; d'où la règle suivante: pour diviser *une fraction par un entier, il suffit de multiplier le dénominateur par l'entier*.

2° Diviser un nombre entier par une fraction, $4 : \frac{7}{9}$.

4 se compose avec le quotient comme $\frac{7}{9}$ est composé avec l'unité. Il faut donc rappeler comment $\frac{7}{9}$ se compose avec l'unité; or, $\frac{7}{9}$ est 7 fois le 9^{me} de l'*unité*, donc, 4 est *sept* fois le 9^{me} du quotient

Une fois le 9^{me} du quotient sera donc sept fois plus petit que 4, c'est-à-dire sera $\frac{4}{7}$.

Ainsi, une fois le 9^{me} du quotient est égal à $\frac{4}{7}$; le quotient est égal à 9 fois le neuvième obtenu, il est donc égal à $\frac{4 \times 9}{7}$; en résumé, $4 : \frac{7}{9}$ est égal à $\frac{4 \times 9}{7}$.

Pour simplifier l'énoncé de la règle à suivre, on fait cette observation que $\frac{4 \times 9}{7}$ est égal à $4 \times \frac{9}{7}$; ainsi, $4 : \frac{7}{9} = 4 \times \frac{9}{7}$.

Donc, pour diviser un entier par une fraction, il suffit de multiplier l'entier par la fraction diviseur renversée.

3° Diviser une fraction par une fraction. Il est inutile d'examiner le cas où les dénominateurs sont les mêmes. Soit : $\frac{5}{7} : \frac{3}{8}$.

$\frac{5}{7}$ se compose avec le quotient comme $\frac{3}{8}$ est composé de l'unité.

$\frac{5}{7}$ est donc trois fois le 8me du quotient.

Une fois le 8me du quotient sera donc trois fois plus petit que $\frac{5}{7}$, c'est-à-dire, $\frac{5}{7\times3}$; 8 fois le 8me est 8 fois plus grand que $\frac{5}{7\times3}$, on obtient donc ce quotient en multipliant le numérateur par 8, ce qui donne $\frac{5\times8}{7\times3}$.

Or, $\frac{5\times8}{7\times3}$ est égal à $\frac{5}{7}\times\frac{8}{3}$; $\frac{8}{3}$ est égal à $\frac{3}{8}$ renversé.

Donc, *pour diviser une fraction par une fraction, il suffit de multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Il est facile de voir ce qu'il faut faire quand le diviseur est un entier uni à une fraction : on ramène aux cas précédents en formant un nombre fractionnaire.

Par exemple, au lieu de diviser 8 par $3+\frac{2}{7}$, je divise 8 par $\frac{23}{7}$, ce qui ramène au deuxième cas.

Le dividende est plus grand que le quotient quand le diviseur est plus grand que l'unité, et réciproquement.

En effet, le dividende se compose avec le quotient, comme le diviseur est composé avec l'unité.

C'est avec intention que nous avons répété souvent les définitions; c'est en général le seul moyen de résoudre les questions et de lever les difficultés qui se présentent, car il n'y a, en mathématiques, que des définitions, des conventions et des conséquences plus ou moins immédiates de ces deux choses.

Principes sur les fractions.

26. Nous pouvons maintenant nous arrêter sur des observations très-importantes à faire sur les fractions : elles ont pour but de *simplifier* le plus possible les fractions, de les réduire au plus petit dénominateur commun, etc.

Commençons par voir quel changement subit une fraction quand ses deux termes augmentent ou diminuent d'un même nombre d'unités.

Prenons un exemple :

Soit la fraction $\frac{5}{11}$.

Le complément de cette fraction à l'unité est $\frac{6}{11}$. Ce nombre 6 s'obtient en retranchant le numérateur 5 du dénominateur 11.

Ajoutons 2 unités au numérateur et au dénominateur, la fraction devient $\frac{7}{13}$; le complément de $\frac{7}{13}$ à l'unité est $\frac{6}{13}$, cette fraction a même numérateur que celui du complément $\frac{6}{11}$; *car le reste d'une soustraction ne change pas quand on ajoute une même quantité aux deux nombres de la soustraction.*

Or $\frac{6}{13}$ est plus petit que $\frac{6}{11}$, donc $\frac{7}{13}$ est plus grand que $\frac{5}{11}$. Cette démonstration convient à toutes les fractions dans lesquelles le numérateur est plus petit que le dénominateur; *ainsi une fraction augmente quand on ajoute le même nombre à ses deux termes.*

Inversement, quand on retranche un même nombre aux deux termes d'une fraction, elle diminue.

Par exemple, soit la fraction $\frac{8}{15}$, je retranche 3 unités des deux termes, j'obtiens $\frac{5}{12}$.

Or, si j'ajoute 3 unités aux deux termes de cette nouvelle fraction, je trouve $\frac{8}{15}$. Mais, d'après ce que nous venons de prouver, $\frac{8}{15}$ est plus grand que $\frac{5}{12}$, donc $\frac{5}{12}$ est plus petit que $\frac{8}{15}$; *ce qu'il fallait démontrer.*

Quand on donne un nombre fractionnaire, les principes contraires ont lieu.

Soit pris le nombre fractionnaire $\frac{28}{9}$.

$\frac{28}{9}$ surpasse l'unité de $\frac{19}{9}$ (on retranche le dénominateur du numérateur).

Ajoutons 4 aux deux termes de $\frac{28}{9}$, nous trouvons $\frac{32}{13}$; $\frac{32}{13}$ surpasse l'unité de $\frac{19}{13}$; or $\frac{19}{13}$ est plus petit que $\frac{19}{9}$, donc, *en ajoutant le même* *nombre aux deux termes d'un même nombre fractionnaire, ce nombre diminue.*

Si, *comme exercice*, on demande ce que devient une fraction dont les deux termes sont égaux, quand on ajoute à ces deux termes le même nombre, il est évident que la réponse est que la fraction reste toujours égale à l'unité, c'est-à-dire qu'elle ne change pas de valeur.

On peut se demander maintenant si l'on peut simplifier une fraction autrement qu'en supprimant les facteurs communs aux deux termes, et, par suite, si une fraction dont les deux termes sont premiers entre eux n'est pas *irréductible*.

Ainsi, on demande si une fraction dont les deux termes sont premiers entre eux peut être égale à une fraction dont les deux termes seraient plus simples.

Soit la fraction $\frac{15}{28}$ dont les deux termes sont premiers entre eux, supposons qu'elle soit égale à $\frac{12}{26}$; pour comparer ces deux fractions, qui n'ont pas le même dénominateur, réduisons-les au même dénominateur; nous obtiendrons $\frac{15\times26}{28\times26}$ et $\frac{12\times28}{28\times26}$. Or, ces deux fractions sont égales, elles ont le même dénominateur, donc leurs numérateurs sont égaux, ainsi 15×56 est égal à 12×28.

Cherchons à exprimer que 15 et 28 sont premiers entre eux, or 15 divise 15×26, il doit donc diviser le produit égal 12×28; or 15 est premier avec 28, donc 15 doit diviser 12, ce qui est absurde. On verrait de même que 28 doit diviser 26, ce qui est pareillement absurde. Il est donc absurde de supposer que $\frac{15}{28}$ est égal à une fraction plus simple $\frac{12}{26}$; on ferait le même raisonnement pour toute autre fraction à termes plus simples que $\frac{15}{28}$, ainsi $\frac{15}{28}$ est irréductible.

Donc, après avoir divisé les deux termes d'une fraction par leur plus grand commun diviseur, les quotients sont les deux termes de la fraction irréductible égale à la première.

En reprenant les indications de calculs ci-dessus, on doit conclure que si une fraction est égale à une fraction irréductible, chacun des termes de la première doit être divisible par le terme correspondant de la fraction irréductible égale; il y a plus, on peut démontrer que :

Si une fraction est égale à une fraction irréductible, les deux termes de la première sont les multiples de ceux de la seconde par un même nombre.

En effet, les deux termes de la première sont des multiples des termes correspondants de la seconde, donc ce sont les mêmes multiples, puisque les deux fractions sont égales.

De là ce principe: si deux fractions irréductibles sont égales, elles sont identiques, car les numérateurs doivent se diviser réciproquement, ce qui ne peut se faire que s'ils sont égaux entre eux. Il en est de même des dénominateurs.

On peut conclure encore de là que, si une fraction est irréductible, toutes les puissances de cette fraction sont irréductibles.

Cela est vrai aussi pour les nombres fractionnaires.

Nous avons vu en effet que si deux nombres sont premiers entre eux, toutes leurs puissances ne renfermant d'autres facteurs premiers que ceux que contiennent les nombres eux-mêmes, il n'y a pas de facteur commun aux deux puissances. Ces deux puissances sont donc premières entre elles.

27. Nous pouvons reprendre la question importante de la réduction des fractions au même dénominateur.

Nous avons vu qu'on pouvait le faire en multipliant les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs de toutes les autres fractions; mais on peut presque toujours opérer plus simplement.

Quand on veut réduire des fractions au même dénominateur, ces fractions étant supposées irréductibles, *on cherche le plus petit multiple de tous les dénominateurs des fractions données; le plus petit multiple sera le dénominateur commun le plus simple qu'on puisse obtenir.*

Les numérateurs des fractions s'obtiendront en multipliant chaque numérateur par le quotient du plus petit multiple trouvé, divisé par le dénominateur correspondant.

On voit en effet qu'ainsi les fractions seront transformées en des fractions égales qui auront même dénominateur; ce dénominateur sera le plus simple, car, de quelque manière qu'on réduise les fractions au même dénominateur, il faudra qu'il soit divisible par les dénominateurs de toutes les fractions données.

Exemples : $\frac{3}{28}, \frac{5}{18}, \frac{2}{45}, \frac{4}{21}, \frac{6}{35}$.

Par la première méthode, le dénominateur serait $28\times18\times45\times21\times35$, par notre procédé, le dénominateur est $2^2\times3^2\times7\times5$.

En effectuant on trouve pour le premier produit, le *dénominateur commun* 15669800. En effectuant le second produit, on trouve pour *dénominateur commun* 1260.

Les fractions données deviennent

$$\frac{3\times45}{28\times45}, \quad \frac{5\times70}{18\times70}, \quad \frac{2\times28}{45\times28}, \quad \frac{4\times60}{21\times60}, \quad \frac{6\times36}{35\times36}$$

Les dénominateurs sont indiqués seulement, car d'après la définition du dénominateur 1260, qui est le dénominateur commun, tous ces produits indiqués sont égaux à 1260.

Autre exemple.

Réduire au même dénominateur le plus simple :

$$\frac{5}{27},\ \frac{7}{48},\ \frac{2}{75},\ \frac{3}{49},\ \frac{4}{21},\ \frac{8}{15}$$

Fractions décimales.

28. Les fractions décimales sont celles dont les dénominateurs sont des puissances entières de 10, c'est-à-dire qui ont pour dénominateur l'unité suivie d'un ou de plusieurs zéros. Ainsi $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{9}{1000}$ sont des fractions décimales, on peut les écrire autrement au moyen d'une conséquence simple de la numération écrite.

En effet, tout chiffre placé à la gauche d'un autre, exprimant des unités de l'ordre immédiatement supérieur, inversement tout chiffre placé à la droite d'un autre, exprime des unités de l'ordre immédiatement inférieur. Ainsi prenons le nombre 548; 5 exprimant des centaines, 4 exprime des unités de l'ordre immédiatement inférieur, c'est à dire des dizaines, 8 exprime des dixièmes de dizaines, c'est-à-dire des unités; or prenons le nombre 648,3572 (la virgule placée à droite du chiffre 8 sert à séparer la partie entière de la partie fractionnaire), 3 exprime des dixièmes d'unités, c'est-à-dire des dixièmes, 5 exprime des dixièmes de dixièmes, c'est-à-dire des centièmes, 7 des millièmes, 2 des dix-millièmes.

Nous pouvons dire immédiatement que pour énoncer un nombre décimal (c'est-à-dire un nombre qui contient une partie entière et une partie décimale), *on fait abstraction de la virgule, on énonce le nombre entier qui en résulte, et on prend pour dénominateur de la fraction dont ce nombre serait le numérateur, l'unité, suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres à droite de la virgule.*

Pour démontrer que cette manière d'énoncer un nombre décimal est exacte, et pour pouvoir écrire un nombre décimal énoncé, posons deux principes.

1° *Si l'on recule la virgule d'un rang vers la droite, le nombre décimal est multiplié par* 10; en effet le chiffre des unités devient un chiffre de dizaines, le chiffre des dixièmes devient un chiffre d'unités, en un mot chaque partie du nombre est rendue dix fois plus grande; le nombre est donc rendue 10 fois plus grand. Et en général, si l'on recule la virgule à droite de deux, trois, etc., rangs, le nombre sera multiplié par l'unité, suivie de deux, trois, etc., zéros; donc si l'on supprime la virgule dans un nombre décimal, il sera multiplié par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans le nombre décimal.

2° *Si l'on avance la virgule d'un rang vers la gauche, le nombre décimal est rendu dix fois plus petit.*

En effet, chaque partie du nombre est rendue dix fois plus petite; par suite, si dans un nombre entier on sépare sur la droite par une virgule 1, 2, 3, etc., chiffres, le nombre entier sera divisé par 10, 100, 1000, etc.

Et en général, si dans un nombre entier on sépare sur la droite un certain nombre de chiffres, le nombre sera divisé par l'unité suivie d'autant de zéros, qu'on a séparé de chiffres sur la droite du nombre entier.

Donc enfin, si l'on fait abstraction de la virgule, il faudra par compensation diviser ce nombre par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux.

On énonce aussi un nombre décimal d'une autre manière; on énonce d'abord la partie entière, puis la partie décimale.

Exemple : 54,367.

On dira 54367 millièmes, ou bien 54 unités, et 367 millièmes; on pourrait dire aussi 54 unités, 3 dixièmes, 6 centièmes, 7 millièmes. Inversement, pour écrire un nombre décimal énoncé, il faut suivre une marche contraire à celle qui vient d'être indiquée, c'est-à-dire *écrire le nombre comme un nombre entier, puis séparer par une virgule sur la droite, autant de chiffres qu'il y aurait de zéros, à la suite de l'unité dans le dénominateur de la fraction décimale.*

Si je demande d'écrire 307 cent millièmes, il faudra 5 chiffres décimaux, il faudra donc faire précéder 307 de deux zéros, écrire un autre zéro en avant, car, puisqu'il n'y a pas de partie entière, il faut faire tenir la place des unités par un zéro, et le séparer des deux autres par une virgule, de cette manière 0,00307.

En plaçant un zéro à la droite d'un nombre décimal, ce nombre ne change pas de valeur, ce qui est évident, soit que l'on énonce le nombre décimal en faisant abstraction de la virgule, soit qu'on l'énonce par parties successives.

Ainsi soit 5,37, on a 537 centièmes ou bien 5 unités, 3 dixièmes, 7 centièmes ; écrivons un zéro à la droite de 5,37 nous avons 5,370 qui est égal à 5370 millièmes, ou, encore, à 5 unités, 3 dixièmes et 7 centièmes; en énonçant de la première manière, nous voyons que le nombre est rendu d'une part dix fois plus grand, et en second lieu dix fois plus petit, donc, etc.

Par un raisonnement analogue, on peut conclure qu'en écrivant tant de zéros qu'on voudra à la droite d'un nombre décimal, on ne change pas la valeur de ce nombre décimal (1).

Pour écrire un nombre décimal énoncé, on procède d'après les principes qui précèdent. On écrit la partie entière, que l'on fait suivre d'une virgule, puis on écrit les dixièmes, les centièmes, etc., en ayant soin de placer plusieurs zéros quand des unités de certains ordres ne se trouvent pas dans le nombre; ou bien, si le nombre décimal est énoncé comme une fraction ordinaire, dont le dénominateur serait l'unité suivie d'un certain nombre de zéros, on écrit le numérateur, et sur la droite on sépare on sépare autant de chiffres qu'il y a de zéros au dénominateur.

Les quatre opérations à faire sur les fractions décimales, se ramènent aux mêmes opérations sur des nombres entiers.

ADDITION.

29. 10 millièmes valent un centième 10 centièmes, valent un dixième, 10 dixièmes valent une unité ; donc si l'on veut ajouter les uns aux autres, *plusieurs nombres décimaux, on peut les écrire les uns au-dessous des autres, de manière que les unités de même ordre se correspondent dans une même colonne verticale, savoir les unités, sous les unités, les dixièmes, sous les dixièmes, les centièmes, sous les centièmes, etc. ; puis, en commençant par la droite, faire l'addition en faisant abstraction de la virgule:* la somme obtenue, on place la virgule sous les virgules dans les nombres donnés.

---

(1) Nous répétons ici une remarque déjà faite. Pour énoncer rapidement un nombre entier, il faut compter le nombre des chiffres, diviser par 3, prendre le quotient, retrancher 2 de ce quotient, et faire suivre le nombre qui en résulte de la terminaison *illion*, on aura ainsi le nom de la première tranche, etc.; ou plutôt, il faut compter le nombre des tranches, ôter 2 du nombre de ces tranches, et donner au nom du nombre qui en résulte la terminaison *illion* ; exemple :

34 578 342 700 342 908.

Exemple :

54,3078
6,089
0,3705
8,006
0,9
69,6733

SOUSTRACTION.

30. La soustraction étant l'inverse de l'addition, on doit opérer aussi en faisant abstraction de la virgule. *Ainsi on écrit le nombre à retrancher au-dessous de l'autre nombre, de manière que les unités du même ordre se correspondent. Puis si le nombre inférieur a plus de chiffres décimaux que le nombre supérieur, on écrit autant de zéros qu'il en faut à la droite de ce nombre, pour qu'il y ait le même nombre de chiffres décimaux dans les deux nombres; on fait ensuite abstraction de la virgule, et on opère comme sur des nombres entiers, puis enfin on place la virgule au rang des virgules, dans les deux nombres donnés.*

Si le plus grand nombre n'a pas de partie décimale, on écrit à sa droite autant de zéros qu'il en faut pour qu'il y ait le même nombre de chiffres décimaux dans les deux nombres donnés.

Exemples :			
	347,053	28,5400	3,000
	89,468	16,0678	0,548
	257,585	12,4722	2,452

MULTIPLICATION.

31. Nous avons démontré pour les nombres entiers qu'en multipliant un facteur d'un produit par un nombre entier, le produit est multiplié par ce nombre entier : nous savons qu'on pourrait aussi le démontrer pour des nombres fractionnaires, puisque nous avons fait voir qu'on peut intervertir l'ordre des facteurs dans un produit d'un nombre quelconque de facteurs fractionnaires.

Cela posé, nous allons démontrer que pour *multiplier des nombres décimaux entre eux, ou des nombres décimaux par des nombres entiers, il faut faire abstraction des virgules dans les nombres décimaux, effectuer le produit, puis séparer à la droite du produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le facteur décimal, ou dans les facteurs décimaux donnés.*

1° Soit 5,847 à multiplier par 6.

Si je prends 5847, j'aurai un nombre mille fois trop grand ; donc le produit de 5847 par 6 sera mille fois plus grand que le produit demandé ; ce produit étant effectué, il faudra donc le diviser par mille, c'est-à-dire séparer à la droite du produit 3 chiffres.

Opération :

$$\begin{array}{r} 5,847 \\ 6 \\ \hline 35,082 \end{array}$$

2° Soit 3,246 à multiplier par 0,43.

En faisant abstraction de la virgule dans le multiplicande, il est multiplié par mille, le produit sera donc multiplié par mille ; en faisant abstraction de la virgule dans le multiplicateur, le produit sera multiplié par 100 ; donc le produit sera multiplié par 1000, puis par 100, c'est-à-dire par 100000, ce qu'il fallait démontrer.

Opération :

$$\begin{array}{r} 3,248 \\ 43 \\ \hline 9744 \\ 12992 \\ \hline 1,39664 \end{array}$$

3° Si l'on avait plus de deux facteurs, le raisonnement serait le même.

Les règles établies pour la multiplication des fractions ordinaires, conduiraient d'ailleurs aux mêmes conséquences.

Corollaire. *Si l'on élève un nombre décimal au carré, ce carré renfermera un nombre de chiffres décimaux double de celui du nombre donné.* Ainsi, pour qu'un nombre décimal soit un carré, il doit contenir un nombre pair de chiffres décimaux. Si l'on élève un nombre décimal à la 3^{me} puissance, c'est-à-dire au cube, le nombre des chiffres décimaux sera triple de celui du nombre donné. Donc l'une des conditions nécessaires pour qu'un nombre décimal soit le *cube* d'un autre nombre décimal est celle-ci : *il faut que le nombre des chiffres décimaux du nombre donné soit un multiple* de 3.

Ainsi, en résumé le nombre des chiffres décimaux du produit est égal à la somme, des nombres de chiffres décimaux des facteurs ; donc si l'on a un produit de deux facteurs décimaux, le nombre des chiffres décimaux d'un des facteurs est égal à la différence de ces nombres décimaux dans le produit et dans l'autre facteur.

Cette remarque suffirait pour poser les règles de la division des nombres décimaux dans tous les cas. Mais il convient pour la pratique d'examiner les différents cas qui se présentent dans la division des nombres décimaux.

DIVISION.

32. 1° Un nombre décimal à diviser par un nombre entier.

Ce premier cas se subdivise lui-même en plusieurs autres, que nous ferons remarquer seulement sur des exemples.

1er Exemple. En faisant abstraction de la virgule, la division se fait sans reste : 534,24 : 6.

Il faut séparer au quotient autant de chiffres décimaux, qu'il y en a au dividende; car si l'on multiplie le dividende par un nombre, le quotient est multiplié par ce nombre, donc pour lui restituer sa valeur, il faut le diviser par ce nombre.

2e Exemple : 45,803 : 21.

Après avoir supprimé la virgule, la division donne un reste, le quotient est trouvé à moins d'une unité, et par suite, en plaçant la virgule, le quotient sera trouvé à moins d'un millième. On pourrait avoir ce quotient à une approximation plus grande; pour cela on écrirait à la droite du dividende autant de zéros qu'on voudrait, puis après avoir trouvé ce quotient à moins d'une unité, on séparerait sur la droite du quotient par une virgule, autant de chiffres décimaux qu'il serait nécessaire.

Opération :

$$\begin{array}{r|l} 45{,}803 & 21 \\ \cline{2-2} 3{,}8 & 2{,}181 \\ 1{,}70 & \\ 23 & \\ 2 & \end{array}$$

3e Exemple : 2,35 : 548.

La virgule étant enlevée, le dividende est plus petit que le diviseur; alors on écrit des zéros à la droite du dividende, puis, après avoir fait la division, on sépare à la droite, par une virgule, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le dividende donné, plus celui du nombre de zéros ajoutés.

2° Le dividende est entier et le diviseur a des chiffres décimaux; *dans ce cas, on écrit à la droite du dividende autant de zéros qu'il y a de chiffres décimaux dans le diviseur*; *on fait abstraction de la virgule dans ce diviseur, et on fait la division des nombres entiers qui en résultent*, le quotient trouvé est le nombre demandé; car en écrivant des zéros à la droite du dividende, il est multiplié par 10, 100, 1000, etc., donc le quotient est multiplié par 10, 100 ou 1000; en supprimant la virgule dans le diviseur, il est multiplié par 10, 100 ou 1000, etc., donc le quotient est divisé par ce nombre. Ainsi ce quotient ne change pas de valeur.

Exemple : 548 : 8,53.

Dans ce cas, on peut avoir une approximation aussi grande que l'on veut, comme dans le premier cas.

3° Le dividende et le diviseur ont des chiffres décimaux ; alors on ramène ce cas à l'un des deux premiers, suivant que le dividende a plus de chiffres décimaux que le diviseur, ou réciproquement.

1er Exemple : 584,7435 : 32,28.

2e Exemple : 47,362 : 5,64674.

33. La facilité avec laquelle se font les calculs sur les nombres décimaux, et par conséquent sur les fractions décimales, conduit à chercher à transformer les fractions ordinaires en fractions décimales, ce qui se fait comme nous l'avons vu ci-dessus.

Soient les trois fractions ordinaires à transformer en fractions décimales :

$$\frac{3}{8}, \frac{2}{3}, \frac{14}{15}.$$

1° $\frac{3}{8}$, on écrit $3 \,\Big|\, \frac{8}{0{,}425}$; on dit 3 ne contient pas 8, j'écris zéro au quotient ; 3 vaut 30 dixièmes, je divise 30 par 8, ce qui donne 4 pour quotient, 4 exprime des dixièmes. A la droite de 0, on place une virgule, et on écrit ensuite 4 à la place des dixièmes, on trouve 2 dixièmes pour reste ; on transforme en centièmes ce qui donne 20 centièmes, 20 divisé par 8, donne 2 pour quotient et 4 pour reste ; en continuant ainsi, on trouve enfin 5 millièmes : le quotient est donc 425 millièmes. Ainsi $\frac{3}{8}$ est égal à 0,425.

$$\frac{2}{3},$$

2° Opération :

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 20 & 0{,}6666\ldots\ldots \\ 20 & \\ 20 & \\ \vdots & \end{array}$$

On trouve un quotient indéfini et périodique.

3°

$$\frac{14}{15},$$

Opération :

$$\begin{array}{r|l} 140 & 15 \\ \hline 50 & 0{,}9333\ldots\ldots \\ 50 & \end{array}$$

Ce quotient est aussi périodique, mais la période ne commence pas immédiatement après la virgule. Pour distinguer les différentes espèces de fractions périodiques, les unes sont dites périodiques simples, les autres sont dites périodiques mixtes.

THÉORIE DES FRACTIONS DÉCIMALES FINIES, PÉRIODIQUES SIMPLES ET MIXTES.

34. Il est très-important de savoir dans quel cas une fraction ordinaire donne lieu à une fraction décimale d'un nombre limité de chiffres, ou bien à des fractions décimales périodiques, soit simples, soit mixtes. Avant de donner cette théorie des fractions décimales,

Nous rappellerons ces deux principes :

1° Deux fractions irréductibles égales sont identiques;

2° Deux nombres égaux sont composés des mêmes facteurs premiers élevés aux mêmes puissances.

D'ailleurs, nous supposerons toujours les fractions ordinaires irréductibles.

Analysons le procédé au moyen duquel on transforme une fraction ordinaire en fraction décimale.

On écrit un zéro à la droite du numérateur quand il est plus petit que le dénominateur, et on divise le nombre obtenu par ce dénominateur; à la droite du reste, on écrit encore un zéro, puis on divise le nombre qui en résulte par le dénominateur; à la droite du reste, s'il y en a, on écrit encore un zéro, puis on divise encore par le dénominateur, et l'on continue tant qu'il y a des restes.

Or, au lieu d'écrire successivement un zéro à la droite de chaque reste, on peut écrire plusieurs zéros à la droite du numérateur, puis diviser le dividende qui en résulte par le dénominateur de la fraction donnée, en ayant soin de placer au quotient la virgule, d'une manière convenable.

Mais écrire des zéros à la droite d'un nombre, c'est le multiplier par une puissance de 10. On introduit donc au dividende les facteurs 2 et 5, et seulement ces facteurs; de là on conclut :

1° *Que si le dénominateur de la fraction donnée ne contient que les facteurs 2 et 5, elle peut se réduire en une fraction décimale d'un nombre fini de chiffres.*

2° *Que si le dénominateur contient d'autres facteurs premiers, que 2 et 5, le dividende ne sera jamais divisible par le dénominateur de la fraction donnée.* Or, les restes successifs qu'on obtient sont plus petits que ce dénominateur, qui est le diviseur, et puisque l'opération ne peut se terminer après un nombre de divisions moindre que le diviseur, on devra trouver un des restes déjà obtenus; par suite, les quotients partiels seront des chiffres déjà obtenus, et par conséquent le quotient sera périodique.

Résumons : 1° si une fraction ordinaire irréductible a pour dénominateur un nombre qui ne contient que les facteurs 2 ou 5, ou bien, ces facteurs combinés et élevés à certaines puissances, la fraction ordinaire sera réductible en fraction décimale d'un nombre fini de chiffres ;

2° Si le dénominateur de la fraction ordinaire renferme d'autres facteurs premiers que 2 et 5, la fraction décimale équivalente contiendra un nombre illimité de chiffres, et elle sera périodique.

Il est indispensable de savoir reconnaître si cette fraction décimale sera périodique, simple, ou périodique mixte.

Pour cela, voyons si l'on peut revenir d'une fraction décimale périodique simple ou d'une fraction décimale périodique mixte à la fraction ordinaire équivalente, et observons attentivement les résultats auxquels nous parvenons.

Soit la fraction périodique simple :

$$0{,}357835783578\ldots\ldots$$

La période 3578 se continue indéfiniment.

Il faut chercher à obtenir une autre fraction ayant même partie décimale, en sorte que par une soustraction on n'ait plus de partie décimale. Pour cela, on transporte la virgule après la première période, mais alors, on a 10000 fois la fraction périodique égale à 3578,35783578.....; or, une fois cette fraction égale 0,35783578... ; donc, en retranchant ces deux nombres, on trouve 9999 fois la fraction périodique égale 3578 ; ainsi, la fraction périodique est égale à $\frac{3578}{9999}$, ce qu'on traduit, en langage ordinaire de la manière suivante (1) :

Pour obtenir la valeur de la fraction ordinaire équivalente à une fraction périodique simple, il faut diviser une période par autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période, puis simplifier cette fraction autant que possible.

Nous pouvons remarquer que cette fraction, simplifiée autant que possible, aura pour dénominateur un nombre premier avec 2 et 5; *donc, si une fraction ordinaire irréductible a pour dénominateur un nombre qui contient les facteurs 2 ou 5 combinés avec d'autres facteurs, elle ne pourra donner lieu*

---

(1) Admettons qu'on s'arrête à la troisième période, il faut concevoir qu'un reste divisé par un nombre complète la valeur de cette fraction périodique : le premier chiffre de ce reste est du treizième ordre décimal ; transportons la virgule après la première période, la fraction est multipliée par 10000; le reste est aussi multiplié par 10000, en sorte qu'il peut fournir une nouvelle période 3578 et un reste du même ordre que le reste primitif ; en soustrayant la fraction décimale donnée du nombre obtenu par le transport de la virgule, les deux parties décimales disparaîtront, ainsi que les restes qui complètent ; ce qui prouve que les deux parties décimales se détruisent par la soustraction.

à une fraction décimale périodique simple, car deux fractions irréductibles égales doivent être identiques, et deux nombres égaux doivent être composés des mêmes facteurs premiers; ce qui n'arriverait pas dans ce cas (1).

35. Trouvons maintenant la valeur de la fraction ordinaire égale à une fraction décimale périodique mixte : nous opérerons d'une manière analogue au cas précédent, c'est-à-dire que nous chercherons deux nombres ayant même partie décimale, en sorte que par une soustraction, cette partie décimale disparaisse : cela se fait en transportant la virgule successivement à droite et à gauche d'une période, de la première, pour plus de simplicité, puis en retranchant ensuite les résultats obtenus.

Prenons un exemple : soit donnée la fraction décimale périodique mixte 0,35784784784, 100 fois la fraction égale 35,784784784, 100000 fois la fraction égale 35784,784784 : en retranchant le premier résultat du second, on trouve 99900 fois la fraction égale 35784 — 35, donc la fraction est égale à $\frac{35784-35}{99900}$, ou bien, en langage ordinaire, on peut dire *que la valeur d'une fraction décimale périodique mixte est égale à une fraction ordinaire dont le numérateur s'obtient en retranchant la partie non périodique de l'ensemble de cette partie non périodique et d'une période : le dénominateur étant formé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la partie périodique suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique.*

Nous ferons une remarque sur la fraction ordinaire obtenue. Son numérateur, après la soustraction faite, ne peut être terminé par un zéro, car le dernier chiffre de la partie non périodique ne peut être le même que le dernier chiffre de la partie périodique, car alors la période commencerait au second chiffre, au lieu de commencer au troisième.

Ainsi, en réduisant la fraction ordinaire $\frac{35784-35}{99900}$ à sa plus simple expression, on ne peut diviser le dénominateur par 10, on ne peut le diviser que par 2 élevé à la deuxième puissance, ou par 5 élevé aussi à cette puissance. Donc, toute réduction faite, il restera toujours au dénominateur le facteur 2 ou le facteur 5, ou même tous les deux élevés à la puissance 2, *c'est-à-dire, à une puissance marquée par le nombre des chiffres de la partie non périodique.* Car un nombre formé d'une suite de 9 ne con-

---

(1) Si l'on prend deux périodes au lieu d'une, on a $\frac{35783578}{99999999}$. Il faut démontrer que l'on a la même valeur. Pour simplifier, prenons $\frac{5}{9}$ et $\frac{55}{99}$; ces deux fractions sont égales, car la seconde est $\frac{5 \times 11}{9 \times 11}$.

tient ni le facteur 2, ni le facteur 5; par suite, ces facteurs de la base ne peuvent résulter que du facteur 10 élevé à la puissance marquée par le nombre des chiffres de la partie non périodique.

Nous pouvons donc conclure maintenant que si une fraction ordinaire irréductible a pour dénominateur un nombre premier avec 10, en réduisant cette fraction ordinaire en fraction décimale, elle donnera lieu à une fraction périodique simple, car autrement, deux fractions irréductibles égales seraient égales sans que leurs dénominateurs fussent identiques. Prenons un exemple :

Soit la fraction $\frac{3}{7}$, supposons qu'elle soit égale à 0,5484848. La fraction ordinaire équivalente est $\frac{548-5}{900}$, on aurait donc $\frac{3}{7}=\frac{548-5}{900}$; mais quelque réduction qu'on opère sur la seconde, le dénominateur contiendra toujours le facteur 2 ou le facteur 5; le dénominateur 7 de la fraction irréductible serait donc égal à un nombre dans lequel entrerait le facteur 2 ou le facteur 5; ce qui est absurde.

Nous savons déjà que si une fraction irréductible a pour dénominateur un nombre qui contient les facteurs 2 ou 5 combinés avec d'autres facteurs, elle est égale à une fraction décimale périodique mixte. Il faut savoir combien cette fraction décimale contiendra de chiffres à la partie non périodique; or, la remarque précédente prouve qu'il y aura autant de chiffres à cette partie non périodique qu'il y a d'unités dans le plus haut composant de 2 ou de 5 du dénominateur de la fraction ordinaire donnée.

Cela est presque évident; cependant, nous allons, sur un exemple, faire voir qu'il doit en être ainsi :

Soit la fraction $\frac{11}{5^2\times2^3\times7}$;

Je dis que la fraction décimale périodique mixte aura trois chiffres à la partie non périodique; en effet, supposons qu'elle en ait seulement 2, alors elle aurait pour numérateur un certain nombre, et pour dénominateur une suite de 9 suivis de 2 zéros.

On aurait donc, par exemple, $\frac{11}{5^2\times2^3\times7}=\frac{3\times2}{5^2\times2^2\times9}$; ce qui est absurde, car la fraction $\frac{11}{5^2\times2^3\times7}$ est irréductible; la seconde peut ne l'être pas, et cependant, son dénominateur contient le facteur 2 à une puissance moins élevée que la puissance de 2 dans le dénominateur de la première.

Faisons voir maintenant que la fraction décimale périodique mixte ne peut pas avoir plus de trois chiffres; supposons, en effet, qu'elle en ait quatre, la fraction ordinaire équivalente aurait au dénominateur un certain nombre de 9 suivis de 4 zéros, c'est-à-dire, on aurait un certain nombre de 9 multiplié par 2^4 et par 5^4.

Or, en simplifiant cette fraction, on ne peut faire disparaître en même temps un facteur 2 et un facteur 5 ; donc, il restera ou 2^4 ou 5^4, ce qui est absurde, car le dénominateur de la fraction donnée ne contient 2 qu'à la puissance 3, et le facteur 5 qu'à la puissance 2.

Donc, enfin, la fraction décimale périodique mixte aura trois chiffres non périodiques.

Ce qu'il fallait démontrer.

(Pour les calculs d'approximation, voir les notes à la fin).

RAPPORTS ET PROPORTIONS.

36. Il y a deux manières simples de comparer deux nombres ; le résultat de cette comparaison se nomme rapport. Ainsi il y a deux espèces de rapports. Quand on prend la différence entre les deux nombres, on a un rapport par différence ; quand on prend le quotient de la division de ces deux nombres, le rapport est dit par quotient.

Ces sortes de rapports sont très-fréquemment employés en géométrie et sont pour cela, nommés rapports *géométriques ;* par opposition les autres rapports sont dits *arithmétiques*. Ainsi 5 moins 3 est un rapport arithmétique. 24 divisé par 6 est un rapport géométrique.

On nomme raison le nombre résultant du rapport, ainsi 2 est la raison du rapport 5 moins 3 ; 4 est la raison du rapport 24 divisé par 6 ; 5 et 3 sont les TERMES du rapport *arithmétique ;* 24 et 6 sont les termes du rapport *géométrique*. On écrit 24 : 6, qu'on énonce 24 *est à* 6 ; ainsi on place deux points entre les deux termes du rapport géométrique.

Pour un rapport arithmétique, on ne met qu'un seul point entre les deux termes (1). Pour distinguer l'un de l'autre les termes d'un rapport, on nomme le premier *antécédent*, le second est dit le *conséquent*.

D'après les définitions, il est évident que *si au conséquent d'un rapport par différence on ajoute la raison, on obtiendra l'antécédent ;* en second lieu : *si l'on multiplie le conséquent d'un rapport*

---

(1) Ce qui pourrait faire confondre un rapport avec un produit, mais comme on se sert rarement d'un seul rapport, il y a moins d'inconvénient ; cependant on devrait changer cette notation ; si on ne l'a pas fait, cela tient probablement à ce qu'on emploie très-rarement ces proportions par différence.

par quotient, par la raison du rapport on obtient l'antécédent.

Il est évident aussi que si l'on ajoute un même nombre aux deux termes d'un rapport arithmétique, la raison ne change pas.

Il est évident que si l'on multiplie ou si l'on divise les deux termes d'un rapport géométrique par un même nombre, la raison ne change pas, car un rapport géométrique peut être considéré comme une fraction, or une fraction ne change pas de valeur, quand on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par un même nombre.

Posons encore un principe sur les rapports par quotient.

Si l'on ajoute le conséquent d'un rapport géométrique à son antécédent, la raison augmente d'une unité; car le quotient d'une division augmente d'une unité quand le dividende augmente d'une fois le diviseur.

La réciproque est vraie, c'est-à-dire que si l'on retranche le conséquent d'un rapport géométrique de son antécédent, la raison diminue d'une unité.

Généralement si l'on ajoute à l'antécédent d'un rapport géométrique un certain *nombre de fois son conséquent, la raison augmente de ce nombre de fois l'unité.*

Et inversement si l'on retranche d'un antécédent son conséquent, la raison diminue de ce nombre de fois l'unité. Enfin *si l'on multiplie l'antécédent d'un rapport géométrique par un nombre*, la raison est multipliée par ce nombre; *et si l'on divise l'antécédent par un nombre, la raison est divisée par ce nombre.*

PROPORTIONS.

37. On nomme proportion *l'expression de l'égalité de deux rapports*, ou bien l'ensemble de deux rapports égaux. Si les rapports sont par différence, la proportion est dite *une proportion par différence*, ou bien une *proportion arithmétique*, ou bien enfin *une équidifférence.*

Si les rapports sont des rapports par quotient, la proportion est une *proportion* par *quotient* ou bien une *proportion géométrique* ou simplement une *proportion*, parce que c'est généralement de ces proportions qu'on se sert.

Il serait convenable de traiter en même temps les propriétés des deux espèces de proportions; mais nous examinerons successivement les propriétés des équidifférences et celles des proportions géométriques.

Équidifférence. Une équidifférence est l'égalité de deux rapports par différence. On les écrit à la suite l'un de l'autre et on les sépare par deux points.

Au lieu de dire *égale* on dit *comme*, ainsi prenons l'équidifférence

15.12 : 21.18.

On dit : 15 *est à* 12 *comme* 21 *est à* 18.

Il y a quatre termes dans une équidifférence et deux rapports, il y a donc un premier antécédent et un premier conséquent, un second antécédent et un second conséquent.

On écrit toujours ces quatre termes sur une ligne horizontale ; par suite il y a deux termes intermédiaires et deux termes extrêmes, c'est-à-dire qu'il y a deux moyens, et deux extrêmes

Dans l'équidifférence 15.12 : 21.18,

12 et 21 sont les moyens, 15 et 18 sont les extrêmes. La raison de chaque rapport est 3.

Principe I. *Dans une équidifférence, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.*

Il est utile de vérifier la vérité de ce principe sur un exemple, or nous voyons que 15 plus 18 est égal à 12 plus 21.

Mais c'est là une preuve par le fait, il faut donner une démonstration générale, prenons donc l'équidifférence

15.12 : 21.18.

Si nous ajoutons la raison 3 à chacun des conséquents des deux rapports, nous obtiendrons les antécédents, nous aurons donc

15.15 : 21.21 ;

dans cette équidifférence on a évidemment

$$\underline{15}+21=15+\underline{21}.$$

Nous soulignons chacun des conséquents dans ces deux sommes ; alors nous observons que le moyen 12 a été augmenté de 3 unités, c'est-à-dire de la raison, le moyen 18 a aussi été augmenté de la raison. Ainsi la somme des nouveaux moyens est égale à la somme des moyens primitifs augmentée de la raison, de même la somme des nouveaux extrêmes est égale à la somme des extrêmes primitifs augmentée de la raison. Or ces deux nouvelles sommes sont égales, c'est donc qu'elles étaient d'abord égales ; ce qu'il fallait démontrer. Cette démonstration peut se faire sans qu'on raisonne sur un exemple particulier.

Principe II. *Quand deux rapports inégaux sont écrits à la suite l'un de l'autre*, ou plus simplement, *quand quatre nombres ne forment pas une équidifférence, la somme des extrêmes n'est pas égale à la somme des moyens.*

Employons une démonstration analogue à la précédente.

Dans chaque rapport ajoutons la raison au conséquent, nous obtiendrons l'antécédent correspondant, et alors nous aurons quatre nombres dont les deux premiers seront égaux au premier antécédent, les deux derniers seront égaux au second antécédent, et alors la somme des extrêmes sera égale à la somme des moyens. La première somme est égale à celle des extrêmes primitifs augmentée de la raison du second rapport, la seconde somme est égale a celle des moyens primitifs augmentée de la raison du premier rapport; mais ces deux raisons sont différentes, donc la somme des moyens n'est pas égale à la somme des extrêmes, ce qu'il fallait démontrer.

On peut appliquer ce raisonnement à l'exemple suivant 12.8 et 7.2, la raison du premier rapport est 4, la raison du second rapport est 5.

On a en ajoutant à chaque conséquent la raison du rapport correspondant 12.12 et 7.7 par suite

$$12+\underline{7}=\underline{12}+7.$$

Mais la première somme est égale à $(12+2)+5$, la seconde est égale à $(8+7)+4$, donc $12+2$, n'est pas égal à $8+7$.

Principe III. *Si quatre nombres sont écrits à la suite, et sont tels, que la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens, les quatre nombres forment une équidifférence.*

Car si les quatre nombres ne formaient pas une équidifférence, la somme des extrêmes ne serait pas égale à la somme des moyens, ce qui est contraire à l'hypothèse, donc (1) les quatre nombres forment une équidifférence.

Corollaire. 1 *Dans une équidifférence, si l'on fait des changements sur les termes, sans altérer l'égalité de la somme des moyens et de la somme des extrêmes, les nombres obtenus forment encore une équidifférence.* Cela résulte du principe III.

On en conclut qu'on peut dans une équidifférence, changer l'ordre des moyens, sans que les nombres cessent de former une proportion arithmétique.

On verra de même qu'on peut changer l'ordre des extrêmes, et enfin qu'on pourra mettre les moyens à la place des extrêmes, et inversement. Pour mettre de l'ordre dans ces changements, nous laisserons d'abord les moyens moyens, puis nous mettrons les moyens

---

(1) Si deux équidifférences ont un rapport commun, les autres rapports forment une équidifférence; car ces deux autres rapports étant égaux à un troisième, sont égaux entre eux.

à la place des extrêmes et inversement. Pour le premier cas, il en résultera *trois* nouvelles équidifférences ; pour le second il y en aura *quatre* nouvelles, en tout *sept* nouvelles ; et par suite on voit qu'avec quatre nombres convenables, on peut former *huit* équidifférences.

Exemple 7.3 : 12.8.

1° Les moyens restent moyens, et les extrêmes restent extrêmes :

7. 3 : 12.8
7.12 : 3.8
8. 3 : 12.7
8.12 : 3.7.

2° Les moyens deviennent extrêmes et réciproquement :

12.8 : 7.3
12.7 : 8.3
3.8 : 7.12
3.7 : 8.12 (1).

Corollaire 2. Si l'on ajoute un même nombre à un extrême quelconque et à un moyen quelconque, il y a toujours équidifférence entre les deux nouveaux nombres obtenus, et les deux nombres qui sont restés les mêmes.

Par exemple, soit 12.8 : 7.3,
on aura $12+2.8+2:7.3$,
ou bien $12+5.8:7+5.3$.

Ce sera vrai encore si l'on retranche un même nombre d'un moyen et d'un extrême quelconques.

D'ailleurs on pourrait donner de ces corollaires des démonstrations directes; mais assurément ces principes ne sont pas assez importants, pour qu'on s'y arrête plus longtemps.

Une remarque doit être faite encore.

Dans notre définition du rapport arithmétique, nous avons supposé l'antécédent plus grand que le conséquent. Il est évident que si le contraire a lieu, il suffira de dire que la raison est le reste de la soustraction du premier qu'on a retranché du second, et alors de

(1) Si deux équidifférences ont les antécédents égaux, les conséquents peuvent former une équidifférence. En effet, en changeant les moyens de place dans ces deux équidifférences, on trouve deux équidifférences qui ont un rapport commun, donc, etc.

Si l'on a deux équidifférences, et si l'on ajoute les termes de même ordre, les quatre sommes qu'on obtient forment encore une équidifférence.

modifier d'une manière convenable les démonstrations données plus haut dans la première hypothèse. Ainsi l'équidifférence 7.12 : 3.8 est dans ce cas, on doit dire qu'en retranchant 7 de 12, on obtient le même reste qu'en retranchant 3 de 8.

Pour les rapports géométriques, une remarque analogue doit être faite : cependant dans ce cas, on peut conserver la même définition; car un quotient peut être plus petit que l'unité.

Expliquons cette remarque sur un exemple. Le rapport de 15 à 3 est 5, si j'écris 15 : 3, la raison est 5; mais si j'écris 3 : 15, faudra-t-il dire qu'on divise encore 15, c'est-à-dire le conséquent par la raison? cela est inutile. En effet, en divisant 3 par 15 on obtient $\frac{3}{15}$ ou $\frac{1}{5}$. Ainsi la raison du rapport 3 : 15 est $\frac{1}{5}$, et en multipliant 15 par $\frac{1}{5}$, on obtient $\frac{15}{5}$ ou 3. Ce qu'on devait prévoir.

Quand on donne trois nombres et qu'on en veut trouver un quatrième qui puisse former une équidifférence avec les trois premiers, on se sert du principe I.

Supposons qu'on cherche le quatrième terme d'une équidifférence, pour l'obtenir on fera la somme des deux moyens, et de cette somme on retranchera le premier terme, c'est-à-dire l'extrême connu. Car la somme des moyens est égale à la somme des extrêmes, et l'on sait que le but de la soustraction est de trouver une partie d'une somme connue, quand on connait l'autre partie de cette somme.

Certaines équidifférences sont très-fréquemment employées, ce sont celles dans lesquelles les deux moyens sont égaux, soit par exemple

$$15.12 : 12.9.$$

12 est dit une moyenne différentielle ou une moyenne arithmétique, on a $15+9$ égale $12+12$ ou 2 fois 12; par suite, 12 est égal à $(15+9):2$, ce qu'on écrit ainsi $12=\frac{15+9}{2}$.

On dit alors qu'une moyenne arithmétique entre deux nombres est égale à la demi-somme de ces nombres.

Si l'on veut avoir la moyenne arithmétique entre 7 et 12, on pourra écrire en désignant l'inconnue par x :

$7.x : x.12$, 2 fois la moyenne x égale 7 plus 12, c'est-à-dire que $x=\frac{7+12}{2}=\frac{19}{2}=9+\frac{1}{2}$, ou bien $x=9{,}5$. On aura ainsi :

7.9,5 : 9,5.12 (1).

PROPORTIONS GÉOMÉTRIQUES OU PAR QUOTIENT OU SIMPLEMENT PROPORTIONS.

38. En remplaçant les mots *ajouter* et *retrancher* par les mots *multiplier* et *diviser*, les mots *reste* et *somme* par les mots *quotient* et *produit*, on obtient pour les proportions des principes analogues à ceux des équidifférences.

Assurément les principes relatifs aux proportions sont simples ; mais comme tous ces principes servent à résoudre un grand nombre de questions arithmétiques, et comme ces principes servent à simplifier d'autres parties des mathématiques, nous nous étendrons longuement et sur les propriétés fondamentales et sur les conséquences nombreuses qui en résultent ; nous ferons observer seulement que le nombre des principes fondamentaux se réduit aux deux suivants :

Principe I. *Dans une proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Il faut recourir à la définition et savoir qu'en multipliant un conséquent par la raison d'un rapport, on obtient l'antécédent. Ainsi nous avons :

1er antécédent : 1er conséquent :: 2e antécédent : 2e conséquent.

Si nous multiplions chaque conséquent par la raison de chaque rapport (cette raison est la même), nous obtenons :

1er Antécédent : 1er *Antécédent* :: 2e Antécédent : 2e *Antécédent*.

Et alors il est évident que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Mais ce produit des moyens est égal au produit des moyens primitifs multiplié par la raison, puisqu'un des facteurs a été multiplié par la raison, il en est de même du produit des extrêmes, donc dans la proportion donnée, le produit des moyens est égal au produit des extrêmes (2).

---

(1) Prendre une moyenne entre plusieurs nombres, c'est faire la somme de tous ces nombres, et diviser cette somme par le nombre des parties employées pour trouver cette somme. Ainsi la moyenne entre les cinq nombres 7 ; 3 ; 4 ; 8 et 11 est $\frac{7+3+4+8+11}{5}=\frac{33}{5}=6{,}6.$

(2) On donne aussi cette seconde démonstration :

Un rapport géométrique peut être considéré comme une fraction ; une proportion géométrique est donc l'égalité de deux fractions. Si nous les réduisons au même dénominateur ; les numérateurs des transformées seront égaux. Mais ils seront, d'une part, le produit du premier antécédent par le second conséquent ; d'autre part, le produit du second antécédent par le premier conséquent, donc le produit des moyens est égal au produit des extrêmes. Ce qu'il fallait démontrer.

Prenons un exemple :

$$18 : 6 :: 45 : 15;$$

multiplions les conséquents par la raison, nous obtenons

$$18 : 6 \times 3 \text{ ou } 18 :: 45 : 15 \times 3 \text{ ou } 45.$$

Ainsi nous avons $18 \times (15.3) = 6.3 \times 45$,

ou bien $(18 \times 15).3 = (6 \times 45).3$,

donc $18 \times 15 = 6 \times 45$.

Principe II. *Si quatre nombres ne sont pas en proportion, le produit des extrêmes n'est pas égal au produit des moyens.* Ainsi les deux rapports sont différents.

Multiplions chaque conséquent par la raison correspondante, nous obtenons les deux antécédents correspondants, et dans ces quatre nombres nous voyons que le produit des moyens est égal au produit des extrêmes. Or le produit des nouveaux moyens, *est égal au produit des moyens primitifs multiplié par la raison du premier rapport*, le produit des nouveaux extrêmes est égal *au produit des extrêmes primitifs multiplié par la raison du second rapport*, or ces deux raisons sont différentes, donc le produit des moyens primitifs n'est pas égal au produit des extrêmes. Ce qu'il fallait démontrer.

Exemple : $15 : 3$ et $18 : 9$.

La raison du premier rapport est 5, celle du second est 2.

Nous aurons $15 : 3 \times 5$ et $18 : 9 \times 2$, ou bien $15 : 15 :: 18 : 18$, or 15×18 est égal à 15×18. Mais cela est $(3.18).5$ et $(15.9).2$. Or si deux produits de deux facteurs sont égaux, si les deux derniers facteurs ne sont pas égaux, il en résulte que les premiers sont aussi différents, donc 3.18 n'est pas égal à 15.9. Ce qu'il fallait démontrer (1).

Principe III. (ou *corollaire* des deux premiers principes).

Si le produit de deux nombres est égal au produit de deux autres nombres, avec les quatre nombres on peut former une proportion.

En effet, si les deux premiers nombres sont les extrêmes, et les deux autres les moyens, il y aura proportion ; car si les quatre nombres ne formaient pas proportion, le produit des extrêmes ne serait

(1) En employant les fractions égales aux rapports donnés, on peut voir qu'en les réduisant au même dénominateur, les fractions étant différentes, les numérateurs seront différents, donc le produit des extrêmes n'est pas égal au produit des moyens.

pas égal au produit des moyens, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Par suite, on voit qu'avec les quatre nombres d'une proportion on en peut former sept nouvelles. D'abord en changeant les moyens de place, puis les extrêmes, et enfin en mettant les extrêmes à la place des moyens et en changeant ensuite l'ordre des moyens et des extrêmes, sur la proportion qu'on obtient. Ces transformations sont permises, car on aura toujours le produit des extrêmes égal au produit des moyens.

Soit prise pour exemple la proportion $30:5::42:7$, on aura

$$1^\circ \left.\begin{array}{r} 30:\ 5::42:\ 7 \\ 30:42::\ 5:\ 7 \\ 7:\ 5::42:30 \\ 7:42::\ 5:30 \end{array}\right\} \text{Les moyens restent moyens, et les extrêmes extrêmes.}$$

$$2^\circ \left.\begin{array}{r} 5:30::\ 7:42 \\ 5:\ 7::30:42 \\ 42:30::\ 7:\ 5 \\ 42:\ 7::30:\ 5 \end{array}\right\} \text{Les moyens sont mis à la place des extrêmes et les extrêmes à la place des moyens.}$$

Ainsi avec quatre nombres en proportion, on peut former sept nouvelles proportions, en tout huit proportions.

Corollaire 1. Dans une proportion, si l'on multiplie ou si l'on divise en même temps un moyen et un extrême par un même nombre, il y aura encore proportion entre les termes transformés et ceux qui n'ont pas été altérés; en effet, on aura toujours le produit des extrêmes égal au produit des moyens, puisqu'en multipliant un des moyens par un nombre, le produit des moyens aura été multiplié par ce nombre, et puisqu'en multipliant un extrême par ce nombre, le produit des extrêmes aura été multiplié par ce nombre. Soit pour exemple la proportion

$$45:9::180:36, \text{ on aura } 45\times2:9::180\times2:36,$$

ou bien $$45:9\times4::180:36\times4;$$

ou bien encore $$\frac{45}{3}:9::\frac{180}{3}:36,$$

le plus fréquemment, on divise un antécédent et son conséquent par un même nombre, quand on aperçoit un facteur commun à ces deux termes. Ainsi on diviserait 45 et 9 par 3, ce qui donnerait

$$15:3::180:36.$$

Nous engageons le lecteur à faire sur les termes d'une proportion, toutes les modifications possibles, parce qu'on a très-souvent besoin de proportions dans les mathématiques, et qu'il faut savoir les simplifier.

Ainsi quand il entre une fraction dans une proportion, on peut multiplier deux termes de la proportion par le dénominateur de la fraction, et l'on n'a plus qu'à opérer sur des nombres entiers; car alors le dénominateur disparait.

Corollaire 2. *Quand on connaît les trois premiers termes d'une proportion, le quatrième s'obtient en divisant le produit des moyens par l'extrême connu.* Nous savons que le produit des moyens est égal au produit des extrêmes, donc l'extrême *inconnu* multiplié par l'extrême *connu* est égal au produit des moyens, nous avons donc un produit de deux facteurs et l'un de ses facteurs, ce qui conduit à une division. Désignons le quatrième terme par x, dans la proportion suivante $38:24::19:x$. On aura 24×19 égal à $38\times x$; et par suite x égal à $\frac{24\times19}{38}$, ce qu'on écrit d'une manière abrégée. $24\times19=38\times x$, d'où $x=\frac{24\times19}{38}$; en effectuant les calculs, on a $x=\frac{456}{38}$, en divisant on trouve pour quotient 12. Mais on pouvait simplifier en divisant le numérateur et le dénominateur par 2, de cette manière $x=\frac{12\times19}{19}$, et par suite on voyait que x était égal à 12, puisque le facteur 19 était au numérateur et au dénominateur.

Corollaire 3. *Quand deux proportions sont écrites l'une sous l'autre, terme pour terme, si l'on multiplie par ordre les termes de ces deux proportions, les quatre produits qu'on obtient forment encore une proportion.* Car on peut vérifier encore l'égalité du produit des nouveaux moyens et des nouveaux extrêmes, en indiquant ces deux produits et en groupant les facteurs d'une manière convenable. Soient les deux proportions

$\left.\begin{array}{l} 18:6::42:14 \\ 24:3::48:12 \end{array}\right\}$, en multipliant terme par terme, on obtient

$$18\times24,\ 6\times3,\ 42\times48\ \text{ et }\ 14\times12.$$

Indiquons les produits des moyens et des extrêmes, nous avons

$$(18\times24)(14\times12)\ \text{ et }\ (6\times3)(42\times48),$$

que nous pouvons disposer dans un autre ordre $18.14\times24\times12$ et $6.42\times3\times48$, or à cause de la première proportion, on a 6×42 égal à 18×14; à cause de la seconde, on a $3\times48=24\times12$, donc enfin le produit des nouveaux moyens est égal au produit des nouveaux extrêmes, et par suite on a $18 \times 24 : 6 \times 3 :: 42 \times 48 : 14 \times 12$; ce qu'il fallait démontrer.

Le raisonnement serait le même pour trois proportions, ou même pour un plus grand nombre de proportions.

Ainsi, quand plusieurs proportions sont écrites les unes au-dessous des autres, si on multiplie les termes entre eux par ordre, les quatre produits généraux qu'on obtiendra forment une proportion.

Exemple :
$$3 : 15 :: 7 : 35$$
$$8 : 2 :: 24 : 6$$
$$18 : 6 :: 45 : 15$$

on aura : $3 \times 8 \times 18 : 15 \times 2 \times 6 :: 7 \times 24 \times 45 : 35 \times 6 \times 15.$

Prenons une proportion, et écrivons-la une autre fois sous la première ; en multipliant entre eux les termes de ces deux proportions, on a une nouvelle proportion. Mais alors les quatre produits sont les carrés des termes correspondants de la proportion donnée. *Donc, les carrés des termes d'une proportion forment une nouvelle proportion.*

Et encore : *les mêmes puissances des quatre termes d'une proportion forment une proportion.*

Ainsi, l'on a $21^2 : 3^2 :: 14^2 : 2^2$ et $21^5 : 3^5 :: 14^5 : 2^5$, parce que les quatre nombres 21, 3, 14 et 2 sont en proportion.

En général, chaque opération de l'arithmétique a une opération contraire ; ainsi, la soustraction est l'inverse de l'addition, la division est l'inverse de la multiplication. L'élévation à une puissance doit avoir aussi son opération inverse. Cette opération se nomme extraction de racines. Ainsi, on nomme *racine quarrée* ou *racine carrée* d'un nombre, un nombre qui, multiplié par lui-même, donne pour produit le nombre proposé; ainsi, 4 est la racine carrée de 16, 5 est la racine carrée de 25, 10 est la racine carrée de 100.

Cela posé, il est naturel de penser que les racines carrées des quatre termes d'une proportion sont en proportion, nous le démontrerons bientôt après les procédés et la théorie de la racine carrée et cubique.

Il est évident *que si deux proportions ont un rapport commun, les autres rapports forment une proportion.* Car deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles. Ce principe est très-souvent appliqué.

Exemple :
1° $21 : 3 :: 14 : 2$,
2° $21 : 3 :: 42 : 6$,

il en résulte la proportion : $14 : 2 :: 42 : 6$.

De même ; *si deux proportions ont les antécédents égaux, les conséquents forment une nouvelle proportion*, car on peut changer les moyens de place dans chacune des deux proportions, et alors on trouve deux proportions qui ont le premier rapport commun, d'où il résulte que les deux autres rapports sont en proportion ; mais ces deux derniers rapports sont formés des conséquents des deux proportions ; donc ces conséquents sont en proportion.

Exemple : $\left.\begin{matrix} 3:15::7:35 \\ 3:18::7:42 \end{matrix}\right\}$ on a $\left\{\begin{matrix} 3:7::15:35 \\ 3:7::18:42 \end{matrix}\right.$

donc enfin, $15:35::18:42$. Ce qu'il fallait démontrer.

Par un semblable raisonnement, on ferait voir que si deux proportions ont les conséquents égaux, les antécédents forment une proportion.

Principe IV. *Si dans une proportion, on fait la somme des deux premiers termes et la somme des deux derniers, il en résulte une nouvelle proportion entre la somme des deux premiers et le second et la somme des deux derniers et le troisième ;* ou plus simplement, *la somme des deux premiers termes est au second comme la somme des deux derniers est au quatrième.*

Soit prise pour exemple la proportion $18:6::45:15$. En ajoutant 6 à 18, la raison du premier rapport augmente d'une unité ; en ajoutant 15 à 45, la raison du second rapport augmente aussi d'une unité ; or, ces deux raisons étaient égales d'abord, donc elles sont encore égales maintenant, donc les quatre nombres forment une nouvelle proportion, et l'on a

$$18+6:6::45+15:15.$$

On arriverait aux mêmes conséquences si l'on retranchait chaque conséquent de son antécédent. Ainsi, la différence des deux premiers termes est au second comme la différence des deux derniers termes est au quatrième. On énonce ces deux principes de cette manière :

La somme ou la différence des deux premiers termes est *au second* comme la somme ou la différence des deux derniers est au quatrième. Ainsi, l'on dira : $18\pm6:6::45\pm15:15$; changeant les moyens de place dans cette proportion, nous obtiendrons :

$$18\pm6:45\pm15::6:15.$$

D'où cette nouvelle conséquence : la somme ou la différence des deux premiers termes est à la somme ou à la différence des deux derniers comme le second est au quatrième, ou bien comme le premier est au troisième, puisque l'on a $18:45::6:15$.

Corollaire 1. Dans une proportion, *la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent.*

En effet : changeons les moyens de place dans la proportion donnée, le premier rapport devient celui des antécédents, et le second rapport est celui des conséquents ; or, d'après le principe IV, on trouve que la somme des deux antécédents est au second antécédent comme la somme des conséquents est au second conséquent, ou bien, en changeant les moyens de place, on trouve enfin le principe énoncé dans ce corollaire.

Le même principe est vrai si l'on prend la différence des antécédents et la différence des conséquents ; il en résulte cette conséquence :

La somme des antécédents est à la somme des conséquents comme la différence des antécédents est à la différence des conséquents. Ou bien encore, en changeant les moyens de place dans cette nouvelle proportion, on trouve enfin cet énoncé : La somme des antécédents est à leur différence comme la somme des conséquents est à leur différence.

Nous répétons ici que les énoncés de ces différents principes et de ces corollaires doivent être continuellement présents à la mémoire des élèves.

Au lieu d'ajouter une fois un conséquent à son antécédent, on pourrait l'ajouter deux, trois..., dix fois, etc. Par suite, on a ce nouvel énoncé : La somme du premier terme plus m fois le second (m est mis pour un nombre quelconque) est au second, comme le troisième plus m fois le quatrième est au quatrième.

On nomme proportion continue une proportion dans laquelle les deux moyens sont égaux. Ce moyen est dit alors *moyen proportionnel* entre les deux extrêmes. Ce qui correspond à la *moyenne arithmétique* entre les deux nombres pour les équidifférences.

$16 : 8 :: 8 : 4$ est une proportion continue, 8 est moyenne proportionnelle entre 16 et 4. Dans une pareille proportion, le produit des extrêmes est encore égal au produit des moyens ; ces moyens étant égaux, leur produit est le carré de ce moyen. Donc, dans une proportion continue, *le carré du moyen est égal au produit des extrêmes.* Et par suite, on voit qu'une *moyenne proportionnelle* entre deux nombres est égale à la racine carrée du produit de ces deux nombres, la racine carrée est désignée par ce signe ($\sqrt{\ }$) qui précède le nombre ; ainsi, $\sqrt{27}$ est prononcé racine carrée de 27 ; cela posé, soit à prendre une moyenne proportionnelle entre 48 et 3, on aura, en désignant la moyenne par x, $48 : x :: x : 3$; et par suite, $48 \times 3 = x^2$, et enfin, $x = \sqrt{48 \times 3}$. En effectuant on trouve 12, et on a par suite $48 : 12 :: 12 : 4$.

Nous ferons voir bientôt que la moyenne géométrique entre deux nombres est plus petite que la moyenne arithmétique entre les mêmes nombres.

39. Pour simplifier les solutions de certains problèmes où l'on considère des rapports égaux, on pose le principe suivant :

Dans une suite de rapports égaux, la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent.

Prenons un exemple :

$$24 : 6 :: 16 : 4 :: 28 : 7 :: 32 : 8.$$

Les rapports $24 : 6$, $16 : 4$, $28 : 7$ ont pour raison 4 ; ils sont donc égaux. On énonce ainsi une pareille suite : 24 est à 6 comme 16 est à 4, comme 28 est à 7, comme 32 est à 8.

Avec cette suite, on peut former autant de proportions réellement distinctes qu'on peut disposer 4 nombres deux à deux de toutes les manières différentes.

Or, prenons les deux premiers rapports, ils donnent la proportion :

$$24 : 6 :: 16 : 4.$$

Dans cette proportion, l'on a $24+16 : 6+4 :: 16 : 4$. Or, le rapport de 16 à 4 est égal au rapport de 28 à 7 ; on aura donc en remplaçant par ce dernier rapport le rapport égal $16 : 4$;

$$24+16 : 6+4 :: 28 : 7.$$

Mais dans cette dernière proportion, la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent ; par suite on aura :

$$24+16+28 : 6+4+7 :: 28 : 7.$$

Remplaçant encore le rapport de 28 à 7 par le rapport égal $28 : 8$, on obtient :

$24+16+28 : 6+4+7 :: 32 : 8$, et enfin on trouve :

$$24+16+28+32 : 6+4+7+8 :: 32 : 8.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Il est évident, d'ailleurs, qu'on peut remplacer le rapport $32 : 8$ par un quelconque des rapports égaux. Le raisonnement que nous venons de faire convient à un nombre quelconque de rapports égaux.

Soient prises des proportions comme exemples, nous verrons qu'on en peut faire dans certains cas une suite de rapports égaux.

Désignons des inconnues par x, y et z, et prenons les trois proportions :

$$x : y :: 3 : 5$$
$$y : z :: 5 : 7$$
$$x : z :: 3 : 7$$

En changeant les moyens de places, nous trouvons :

$$x : 3 :: y : 5$$
$$y : 5 :: z : 7$$
$$x : 3 :: z : 7$$

la dernière est une conséquence des deux premières ; on peut écrire la suite des rapports égaux

$$x : 3 :: y : 5 :: z : 7 ;$$

d'où résulte la proportion

$$x + y + z : 3 + 5 + 7 :: x : 3 :: y : 5 :: z : 7.$$

Nous emploierons bientôt cette proportion, ou des proportions analogues, dans les problèmes nommés règles de société.

On écrit quelquefois une suite de rapports égaux de cette manière :

$$x : y : z :: 3 : 5 : 7.$$

Cette manière d'écrire est considérée comme une convention, elle peut conduire à des inexactitudes ; aussi ne l'avons-nous notée que pour qu'on en comprenne la signification, si on la rencontre dans certains auteurs.

Nous croyons encore devoir avertir les lecteurs que les énoncés de tous les principes de la théorie des proportions doivent être continuellement présents à leur mémoire, et nous ferons remarquer encore que les principes véritablement fondamentaux sont les suivants qui résument la théorie des proportions par quotient.

Principe I. *Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Principe II. *Si quatre nombres ne sont pas en proportion, le produit des extrêmes n'est pas égal au produit des moyens.*

Principe III. *Enfin, la somme des deux premiers termes est au second comme la somme des deux derniers est au quatrième.*

LIVRE TROISIÈME.

PUISSANCES ET RACINES.
EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE DES NOMBRES ENTIERS ET DES FRACTIONS.
EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE.

Le carré d'un nombre ou la deuxième puissance de ce nombre est le produit qu'on obtient en multipliant ce nombre par lui-même. Ainsi, 4 est le carré de 2, 9 est le carré de 3.

Extraire la racine carrée d'un nombre, c'est trouver un nombre qui, multiplié par lui-même, produise le nombre donné. En un mot, la racine carrée d'un nombre est un nombre dont le carré est le nombre donné.

Ainsi, 3 est la racine carrée de 9, car le carré de 3 est 9. L'extraction d'une racine est une opération inverse de l'élévation à la puissance correspondante, et de même que pour la division, qui est l'opération inverse de la multiplication, nous avons cherché à déduire le procédé de remarques faites sur la multiplication; nous formerons d'abord les carrés des nombres d'un seul chiffre, puis nous chercherons comment se forme le carré d'un nombre de deux chiffres. Nous en déduirons le procédé d'extraction de la racine carrée, d'un nombre de plus de deux chiffres, et nous verrons qu'on peut *généraliser*, pour un nombre entier quelconque, la méthode à laquelle on est parvenu pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre de 3 ou de 4 chiffres.

Les carrés de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
sont 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Nous voyons réciproquement que les *racines carrées* des nombres de la seconde ligne sont les nombres correspondants de la première.

Mais parmi les nombres entiers de deux chiffres, quatre-vingt-dix ne sont pas les carrés de nombres entiers. Par exemple, 38 ne peut pas avoir de racine entière, puisque 38 est compris entre 36, qui est le carré de 6, et 49, qui est le carré de 7.

Il est naturel de chercher si le nombre 38 peut être obtenu par le produit d'un nombre fractionnaire multiplié par lui-même. En un mot, voyons si 38 est le carré d'un nombre fractionnaire.

Supposons que le nombre fractionnaire $6+\frac{3}{7}$, élevé au carré, soit égal à 38, il est plus simple de transformer 6 en 7^{mes}, nous obtenons alors $\frac{42}{7}$, en ajoutant $\frac{3}{7}$, nous obtenons $\frac{45}{7}$; formons le carré de $\frac{45}{7}$, il en résule $\frac{45}{7}\times\frac{45}{7}$, c'est-à-dire $\frac{45\times45}{7\times7}$, ce qui est égal à $\frac{45^2}{7^2}$; or, le nombre fractionnaire $\frac{45}{7}$ était irréductible, donc 45^2 et 7^2 sont premiers entre eux, donc $\frac{45^2}{7^2}$ est encore un nombre fractionnaire irréductible (n° 26); il est donc impossible que 38 soit égal à $\frac{45^2}{7^2}$, donc $\frac{45}{7}$ ne peut être la racine carrée de 38.

Ainsi, en général, un nombre qui n'est pas le carré d'un nombre entier, ne peut être non plus le carré d'un nombre fractionnaire, et par suite, la racine est incommensurable (1).

Qu'est-ce donc alors qu'extraire la racine carrée d'un nombre comme 67, puisqu'on ne peut trouver aucun nombre qui, multiplié par lui-même, donne 67 ?

De même qu'on ne trouve le plus souvent le quotient d'une division qu'avec une approximation, en général, on ne trouve les racines des nombres qu'avec des approximations.

Ainsi par exemple, 67 étant compris entre 64 et 81, sa racine sera comprise entre 8 et 9; 8 serait donc la racine de 67, *à moins d'une unité*, c'est-à-dire *à une unité près*.

---

(1) En général soit A un nombre entier, qui n'a pas pour racine un nombre entier. Supposons qu'il ait pour racine un nombre $\frac{m}{n}$, on aura donc $A=\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{m^2}{n^2}$; ainsi $A=\frac{m^2}{n^2}$, m et n sont premiers entre eux, on aurait $A\times n^2=m^2$, par suite $A\times n=\frac{m^2}{n}$, or n est premier avec m, donc il devrait diviser m; ce qui est absurde.

Nous verrons bientôt qu'on peut toujours trouver deux nombres très-peu différents l'un de l'autre, et qui élevés au carré comprennent le nombre donné. L'un des deux nombres est dit la racine du nombre donné avec une certaine approximation, et c'est pour cela que l'on dit que l'on peut approcher d'une racine d'une quantité aussi petite qu'on le veut (1).

Nous devons dire même que les extractions par approximation sont la partie la plus importante de ce troisième livre de notre arithmétique.

D'après la définition pour avoir la racine carrée de 729, par exemple, il faudrait faire les carrés des nombres entiers consécutifs jusqu'à ce qu'on trouvât 729; mais ce procédé qui résulte de la définition même de la racine carrée est impraticable pour des nombres considérables à cause de la longueur des calculs, on emploie alors un procédé d'extraction, qui est fondé sur des considérations très-simples.

Quand le nombre donné est de deux chiffres, la racine n'ayant qu'un seul chiffre, on la trouve de mémoire.

Quand ce nombre donné est plus grand que 100 comme le carré de 10 est 100, la racine du nombre donné sera plus grande que 10, elle devra donc contenir des dizaines, et elle contiendra en général des unités, voyons donc comment se forme le carré d'un nombre qui contient des dizaines et des unités. Faisons le carré de 57.

	57
Opération	57
Carré des unités	49
Produit des dizaines par les unités	350
Produit des unités par les dizaines	350
Carré des dizaines	2500
	3249

C'est-à-dire, en procédant par l'ordre des nombres les plus élevés, ce carré d'un nombre formé de dizaines et d'unités contient : 1° le

(1) Ainsi on admet qu'il y a un nombre à la vérité incommensurable, c'est-à-dire qui n'est ni entier ni fractionnaire, qui, élevé au carré, donne 38.

C'est ce nombre qu'on appelle par analogie la racine carrée de 38, et on est autorisé à admettre, qu'il y a en effet un nombre pareil, puisqu'en élevant deux nombres extrêmement peu différents l'un de l'autre, on trouve deux nombres qui comprennent 38.

carré des dizaines; 2° deux fois le produit des dizaines par les unités et enfin le carré des unités (1); le carré de 57 est 3249.

Cherchons la racine carrée de 3249.

Ce nombre est plus grand que 100, sa racine est donc plus grande que 10, cette racine étant composée de dizaines et d'unités, son carré contiendra : 1° le carré des dizaines, 2° le double du produit des dizaines par les unités et le carré des unités; mais le carré de dix est cent, et le carré des dizaines ne peut être qu'un nombre de centaines; ce carré des dizaines ne peut donc être que dans les centaines du nombre 3249.

Je suis donc conduit à séparer les centaines de ce nombre. Ainsi je sépare sur la gauche les centaines de 3249 par une virgule, et je suis conduit à extraire la racine carrée des 32 centaines obtenues.

La racine carrée de 32 est 5, car 32 est compris entre 25 et 36, 25 a pour racine 5, et 36 a pour racine 6, donc 5 est la racine du *plus grand carré* contenu dans 32. Il est donc naturel de dire que 5 est le chiffre des dizaines de la racine; mais une question se présente, 32 ne contenait pas seulement le carré des dizaines, il pouvait contenir encore les retenues provenant de la somme des deux autres parties, il est donc nécessaire de voir si 5 est le chiffre des dizaines de la racine. Nous allons le démontrer.

32 est compris entre 25 et 36, 32 et 36 diffèrent au moins d'une unité; en multipliant ces trois nombres par 100, nous avons encore 3200 compris entre 2500 et 3600; mais 3200 et 3600 diffèrent au moins d'une centaine, par suite en ajoutant à 3200 un nombre moindre que cent, c'est-à-dire 49, on obtient encore 3249 plus petit que 3600; donc ce nombre donné est compris entre 2500 qui est le carré de 50, et 3600, qui est le carré de 60. Ainsi la racine de 3249

---

(1) Désignons les dizaines par d et les unités par u, le nombre sera $d+u$, donc le carré s'obtiendra en multipliant $d+u$ par $d+u$; en multipliant par ordre et en rassemblant les termes égaux, on trouve $(d+u)^2=d^2+2du+u^2$. Dans l'opération, on commence par multiplier par les dizaines, puis par les unités,

$$
\begin{array}{l}
d+u \\
d+u \\
\hline
d^2+du \\
\quad +du+u^2 \\
\hline
d^2+2du+u^2
\end{array}
$$

est comprise entre 50 et 60, c'est-à-dire entre 5 dizaines et 6 dizaines, donc 5 est le chiffre des dizaines de la racine (1).

Il est naturel de retrancher le carré de 5 de 32, on obtient pour reste 7, et à la droite de 7, on abaisse la tranche de deux chiffres qui suit, on obtient alors 749. Ce nombre contient les deux autres parties du carré de la racine de 3249, c'est-à-dire deux fois le produit des dizaines par les unités et le carré des unités. Mais ce double produit des dizaines par les unités, étant un nombre de dizaines, ne pourra se trouver que dans les dizaines de 749, je suis donc conduit à séparer les dizaines de 749; j'obtiens ainsi 74 qui doit contenir ce double de 5 multiplié par le chiffre des unités; donc en divisant 74 par 2 fois 5 ou 10, je pourrai avoir le chiffre des unités, 10 est contenu 7 fois dans 74, je puis donc *essayer* 7.

Car on ne peut pas assurer que le chiffre 7 soit le chiffre des unités puisque 74 contient non-seulement le double produit des dizaines par les unités, mais encore les dizaines provenant du carré des unités. Mais cet essai se fait en écrivant 7, à droite du double des dizaines (ce qui fait prendre à ce double des dizaines sa valeur relative), et en multipliant par 7, le produit se compose : 1° du carré des dizaines; 2° deux fois le produit des dizaines par les unités: ces deux parties sont ce qui complète le carré de 57. Or en multipliant 107 par 7, on obtient 749, donc 7 est le chiffre de la racine. On pose l'opération de la manière suivante :

	32,49	5
carré de 51	25	107
reste suivi de la tranche	749	7
	749	749
reste	nul.	

Appliquons le même raisonnement au nombre 5467.

Ce nombre est plus grand que 100, la racine, plus grande que 10, contient des dizaines, et peut-être des unités; dans ce cas 5467 contient

(1) On écrit ainsi en abrégé le raisonnement précédent (le signe $<$ signifie *plus petit que*, ainsi $3<7$ s'énonce 3 plus petit que 7).

$25 < 32 < 36$ multipliant par 100, après avoir remarqué que 32 et 36 diffèrent au moins de 1,

$25 \times 100 < 3200 < 3600$ puis en observant que 3200 et 3600 diffèrent au moins de 100,

$25 \times 100 < 3249 < 3600$ et enfin

$5 \times 10 < \sqrt{3249} < 6 \times 10$ donc 5 est le chiffre des dizaines.

le carré des dizaines de la racine et deux autres parties ; mais le carré des dizaines est un nombre de centaines qui ne peut être contenu que dans les 54 centaines du nombre donné. Je suis donc conduit à séparer deux chiffres sur la droite dans le nombre de gauche, et à extraire la racine du plus grand carré contenu dans 54, 7 est la racine de 54, je retranche 49 de 54 il reste 5, j'abaisse la tranche suivante, 67 il en résulte le nombre 567, je sépare les dizaines de ce nombre, ce qui donne 56, et je divise par deux fois 7, c'est-à-dire 14, 56 contient 14 3 fois, j'écris 3 à la suite de 14, et je multiplie par 4 ; 144×4 est égal à 576 qui est plus grand que 567, 4 est donc trop grand, je prends 3 et j'écris 143×3, j'obtiens 429 que je puis retrancher de 567 sur le chiffre des unités :

5467	73
49	144
567	4
429	576
138	143
	3
	429

Pour faire la preuve, il faut multiplier la racine carrée par elle-même, le produit doit être le carré dont on l'a extraite, s'il y a un reste, on l'ajoute au produit de la multiplication de la racine carrée par elle-même, et on doit retrouver le carré.

Les raisonnements qui précèdent suffisent pour qu'on puisse extraire la racine carrée d'un nombre aussi grand que l'on voudra. Soit par exemple à extraire la racine carrée de 3647868, nous aurons d'abord à séparer deux chiffres sur la droite, puis à extraire la racine carrée du plus grand carré contenu dans 36478 centaines, nous serons donc conduits encore à séparer deux chiffres sur la droite de ce nombre, ce qui nous conduira à extraire la racine carrée de 364 et en continuant ainsi on verra que pour extraire la racine carrée d'un nombre plus grand que 100, il faut employer le procédé suivant.

Règle générale de l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier.

On écrit le nombre, et à sa droite on place un trait pour écrire les chiffres de la racine à mesure qu'on les trouve. On sépare le nombre en tranches de deux chiffres en commençant par la droite la première tranche de gauche peut n'avoir qu'un seul chiffre ; il *y a autant de chiffres à la racine qu'il y a de tranches de deux chiffres dans le nombre donné. On extrait la racine du plus grand carré contenu dans la première tranche à gauche; cette racine, qui ne peut avoir qu'un seul chiffre, est le chiffre des plus hautes unités de la racine cherchée. On l'écrit à la place réservée à la droite du nombre donné.*

On fait le carré de ce chiffre et on le soustrait de la première tranche à gauche.

A la droite du reste on abaisse la tranche suivante, et on sépare dans ce reste le premier chiffre à droite, le nombre de gauche qui en résulte sera divisé par le double de la racine obtenue. Si ce double de la racine est contenu dans le dividende indiqué, il est possible que le quotient obtenu soit le chiffre de la racine qui suit celui que l'on a trouvé, et pour l'essayer, on l'écrit à la droite du double de la racine trouvée, et on multiplie le nombre qui en résulte par le quotient trouvé; si le produit n'est pas plus grand que le reste complet, trouvé le quotient est le second chiffre de la racine, et on l'écrit à cette racine. Si le produit formé est plus grand que le reste complet, on essaye ce chiffre diminué de une ou deux unités jusqu'à ce qu'on trouve un chiffre convenable; si le double de la racine n'est pas contenu dans les dizaines du reste complet, on écrit zéro à la droite du chiffre trouvé de la racine, et on opère comme il va être indiqué pour le cas où l'on a obtenu les deux premiers chiffres de la racine.

A la droite du second reste on écrit la tranche suivante, on sépare les dizaines de ce reste et on divise ces dizaines, par le double de la racine écrite: pour essayer le quotient trouvé, *on l'écrit à la droite du double obtenu, et on multiplie le nombre qui en résulte par ce quotient, on retranche le produit du dernier reste, suivi de la seconde tranche, puis on écrit ce quotient* (s'il y a lieu), *à la droite des chiffres de la racine, puis on continue de la même manière jusqu'à ce qu'on ait abaissé la dernière tranche à droite.*

Exemple	30,6 7,9 7	553	
	25	105	1103
1er reste suivi de la 2e tranche	5 6,7	5	
	5 2 5	525	3309
2e reste suivi de la 3e tranche	4 2 9,7		
	3 3 0 9		
3e reste	9 8 8		

Vérification	553
	553
	1659
	27658
	27658
	9
	306797,

égal au nombre donné.

Avec l'habitude de ces calculs, on évite d'écrire les produits deux fois, et on retranche immédiatement les produits partiels à mesure qu'on les trouve ; alors l'opération s'écrit ainsi :

30,6 7,9 7	553	
5 6.7	105	1103
4 2 9.7		
9 8 8		

mais il vaut mieux opérer comme dans les premiers cas, de peur de commettre des erreurs.

Première remarque. Quelquefois en cherchant le chiffre des unités, on diminue ce chiffre des unités de deux ou de trois unités. Il faut avoir un moyen de reconnaître si le chiffre des unités ainsi modifié n'est pas trop petit. On pourrait le vérifier au moyen de cette remarque, que la différence entre les carrés de deux nombres entiers consécutifs, égale le double du plus petit nombre $+1$.

En effet, soit a et $a+1$ deux nombres entiers consécutifs. Les carrés de ces nombres sont a^2 et a^2+2a+1, en retranchant du second carré le premier, on trouve pour reste $2a+1$, ce qu'il fallait trouver. Donc, quand en extrayant la racine carrée d'un nombre entier, on trouve pour reste un nombre plus grand que le double de la racine trouvée $+1$. C'est que cette racine sera trop petite.

Deuxième remarque. En élevant un nombre entier au carré, le chiffre des unités de ce carré ne peut provenir que du carré des unités; mais les carrés des neufs premiers nombres ne sont jamais terminés par les chiffres 2, 3, 7, 8.

Quand un nombre entier est terminé par les chiffres 2, 3, 7, 8, la racine du nombre donné est incommensurable. Par conséquent, alors la racine ne peut être trouvée qu'avec une certaine approximation.

Quand on veut extraire la racine carrée d'un nombre fractionnaire, on ne peut avoir en général qu'une approximation; voyons comment on peut trouver la racine carrée à une unité près; soit par exemple $\frac{3457}{65}$ qui est égal à 53 et $\frac{12}{65}$.

Le nombre 53 a pour racine carrée 7; je dis que 7 est la racine carrée du nombre fractionnaire à moins d'une unité près. En effet 53 est compris entre 49 et 64, mais 53 et 64 diffèrent au moins d'une unité; donc en ajoutant $\frac{12}{65}$ à 53, nous aurons encore des nombres par ordre de grandeur. Donc 7 est la racine carrée du nombre donné à moins d'une unité près.

Racine carrée des fractions.

Nous savons que pour élever une fraction au carré, on fait le carré *du numérateur* et celui *du dénominateur*. En raisonnant par analogie, on verrait que pour extraire la racine carrée d'une fraction, on devrait extraire la racine carrée du numérateur, et celle du dénominateur. Mais quand les deux termes ne sont pas des carrés parfaits, l'opération ne peut avoir de sens que quand on demande une approximation.

On peut avoir la racine carrée d'une fraction avec une approximation connue, quand le dénominateur de la fraction est un carré, dans les autres cas on peut ramener les fractions à avoir pour dénominateur des carrés. Soit à extraire la racine carrée de $\frac{23}{49}$, on extraira la racine carrée de 49 qui est 7, et on a $\frac{4}{7}$; mais il faut maintenant juger du degré d'approximation. — 23 est compris entre 4 au carré et 5 au carré, en divisant par 49, on aura donc $\frac{4^2}{7^2} < \frac{23}{49} < \frac{5^2}{7^2}$. La racine carrée de $\frac{23}{49}$ est donc comprise entre $\frac{4}{7}$ et $\frac{5}{7}$, elle diffère donc de $\frac{4}{7}$ de moins de $\frac{1}{7}$.

On ramène l'extraction de la racine carrée d'une fraction quelconque au cas précédent, en multipliant les deux termes de la fraction par le dénominateur de cette fraction. La fraction que l'on obtient a pour dénominateur, un carré exact. Soit donnée, par exemple, la fraction $\frac{5}{11}$, je multiplie les deux termes de cette fraction par 11, et j'obtiens 55 divisés par 11 au carré ou 11^2, c'est-à-dire $\frac{55}{11^2}$. Il est inutile de faire le carré de 4, on l'indique seulement en disant que la fraction $\frac{55}{11^2}=\frac{5}{11}$. La question est donc ramenée à extraire la racine carrée de $\frac{55}{11^2}$, On ne pourra le faire exactement, puisque 55 n'est pas un carré parfait, mais on pourra apprécier le degré d'approximation. On extraira la racine carrée du numérateur et celle du dénominateur, la racine carrée de 55 est 7, et celle de 11^2 est 11; donc la racine carrée obtenue est $\frac{7}{11}$ à moins de un onzième près $\left(\text{ou pour abréger à } \frac{1}{11} \text{ près}\right)$.

Extraction de la racine carrée des nombres décimaux.

Il faut d'abord dire que pour faire le carré d'un nombre décimal, on néglige la virgule, ensuite on multiplie ce nombre par lui-même, et on sépare au produit obtenu autant de chiffres qu'il y en avait dans les deux facteurs, c'est-à-dire le double de ce qu'il y avait dans le nombre élevé au carré.

Ainsi quand un nombre décimal est un carré exact, il y a toujours un nombre pair de chiffres décimaux, et ce nombre répétons-le, est double du nombre des chiffres de la racine.

Il y a donc un moyen très-simple d'extraire la racine carrée d'un nombre décimal, lorsque le nombre des chiffres décimaux est pair. On fait abstraction de la virgule, on extrait la racine carrée du nombre entier obtenu à une unité près, et on sépare à la droite de la racine, un nombre de chiffres décimaux, moitié de celui du nombre donné.

Soit par exemple $\sqrt{54,3782}$.

543782	737	
49	143	1467
537	3	7
429	429	10269
10882		
10269		
613		

La racine carrée de 543782 est 737 à moins d'une unité près. Maintenant pour tenir compte des chiffres décimaux, il faut séparer deux chiffres sur la droite, ce qui donne 7,37. La racine carrée est donc trouvée à moins d'un centième près, car la partie négligée est plus petit que 0,01.

Si le nombre décimal donné renferme un nombre impair de chiffres décimaux, on ajoutera un zéro à la droite pour avoir un nombre pair de chiffres décimaux, puis on opérera comme dans le cas précédent.

Soit par exemple $\sqrt{2,345}$.

23 450	153	
13,4	23	303
12 5	5	3
950	125	909
909		
41		

La racine du nombre entier est 153, et par conséquent la racine du décimal donné est 1,53 à un centième près, c'est-à-dire 153 centièmes. Si l'on voulait avoir une approximation décimale, on ajouterait à la droite du nombre autant de zéros qu'il en faudrait pour que le nombre des chiffres décimaux devînt double du nombre des chiffres décimaux qu'on voudrait dans la racine, car alors la partie qu'on négligerait serait plus petite que l'unité de l'ordre décimal du dernier chiffre obtenu.

Soit à trouver, par exemple $\sqrt{5,73}$ à 0,001 près.

5730000	2393		
4	43	469	4783
173	3	9	3
129	129	4221	14349
4400			
4221			
17900			
14349			
3551			

La racine carrée est 2393, et en tenant compte des décimales, on trouve 2,393 à un millième près.

Pour extraire la racine carrée d'une fraction ordinaire avec une approximation décimale, on transforme la fraction ordinaire en fraction décimale, et on a soin de pousser la division jusqu'à ce qu'on trouve un nombre convenable de chiffres décimaux au quotient, puis on extrait la racine carrée du quotient obtenu, comme dans les exemples précédents.

Cette réduction d'une fraction ordinaire en fraction décimale, conduit à une théorie dite des fractions périodiques, simples ou mixtes, que nous avons examinée.

Prenons pour exemple $\frac{5}{7}$, dont nous voulons extraire la racine carrée à un centième près; je divise 5 par 7 et j'obtiens zéro au quotient, je transforme 5 en dixièmes, ce qui me donne 50 dixièmes, je divise 50 par 7, et j'obtiens 7 pour quotient, que je mets à la droite de la virgule, j'ai obtenu 1 pour reste que je transforme en centièmes. En prenant le quotient, nous obtenons 1 et pour reste 3; on continuera ainsi l'opération, et en plaçant des zéros à la droite des restes successifs, on trouve enfin 0,7142 dix-millièmes en s'arrêtant aux dix-millièmes; extrayons maintenant la racine carrée du nombre obtenu. On fait abstraction de la virgule, on obtient pour racine carrée 84 et en tenant compte des chiffres décimaux, on obtient 84 centièmes pour la racine à moins d'un centième près.

Extractions par approximation.

En cherchant la racine de 73, on trouve 8 à moins d'une unité près, car 73 est compris entre 64 et 81, dont les racines sont 8 et 9. Or, nous avons vu qu'on peut extraire la racine d'une fraction avec une approximation marquée par l'unité divisée par le dénominateur de cette fraction. Ainsi on peut avoir la racine de $\frac{5}{8}$ à $\frac{1}{8}$ d'unité près.

Il est naturel de chercher si l'on ne peut pas extraire la racine d'un nombre entier, 73 par exemple, à une approximation marquée par $\frac{1}{8}$. Nous pouvons transformer 73 en $8^{\text{ièmes}}$ de cette manière $\frac{73\times 8}{8}$, alors nous opérerons sur le nombre $\frac{73\times 8}{8}$ comme sur une fraction; mais nous avons vu qu'il faut multiplier le numérateur par le dénominateur pour avoir une approximation marquée par l'unité divisée par ce dénominateur. Multipliant 73×8 par 8, on trouve $73\times 8\times 8$ ou 73×8^2, le nombre 73 est donc égal à $\frac{73\times 8^2}{8^2}$. *Après avoir extrait la racine carrée de 73×8^2, à moins d'une unité, on divisera par 8 et l'on aura la racine de 73 à moins de $\frac{1}{8}$.*

73×8^2 est égal à 4 672; la racine carrée de 4 672, à une unité près, est 68, donc la racine de 73, à moins de $\frac{1}{8}$, est $\frac{68}{8}$.

On déduit de ce qui précède que pour extraire la racine carrée d'un nombre entier avec une approximation marquée par une fraction dont le numérateur est l'unité, il suffit de multiplier le nombre entier par le carré du dénominateur de la fraction d'approximation, extraire la racine carrée du produit, à moins d'une unité, et diviser la racine obtenue par le dénominateur de la fraction d'approximation (1).

Nous savons extraire la racine carrée d'un nombre fractionnaire, à moins d'une unité, nous saurons donc extraire aussi la racine d'un nombre fractionnaire à moins d'une fraction dont le numérateur serait l'unité; pour cela *il faut multiplier le nombre fractionnaire par le carré du dénominateur de la fraction d'approximation, extraire l'entier de ce produit, puis, ce nombre entier obtenu, extraire sa racine carrée à moins d'une unité, enfin diviser cette racine par le dénominateur de la fraction d'approximation.*

Exemple : $\sqrt{\frac{23}{7}}$, à moins de $\frac{1}{3}$.

$$\frac{23}{7} = \frac{23 \times 3^2}{7 \times 3^2} = \frac{23 \times 3}{7} \times \frac{1}{3^2} = \frac{207}{7} \times \frac{1}{3^2}.$$

$\frac{207}{7} = 29 + \frac{4}{7}$; la racine carrée de 29 est 5; donc la racine carrée de $\frac{23}{7}$, à moins de $\frac{1}{3}$, est $\frac{5}{3}$; démontrons-le maintenant.

29 est compris entre 5^2 et 6^2; mais 29 et 36 diffèrent au moins d'une unité, donc en ajoutant $\frac{4}{7}$ à 29, ce qui donne $29 + \frac{4}{7}$ ou $\frac{207}{7}$, je

(1) On peut parvenir à ce résultat en raisonnant comme il suit : extraire la racine carrée de 73 à moins de $\frac{1}{8}$ d'unité, c'est trouver le plus grand nombre de 8mes contenus dans la racine de 73; or, soit x ce nombre de 8mes, on aura $\sqrt{73}$ comprise entre $x \times \frac{1}{8}$ et $\frac{x+1}{8}$, ou, en élevant au carré, on aura 73 compris entre $\frac{x^2}{8^2}$ et $\frac{(x+1)^2}{8^2}$; multipliant tout par 8^2, on verra que 73×8^2 est compris entre x^2 et $(x+1)^2$, donc x est la racine carrée du plus grand carré contenu dans 73×8^2. Ce qu'il fallait démontrer.

trouve $\frac{207}{7}$ compris entre 5^2 et 6^2, divisant les trois nombres par 3^2 je trouve $\frac{207}{7 \times 3^2}$ ou bien $\frac{23}{7}$ compris entre $\frac{5^2}{3^2}$ et $\frac{6^2}{8^2}$. Ainsi $\frac{5}{3}$ et $\frac{6}{3}$ comprennent la racine carrée de $\frac{23}{7}$; mais $\frac{5}{3}$ et $\frac{6}{3}$, ne diffèrent entre eux que de $\frac{1}{3}$, donc la racine de $\frac{23}{7}$ est bien $\frac{5}{3}$, à moins de $\frac{1}{3}$ d'unité, ou à $\frac{1}{3}$ d'unité près.

Soit à extraire la racine de 28 à moins de $\frac{2}{14}$.

$\frac{2}{14}$ est égal à $\frac{1}{7}$, ou bien $\frac{1}{14:2}$, ou bien $\frac{1}{\left(\frac{14}{2}\right)}$. D'après ce qui précède il faudrait multiplier 28 par 7^2, ou bien par $\left(\frac{14}{2}\right)^2$. Puis extrayant la racine du produit, à moins d'une unité, il faudrait diviser la racine obtenue par 7, ou bien par $\frac{14}{2}$, c'est-à-dire multiplier par $\frac{2}{14}$. On est conduit par analogie à opérer ainsi quand on veut extraire la racine d'un nombre entier ou fractionnaire quelconque à une approximation marquée par une fraction quelconque.

Soit à extraire la racine carrée de 72 à moins de $\frac{5}{11}$, *je multiplie 72 par le carré de la fraction* $\frac{5}{11}$ *renversée*, c'est-à-dire par $\left(\frac{11}{5}\right)^2$; *j'obtiens* $\frac{72 \times 11^2}{5^2}$, *j'extrais la racine de ce nombre à moins d'une unité, puis je multiplie cette racine par* $\frac{5}{11}$, *j'aurai obtenu la racine à moins de* $\frac{5}{11}$ *d'unité*. On a la même démonstration que ci-dessus.

Effectuons $\frac{72 \times 11^2}{5^2}$ est égal à $\frac{72 \times 121}{25}$ égal à $\frac{8712}{25}$, en faisant la division, on trouve 348 pour quotient, et 12 pour reste, ainsi $\frac{8712}{25} = 348 + \frac{12}{25}$, la racine carrée de 348 est 18, à unité près. Multiplions 18 par $\frac{5}{11}$, on trouve $\frac{90}{11}$, c'est-à-dire 8 et $\frac{2}{11}$ pour la racine de 72, à $\frac{5}{11}$ près.

Prenons pour exemple $\sqrt{\frac{23}{5}}$, à $\frac{2}{7}$ près.

Je multiplie $\frac{23}{5}$ par $\frac{7^2}{2^2}$, j'obtiens $\frac{23 \times 49}{5 \times 4}$ ou bien $\frac{1127}{20}$; extrayant l'entier je trouve 56 pour quotient, 7 pour reste; j'extrais la racine carrée de 56, je trouve 7, à une unité près. Multipliant 7 par $\frac{2}{7}$ je trouve enfin 2 pour racine de $\frac{23}{5}$, à moins de $\frac{2}{7}$ (1).

Pour les approximations de fractions décimales, nous avons déjà vu comment nous pouvons les obtenir; on peut d'ailleurs appliquer à ces fractions tout ce que nous avons démontré pour les autres.

Faisons remarquer que pour élever 5^2 à la seconde puissance, il faut écrire $5^2 \times 5^2$ ou bien 5 pris 4 fois comme facteur, c'est-à-dire 5^4, donc, pour élever 5 à la puissance 4 il suffit d'élever 5 au carré, puis ensuite d'élever au carré 25.

Réciproquement pour extraire *la racine quatrième* d'un nombre, j'en extrairai la racine carrée, puis j'extrairai la racine carrée de la racine carrée obtenue.

Par la même raison si j'ai à extraire la racine 8e, comme 8 est égal à $2 \times 2 \times 2$ ou bien 2^3. J'extrairai la racine 2e ou la racine carrée du nombre donné, puis la racine carrée de cette racine carrée, puis enfin la racine carrée de cette dernière racine carrée.

On peut généraliser: pour extraire la racine d'un nombre, l'indice de cette racine étant une puissance de 2, il faudra extraire autant de racines carrées successives du nombre donné qu'il y a d'unités dans l'exposant de 2.

---

(1) Soit à extraire la racine carrée de N à $\frac{p}{q}$ près. x étant entier, et le plus grand nombre de fois que $\frac{p}{q}$ est contenu dans la racine carrée de N, on aura

$x \times \frac{p}{q} < \sqrt{N} < (x+1) \times \frac{p}{q}$, élevant au carré, on trouve

$x^2 \times \left(\frac{p}{q}\right)^2 < N < (x+1)^2 \times \left(\frac{p}{q}\right)^2$; en divisant tout par $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ on obtient

$x^2 < \frac{N}{\left(\frac{p}{q}\right)^2} < (x+1)^2$; x est donc la racine du plus grand carré contenu dans $\frac{N}{\left(\frac{p}{q}\right)^2}$, ou bien dans $N \times \left(\frac{q}{p}\right)^2$; ce qu'il fallait démontrer.

Si je veux élever 7^2 à la 3ᵉ puissance j'aurai $7^2 \times 7^2 \times 7^2$ ou bien 7^{2+2+2}, car 7 est pris alors six fois comme facteur, ainsi j'ai $(7^2)^3$ égal à 7^6 ; donc, réciproquement, pour avoir la 6ᵉ puissance de 7, il suffit d'élever 7 à la 2ᵉ puissance, puis d'élever 7^2 à la 3ᵉ puissance.

De cette remarque nous déduirons un moyen d'extraire la *racine sixième* d'un nombre, et, en généralisant, nous saurons comment on extrait la racine d'un nombre quand *l'indice de la racine* est un nombre entier qui n'a d'autres facteurs que 2 et 3.

Ce serait ici le lieu de démontrer qu'un nombre entier a autant de diviseurs au-dessous de sa racine carrée qu'au-dessus, et par suite que si un nombre entier est un carré il a un nombre impair de diviseurs, et que si sa racine est incommensurable, il a un nombre pair de diviseurs. On peut déduire les réciproques. Ces principes sont d'ailleurs évidents, on peut les démontrer en considérant un nombre décomposé en ses facteurs premiers, en se rappelant que pour élever un produit à une puissance, il suffit d'élever chacun de ces facteurs à cette puissance (1).

RACINE CUBIQUE.

41. Le cube d'un nombre est le produit de trois facteurs égaux à ce nombre ; c'est la troisième puissance de ce nombre. Formons les cubes des dix premiers nombres

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Tout nombre entier qui n'est pas un cube exact, a pour racine un nombre incommensurable (*voyez* la racine carrée), ou plutôt sachez que le cube d'une fraction irréductible est une fraction irréductible.

Parmi les nombres entiers de 1 jusqu'à 1000, il n'y a que 10 cubes exacts ; ainsi on prévoit qu'on ne pourra demander en général qu'une approximation dans la racine cubique. Quand le nombre en-

---

(1) *Observation.* Pour élever un produit de plusieurs facteurs au carré, il suffit d'élever chacun des facteurs au carré. Donc si un produit renferme un facteur premier, il doit le renfermer au carré, donc si un nombre est pair et s'il n'est pas divisible par 4, il n'est pas un carré exact ; si un nombre est divisible par 3, pour qu'il soit un carré exact, il faut qu'il soit divisible par 9.

Quand il est divisible par 5, il faut en même temps qu'il soit divisible par 25 ; on a donc ainsi le moyen de reconnaître, dans quelques cas particuliers, qu'un nombre entier n'est pas un carré parfait, car c'est seulement une méthode d'exclusion.

tier sera plus grand que mille, sa racine contiendra des dizaines et des unités; voyons donc comment se forme le cube d'un nombre formé de dizaines et d'unités.

(Pour multiplier un nombre par une somme de plusieurs parties, il faut multiplier ce nombre par chacune de ces parties, et faire la somme des produits obtenus.)

$$\begin{array}{lr}
 & d+u \\
 & d+u \\
\hline
 & d^2+du \\
 & +\;du+u^2 \\
\hline
\text{carré} & (d+u)^2=d^2+2du+u^2 \\
 & d+u \\
\hline
 & d^3+2d^2u+2du^2 \\
 & +\;d^2u+\;du^2+u^3 \\
\hline
\text{cube ou troisième puissance} & (d+u)^3=d^3+3d^2u+3du^2+u^3
\end{array}$$

En langage ordinaire, le cube d'un nombre formé de dizaines et d'unités est égal au cube des dizaines, plus le triple produit du carré des dizaines multiplié par les unités, plus le triple des dizaines multipliées par le carré des unités, plus le cube des unités.

Soit donc à extraire la racine cubique de 428732. La racine contient des dizaines et des unités.

Le cube des dizaines donne des mille; le cube des dizaines ne peut donc se trouver que dans les 428 mille du nombre; nous sommes donc conduits à séparer 3 chiffres à la droite du nombre, puis à extraire la racine cubique du plus grand cube contenu dans 428.

428 est compris entre 7^3 et 8^3, ainsi j'ai 7^3 plus petit que 428 qui lui-même est plus petit que 8^3; en un mot ces trois nombres sont par ordre de grandeur; je dis que 7 est le chiffre des dizaines de la racine; en effet 428 et 8^3 diffèrent au moins d'une unité; je multiplie les 3 nombres par 1000 c'est-à-dire par le cube de dix, j'obtiens $7^3\times10^3$, 428000, $8^3\times10^3$, les 3 nombres seront encore par ordre de grandeur et les 2 derniers produits diffèrent au moins d'un mille; si j'ajoute au plus petit des deux derniers nombres, un nombre plus petit que mille, soit 732, les 3 nombres seront encore par ordre de grandeur.

Donc 428732 est compris entre $7^3\times10^3$ et $8^3\times10^3$: ainsi l'on a

$$70^3\times10^3<428732<8^3\times10^3.$$

La racine demandée est donc comprise entre 7 dizaines et 8 dizaines, 7 est donc le nombre de dizaines de la racine.

Il faut retrancher de 428 le cube de 7, qui est 343, il reste 85, j'abaisse la tranche suivante 732; mais des quatre parties dont se formait le cube, il ne reste plus que les 3 dernières, c'est-à-dire le triple du carré des dizaines multipliées par les unités, etc.; mais le carré des dizaines donne des centaines, à plus forte raison le triple du carré des dizaines multipliées par les unités donnera des centaines.

Ce produit ne peut donc se trouver que dans les centaines de 85732; nous sommes donc conduits à séparer 2 chiffres sur la droite; il ne reste que 857 qui contiendra cette première partie, le carré des dizaines est 49, 3 fois ce carré est 147; nous connaissons un produit et l'un de ses facteurs, pour trouver l'autre facteur il faut diviser le produit par le facteur connu, il faut diviser 857 par 147, 147 est contenu 5 fois dans 857; mais 857 contient des retenues provenant des 2 dernières parties du cube de la racine, il faut donc essayer le chiffre 5, le moyen le plus simple assurément consiste à faire le cube de la racine trouvée 75, nous avons 421875, que nous retrancherons de 428732 :

	428,732	75	75
cube de 7	343	147	75
reste suivi de la tranche à droite	85 732		375
	421 875		525
reste de la soustraction du cube de 75, retranché du nombre donné	6 857		5625
			75
			28125
			39375
			421875

Donc pour extraire la racine cubique d'un nombre entier, il faut partager le nombre en tranches de 3 chiffres, à partir de la droite (il y a autant de chiffres à la racine que de tranches de 3 chiffres). La dernière tranche à gauche peut n'avoir qu'un chiffre.

On extrait la racine cubique du plus grand cube contenu dans la première tranche à gauche et on l'écrit à la racine; ce premier chiffre trouvé on en fait le cube et on le retranche de la première tranche à gauche, et à la droite du reste obtenu on écrit la tranche suivante.

Pour avoir le second chiffre de la racine on élève au carré la racine trouvée, et on multiplie ce carré par 3, puis on sépare par une virgule deux chiffres sur la droite du nombre formé par la *seconde tranche, précédée du premier reste; cette préparation faite, on divise la partie à gauche de la virgule par le triple carré du chiffre déjà obtenu, le quotient qu'on trouve peut être trop grand parce que le reste obtenu contient en général des retenues provenant des deux autres parties du cube, en supposant que la racine ait été décomposée en deux autres parties. Pour essayer le quotient obtenu, il y a deux méthodes à employer; la plus simple consiste à écrire ce chiffre à la droite du chiffre obtenu, puis à faire le cube du nombre ainsi formé; on retranchera ce cube de l'ensemble des deux premières tranches du nombre donné; si la soustraction est possible le deuxième chiffre est convenable; si la soustraction n'est pas possible, il faut diminuer ce quotient de un, deux, trois unités, jusqu'à ce qu'on obtienne un nombre dont le cube puisse se retrancher du nombre formé par les deux premières tranches à gauche.*

Ce second chiffre obtenu, on l'écrit à la droite du premier chiffre de la racine, et on en fait le carré que l'on multiplie par 3; à la droite du second reste on écrit la troisième tranche s'il y a lieu, et on sépare, par une virgule ou un point, deux chiffres sur la droite du nombre obtenu; on divise le nombre à gauche de la virgule par le triple carré de la racine et on peut obtenir un quotient trop grand (il ne peut assurément être trop petit); pour l'essayer on opérera comme nous venons de le dire, on continuera de la même manière jusqu'à ce qu'on ait abaissé à la suite des restes la dernière tranche.

La seconde méthode d'essai consiste à former les trois parties du cube d'une somme de deux parties; le cube du premier chiffre ayant été retranché de la première tranche à gauche, on peut se servir de cette première opération.

Ainsi on fait le triple carré des dizaines multipliées par les unités.
le triple des dizaines multipliées par le carré des unités.
et enfin le cube des unités.

Le premier est suivi de deux zéros, car il exprime des centaines.
Le second est suivi d'un zéro, car il exprime des dizaines.

Raisonnons encore sur deux exemples.

Premier exemple. Soit à extraire la racine cubique de 186246, si cela est possible; et si ce nombre n'est pas le cube d'un nombre entier, extrayons la racine cubique du plus grand cube contenu dans ce nombre.

186236 est plus grand que mille, donc sa racine est plus grande que dix; elle se compose donc de dizaines et probablement d'unités; or le cube d'un nombre formé de deux parties, c'est-à-dire, dans ce cas, de dizaines et d'unités contient : 1° le cube des dizaines, 2° le triple produit du carré des dizaines multiplié par les unités, 3° du triple produit des dizaines par le carré des unités; 4° enfin du cube des unités.

La première partie étant un nombre de mille, ne pourra être contenue que dans le nombre de mille du nombre donné; elle ne peut donc se trouver que dans les 186000 de ce nombre, *nous serons donc conduits à séparer les mille du nombre donné, ou plus simplement à séparer trois chiffres sur la droite du nombre donné*. Cela fait, nous extrayons la racine du plus grand cube contenu dans 186. 186 est compris entre 125 et 216, la racine cubique de 186 est donc 5. En effet 186 est compris entre 125 et 216, d'ailleurs 186 et 216 diffèrent au moins de *un*; je multiplie ces trois nombres par mille, j'obtiens alors trois nombres de mille qui sont encore par ordre de grandeur, ainsi 186000 est compris entre 125000 et 216000, ou bien entre le cube de 50 et le cube de 60, mais 216000 et 186000 diffèrent au moins d'un mille, donc si au plus petit 186000 j'ajoute 236 moindre que mille, le nombre 186236 sera encore plus petit que 216000, et, par conséquent, ce nombre sera encore compris entre 50 élevé au cube et 60 élevé au cube. La racine du nombre donné est donc comprise entre 50 et 60, donc le chiffre de ses dizaines est 5; je l'écris à la racine (1).

Ce chiffre trouvé, je fais le cube de 5, j'obtiens 125 que je retranche de 186, je trouve pour reste 61; à la droite j'écris la seconde tranche de trois chiffres, j'obtiens alors le nombre 61236.

Ce nombre contient encore les trois autres parties du cube de la racine; la première de ces trois parties *est trois fois le carré des dizaines multipliées par les unités*, mais le carré des dizaines est un nombre de centaines, le triple carré des dizaines par les unités ne

---

(1) On a
$$125<186<216$$
les deux derniers nombres diffèrent au moins de l'unité. Multipliant par 1000 ces trois nombres, on a
$$125\times 1000<186\times 1000<216\times 1000,$$
ou bien en écrivant plus simplement
$$5^3\times 10^3<186000<6^3\times 10^3$$
les deux derniers nombres sont deux nombres de mille et diffèrent au moins d'un mille, donc si à 186000 j'ajoute 236, qui est plus petit que mille, j'aurai encore des nombres par ordre de grandeur, ainsi j'aurai
$$5^3\times 10^3<186236<6^3\times 10^3$$
5 est donc le chiffre des dizaines; ce qu'il fallait démontrer.

peut être contenu que dans les centaines de 61236, je suis donc conduit à séparer deux chiffres sur la droite de 61236; je sépare 36 et j'obtiens 612 centaines. C'est dans ce nombre 612 que se trouve le triple produit du carré des dizaines par les unités de la racine; or je connais 3 fois le carré de 5, c'est 25×3 ou 75, je connais donc un produit et l'un de ses facteurs, je dois donc diviser 612 par 75, je trouve pour quotient 8.

8 peut être trop grand; pour l'essayer je fais le cube de 58, je trouve 195112 qui est plus grand que 186236, ainsi 58 est trop grand, ainsi le chiffre des unités est plus petit que 8.

Essayons 7, faisons alors le cube de 57, ce cube est égal à 185093 plus petit que le nombre donné, donc 57 est la racine cubique de 186236, à moins d'une unité; puisque 186236 est compris entre 57^3 et 58^3.

Formons ci-dessous le tableau de l'opération.

1° *Avec explication.*

	186236	5
Cube de 5.	125	25×3 ou 75 triple carré des dizaines.
1er reste suivi de la seconde tranche.	61236	612 : 75, donne pour quotient 8.

Essai du chiffre 8 :

1re Méthode. 58^3 est égal à 195112.

2e Méthode. $75 \times 100 \times 8 = 60000$

$5 \times 8^2 \times 3 = 9600$

$8^3 = 512$

Somme des trois dernières parties 70112

Ce nombre est plus grand que 61236

8 est donc trop grand.

2° *Sans explication.*

186236	5
61236	75. 8

58	57
58	57
464	399
290	285
3364	3249
58	57
26912	22643
16820	16245
195112	185093

Second exemple. Extraire la racine cubique de 23456238. Ce nombre est plus grand que 1000, sa racine est plus grande que 10, donc cette racine contient des dizaines et des unités ; mais le cube des dizaines est un nombre de mille qui ne peut faire partie que des mille du nombre donné. Je sépare ainsi les trois premiers chiffres à droite et je suis conduit à extraire la racine du plus grand cube contenu dans 23456 ; or, ce nombre est lui-même plus grand que *mille*, je suis donc encore conduit à séparer les trois premiers chiffres à droite et, par suite, à extraire la racine du plus grand cube contenu dans 23.

Ainsi j'ai partagé le nombre en tranches de trois chiffres à partir de la droite, et j'extrais la racine cubique du plus grand cube contenu dans 23, le reste comme dans la règle ci-dessus ; après avoir trouvé la racine de 23456, je ferai le carré de cette racine, puis, après l'avoir multiplié par 3, je me servirai de ce triple carré obtenu pour trouver le chiffre des unités.

Opération.

	23.456.238	287	
	8	12...9 Essai de 9.	29
1er reste suivi de la première tranche.	154.56		29
	21932		261
2e reste suivi de la troisième tranche.	252 42.38	784 × 3 est égal à 2352...9	58
			841
			29
			7569
			1682
		Cube de 29....	24389
		9 est trop grand.	
	Essai de 8.		28
			28
			224
			56
		Carré de 28....	784
			28
			6252
			1568
		Cube de 28....	21932

Essai du chiffre des unités.	Essai de 8.
Essai de 9. 289	288
289	288
2601	2304
2312	2304
578	576
83521	82944
289	288
751689	663552
668168	663552
167042	165888
24137569	23887872
9 est trop grand.	7 est le chiffre des unités.

Quand en essayant un chiffre on trouve qu'il est beaucoup trop grand, on peut diminuer ce chiffre de deux ou trois unités, mais alors on peut avoir trop diminué; dans ce cas pour le vérifier on se sert de la remarque suivante.

La différence entre les cubes de deux nombres entiers consécutifs est égale à trois fois le carré du plus petit plus 3 fois ce plus petit plus un. En effet, soit a un nombre entier et $a+1$ le nombre entier suivant, le cube de a est a^3, le cube de $(a+1)^3$ est a^3+3a^2+3a+1, la différence est bien $3a^2+3a+1$, donc si le reste obtenu est plus grand que trois fois le carré de la racine plus 3 fois cette racine plus un, la racine sera trop petite et il faudra l'augmenter.

Comme dans les carrés, il y a des moyens de reconnaître, sans extraire la racine, si un nombre entier n'est pas le cube d'un autre nombre entier. Ainsi les nombres terminés par 8 ne sont pas des cubes; les nombres terminés par deux zéros ne sont pas des cubes; si un nombre est divisible par 2, son cube est divisible par 8.

Soit à élever $\frac{5}{7}$ à la troisième puissance.

J'élève d'abord au carré, j'obtiens $\frac{5^2}{7^2}$, puis je multiplie $\frac{5^2}{7^2}$ par $\frac{5}{7}$, j'obtiens $\frac{5^2 \times 5}{7^2 \times 7}$ c'est-à-dire $\frac{5^3}{7^3}$; ainsi pour élever une fraction au cube il faut donc élever ses deux termes au cube.

Réciproquement, si les deux termes d'une fraction sont des cubes, pour extraire la racine cubique de cette fraction il faudra extraire la racine cubique de chacun de ses deux termes. Mais qu'est-ce qu'extraire la racine cubique de $\frac{23}{15}$, par exemple, 23 et 15 ne sont pas des cubes. Alors il est nécessaire de définir l'opération qu'on se propose et qu'on nomme extraction avec une approximation (1).

Prenons un exemple simple, soit la fraction $\frac{18}{64}$; 18 est compris entre 8 et 27, $\frac{18}{64}$ sera donc compris entre $\frac{8}{64}$ et $\frac{27}{64}$. Or $\frac{8}{64}$ est le cube de $\frac{2}{4}$, $\frac{27}{64}$ est le cube de $\frac{3}{4}$. Ainsi $\frac{18}{64}$ est compris entre le cube de $\frac{2}{4}$ et le cube de $\frac{3}{4}$; on dira alors que $\frac{2}{4}$ est la racine cubique de $\frac{18}{64}$ à $\frac{1}{4}$ près.

C'est donc par analogie qu'on dit que l'on extrait une racine cubique, de même qu'on extrait la racine cubique de 29 en extrayant la racine cubique du plus grand cube entier contenu dans 29.

Mais pour les fractions il y a cette différence que le dénominateur d'une fraction pouvant être modifié, on peut avoir une approximation aussi grande qu'on le veut, comme on l'a vu dans l'extraction de la racine carrée des fractions.

Quand le dénominateur d'une fraction n'est pas un cube exact, on peut transformer la fraction en une autre dont le dénominateur soit un cube.

Par exemple, soit la fraction $\frac{4}{7}$; si je multiplie les deux termes par 7^2, je trouve $\frac{4 \times 7^2}{7^3}$; effectuons au numérateur, nous trouvons $\frac{196}{7^3}$.

Or, 196 est compris entre 125 et 216; la racine cubique de 196 est donc comprise entre 5 et 6, et par suite la racine de $\frac{196}{7^3}$ est comprise entre $\frac{5}{7}$ et $\frac{6}{7}$, ainsi la racine de $\frac{4}{7}$ est $\frac{5}{7}$ à moins d'un septième d'approximation.

(1) Si les deux termes d'une fraction ne sont pas les cubes de nombres entiers, la racine de la fraction est incommensurable.

D'où l'on voit qu'il suffit de multiplier le numérateur de la fraction par le carré du dénominateur de cette fraction; le produit étant obtenu on extrait sa racine cubique à moins d'une unité près, et on divise cette racine par le dénominateur de la fraction donnée. La fraction qu'on obtient est la racine de cette fraction donnée à moins de un *divisé par le dénominateur de cette fraction.*

42. Il est évident que, dans certains cas, il est inutile de faire le calcul compliqué pour juger du degré d'approximation. Soit, par exemple, à extraire la racine cubique de $\frac{15}{392}$.

En décomposant le dénominateur de cette fraction en ses facteurs, je trouve $2^3\times7^2$. Or, si je multiplie les deux termes de cette fraction par 7, j'obtiendrai $\frac{15\times7}{2^3\times7^2\times7}$, ou bien $\frac{15\times7}{2^3\times7^3}$, c'est-à-dire $\frac{105}{14^3}$; la racine cubique de cette fraction est $\frac{4}{14}$, à moins d'un quatorzième d'unité.

Ainsi, quand on peut apercevoir que le dénominateur renferme des facteurs élevés au cube, l'extraction de la racine cubique de cette fraction peut être simplifiée.

Soit encore pour exemple $\frac{7}{3^4\times5^2}$, on trouve, en multipliant les deux termes de la fraction par des facteurs qui rendent le dénominateur un cube exact, $\frac{7\times3^2\times5}{3^6\times5^3}$, ou bien $\frac{7\times45}{(3^2\times5)^3}=\frac{7\times45}{(45)^3}$.

De ce qui précède résulte un moyen d'obtenir la racine cubique d'un nombre entier à une approximation marquée par une fraction qui a pour dénominateur un nombre entier, le numérateur étant l'unité.

Soit, par exemple, à extraire la racine cubique de 56 à $\frac{1}{5}$ près. Je transforme 56 en 5$^{\text{ièmes}}$, ce qui ramène au cas précédent; ainsi j'obtiens d'abord $\frac{56\times5}{5}$. En raisonnant maintenant sur ce nombre comme sur une fraction ordinaire, je multiplierai les deux termes de ce nombre fractionnaire par le carré du dénominateur, ce qui donnera $\frac{56\times5\times5^2}{5^3}$ ou bien $\frac{56\times5^3}{5^3}$. D'où se déduit la règle pratique:

Pour extraire la racine cubique d'un nombre à $\frac{1}{5}$ *près, multipliez ce nombre par le cube du dénominateur 5, extrayez la racine cubique du produit obtenu et divisez cette racine par* 5 (1).

Si l'on veut extraire la racine cubique *d'un nombre fractionnaire* à un 7e près, on opérera de la même manière, c'est-à-dire qu'on multipliera le nombre fractionnaire par le cube de 7, et qu'on *extraira, à une unité près*, la racine cubique du produit, ensuite on divisera la racine par 7.

Mais pour extraire la racine cubique d'un nombre fractionnaire, à une unité près, il faut extraire l'entier de ce nombre fractionnaire et extraire ensuite la racine cubique de ce nombre entier. Soit, par exemple, à extraire la racine cubique de $\frac{743}{6}$ à une unité près. J'extrais l'entier, j'obtiens 123 pour quotient, 5 pour reste; ainsi $\frac{743}{6}$ est égal à 123 plus $\frac{5}{6}$.

123 est compris entre 64 et 125, mais 123 et 125 diffèrent de deux unités, donc en ajoutant a 123 la fraction $\frac{5}{6}$, le nombre $123 + \frac{5}{6}$ sera encore compris entre 64 et 125, donc la racine de $\frac{743}{6}$ est 4, à moins d'une unité.

Cela posé extrayons la racine cubique de $\frac{32}{7}$ à moins de $\frac{1}{4}$ d'unité.

J'aurai $\frac{32 \times 4^3}{7}$ dont il faudra extraire la racine cubique à moins d'une unité, ce que nous savons faire; nous aurons $\frac{32 \times 64}{7}$, c'est-à-dire $\frac{2048}{7}$ ou bien 235 plus $\frac{3}{7}$.

---

(1) Soit à extraire la racine de 56 à $\frac{1}{5}$ près, soit x le nombre entier de 5èmes contenu dans la racine cubique de 56, on aura $\sqrt[3]{56}$ comprise entre $\frac{x}{5}$ et $\frac{(x+1)}{5}$, c'est-à-dire $\frac{x}{5} < \sqrt[3]{56} < \frac{x+1}{5}$, d'où $\frac{x^3}{5^3} < 56 < \frac{(x+1)^3}{5^3}$, et multipliant par 5^3, on trouve $x^3 < 56 \times 5^3 < (x+1)^3$; donc x est la racine du plus grand cube contenu dans 56×5^3; ce qu'il fallait démontrer.

La racine cubique de 235 est 6 à une unité près, la racine cubique de $\frac{32}{7}$ est donc $\frac{6}{4}$ à $\frac{1}{4}$ près.

Pour extraire par des principes directs la racine cubique d'une fraction décimale, on s'appuie sur ce principe *que si on élève un nombre décimal au cube, le nombre des chiffres décimaux de ce cube est triple du nombre des chiffres décimaux du nombre donné.*

Ainsi pour extraire la racine cubique d'un nombre décimal, il faut préalablement s'assurer que le nombre des chiffres décimaux, soit 3, 6, 9 ou généralement un multiple de 3, ce qu'on peut faire en écrivant un ou deux zéro à la droite du nombre décimal; on fait ensuite abstraction de la virgule et extrayant la racine cubique du nombre entier qui en résulte, cette racine obtenue à moins d'une unité, on repousse sur la droite autant de chiffres décimaux qu'il y avait de tranches de trois chiffres décimaux dans le nombre donné en y comprenant les zéros ajoutés s'il y avait eu lieu.

Si l'on veut extraire la racine cubique d'un nombre entier à une fraction décimale près d'un certain ordre, il faudra écrire trois zéros si l'approximation est d'un dixième; six zéros si l'approximation est d'un centième et, en général, d'un nombre triple de zéros qu'il y a de chiffres décimaux dans l'approximation. Du nombre entier qui résulte, on extrait la racine cubique à moins d'une unité, puis on sépare sur la droite, par une virgule, un chiffre, ou deux, ou trois, suivant que l'approximation demandée est un dixième, un centième ou un millième.

On veut, par exemple, extraire la racine cubique de 34 à un centième près, on écrira six zéros à la suite de 34, on aura ainsi 34000 000, puis extrayant la racine cubique de ce nombre à une unité près, et séparant deux chiffres décimaux sur la droite, on aura la racine cubique de 34 à moins de 0,01.

Pour extraire la racine cubique de 3,54, à un centième près, il faut qu'il y ait six chiffres décimaux, j'écrirai donc quatre zéros à la droite de 3,54, puis j'opérerai sur ce nombre comme dans le cas précédent.

Pour extraire la racine cubique d'un nombre à $\frac{3}{21}$ d'unité près, je remarquerai que $\frac{3}{21}$ est égal à $\frac{1}{7}$ c'est-à-dire à $\frac{1}{\frac{21}{3}}$ ou bien $\frac{1}{\left(\frac{21}{3}\right)}$; le dénominateur de cette fraction serait $\frac{21}{3}$. Il faudrait alors multiplier le nombre donné par le cube de $\frac{21}{3}$, c'est-à-dire $\frac{21^3}{3^3}$, extraire la racine cubique du produit, à moins d'une unité, et enfin on diviserait cette racine par $\frac{21}{3}$ ou bien, ce qui revient au même, on multiplierait par $\frac{3}{21}$, car pour diviser un nombre par une fraction, il faut multiplier le nombre par la fraction diviseur renversée.

En généralisant par un exemple quelconque, on voit que $\frac{5}{8}$ est égal à $\frac{1}{\frac{8}{5}}$; par suite, pour extraire la racine cubique de 18, à $\frac{5}{8}$ près, il faut multiplier 18 par $\frac{8}{5}$ élevé au cube, etc.

Opération.

$$18 \times \frac{8^3}{5^3} = \frac{18 \times 512}{125},$$

Effectuant on a $\frac{9216}{125}$, on extrait l'entier et l'on trouve 73; il faut extraire la racine cubique de 73, à moins d'une unité, on trouve 4 pour racine, puis divisant par $\frac{8}{5}$ ou multipliant par $\frac{5}{8}$, on trouve enfin pour racine cubique $4 \times \frac{5}{8}$ ou $\frac{20}{8}$ ou bien $\frac{5}{2}$, c'est-à-dire 2 plus $\frac{1}{2}$.

Justifions ce procédé.

18 est égal à $18 \times \left(\frac{8}{5}\right)^3 : \left(\frac{8}{5}\right)^3$; la racine cubique de $18 \times \left(\frac{8}{5}\right)^3$ est comprise entre 4 et 5. Ainsi $18 \times \frac{8^3}{5^3}$ est compris entre 4^3 et 5^3; en multipliant ces trois nombres par $\left(\frac{5}{8}\right)^3$ on trouve les trois nombres par ordre de grandeur

$$\frac{4^3 \times 5^3}{8^3}, \quad 18 \times \left(\frac{8}{5}\right)^3 : \left(\frac{5}{8}\right)^3, \quad \frac{5^3 \times 5^3}{8^3},$$

ou bien

$$\left(\frac{4 \times 5}{8}\right)^3, \quad 18 \text{ et } \left(\frac{5 \times 5}{8}\right)^3,$$

Extrayant la racine cubique de chacun de ces nombres, on trouve enfin les trois nombres par ordre de grandeur

$$\frac{4\times5}{8},\ \sqrt[3]{18}\ \text{et}\ \frac{5\times5}{8}.$$

Or, le premier et le dernier diffèrent de $\frac{5}{8}$, donc $\frac{4\times5}{8}$, est la racine cubique de 18, à moins de $\frac{5}{8}$ d'unité près. Ce qu'il fallait démontrer (1).

Enfin pour extraire la racine cubique d'une fraction ordinaire à une approximation marquée par une fraction décimale, il faut réduire la fraction ordinaire en fraction décimale, et opérer ensuite sur cette fraction comme il a été dit plus haut.

Nous avons vu que pour extraire la racine sixième d'un nombre, il faut extraire la racine carrée et extraire ensuite la racine cubique de cette racine carrée. De même pour extraire la racine neuvième, il faut extraire deux racines cubiques successives.

De même pour extraire la racine 12e d'un nombre, comme 12 est égal à $2\times2\times3$, il faudrait extraire la racine carrée de ce nombre, puis la racine carrée de cette racine carrée, et enfin la racine cubique de cette dernière.

Nous saurons maintenant trouver une moyenne proportionnelle entre deux nombres, puisque nous savons extraire la racine carrée d'un nombre.

---

(1) Soit à extraire la racine cubique de N à moins de $\frac{p}{q}$. Nommons x le plus grand nombre entier de fois que $\frac{p}{q}$ est compris dans la racine de N; on a

$$x\times\frac{p}{q}<\sqrt[3]{N}<(x+1)\times\frac{p}{q}$$

d'où

$$x^3\times\left(\frac{q}{p}\right)^3<N<(x+1)^3\times\left(\frac{p}{q}\right)^3;$$

divisant les trois nombres par $\left(\frac{p}{q}\right)^3$, on obtient

$$x^3<N\times\left(\frac{q}{p}\right)^3<(x+1)^3;$$

x est donc la racine cubique de $N\times\left(\frac{q}{p}\right)^3$ à moins d'une unité.

1^er^ Exemple. Trouver une moyenne proportionnelle entre 28 et 63; on a, en nommant x cette moyenne,

$$28 : x :: x : 63.$$

Donc $\quad x \times x, \quad$ ou bien $\quad x^2 = 28 \times 63.$

Le carré de x est égal à 1764, donc la moyenne géométrique ou proportionnelle demandée est 42. Ainsi l'on a

$$28 : 42 :: 42 : 63.$$

2^e^ Exemple. Trouver la moyenne géométrique entre 24 et 17.

On a $\quad 24 : x :: x : 17,$

et par suite $\quad x^2 = 24 \times 17.$

Donc la moyenne géométrique entre 24 et 17 est $\sqrt{24 \times 17}$, cette racine est 20,19, à un centième près.

Donc la moyenne géométrique est 20, 19, à un centième près (1).

---

(1) Quand un nombre entier est le cube d'un nombre entier, s'il est divisible par 2, il devra être divisible par 8; s'il est divisible par 3, il devra être divisible par 27; s'il est divisible par 5 il devra être divisible par 125; on pourra déduire de là un moyen de reconnaître si un nombre entier n'est pas le cube d'un nombre entier, etc.

LIVRE QUATRIÈME.

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES.

Progressions arithmétiques.

43. On nomme progression arithmétique ou par différence une suite de termes tels que chacun d'eux surpasse celui qui le précède, ou en est surpassé d'un nombre constant, qu'on nomme raison; dans le premier cas, la progression est croissante; dans le second, elle est décroissante; ainsi, la suite naturelle des nombres entiers est une progression dont la raison est 1.

Le théorème suivant résulte de la définition.

Premier principe. Un terme de rang quelconque est égal au premier terme augmenté de la raison répétée autant de fois qu'il y a de termes avant lui, quand la progression arithmétique est croissante en *moins*, etc., quand la progression est décroissante.

En effet, le second est égal au premier augmenté d'une fois la raison; le troisième est égal au deuxième plus la raison, ou bien il est égale au premier plus 2 fois la raison; et ainsi de suite.

Second principe. La somme des deux termes à égale distance des extrêmes, est égale à la somme des extrêmes.

En effet, nous avons 4 termes : le premier et le dernier, puis les deux intermédiaires, c'est-à-dire, les 2 extrêmes et les deux moyens; pour fixer les idées supposons que le premier moyen ait 5 termes avant lui, et qu'il y en ait 5 après le second moyen, il en résulte que le premier moyen est égal au premier plus cinq fois la raison et puisque le dernier terme est égal au second moyen plus 5 fois la raison; les 4 termes forment une équidifférence, et par suite, on voit que la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens. Ce qu'il fallait démontrer. Prenons deux exemples :

1° $\div$ 3.5.7.9.11.13.15.17.19.

2° $\div$ 28.25.22.19.16.13.10.7.4.

On énonce 3 est à 5 est à 7, etc., ou bien 3 est à 5, comme 5 est à 7, comme 7 est à 9.

La raison de la première progression est 2. Cette progression est croissante, la seconde est décroissante.

Le terme 15 est égal à 3, plus six fois la raison, et l'on voit que 19 plus 3 est égal à 13 plus 7.

Trouvons maintenant la somme des termes d'une progression. Cette somme est égale au premier terme plus le dernier, le tout multiplié par le nombre des termes de la progression divisé par 2.

Pour le démontrer, après avoir écrit la progression donnée sur une ligne horizontale, nous écrirons la même progression au-dessous de la première, mais en commençant par le dernier terme, c'est-à-dire le dernier sous le premier, l'avant-dernier sous le second, et ainsi de suite (la seconde progression sera décroissante).

Les termes à égale distance des extrêmes seront donc ainsi les uns sous les autres; par suite, la somme des termes correspondants deux à deux sera toujours égale à la somme des extrêmes; mais en faisant la somme de tous les termes, on obtient 2 fois la somme demandée. *Donc enfin, la somme des termes est égale à la somme des extrêmes divisée par 2, et multipliée par le nombre des termes.*

Problème. Insérer un certain nombre de moyens arithmétiques ou différentiels entre 2 nombres donnés.

Pour fixer les idées, prenons 6 et 42 entre lesquels il faut insérer 11 moyens différentiels.

Supposons le problème résolu, il y aura en tout douze termes qui précéderaient 42; 42 serait donc égal à 6 plus 12 fois la raison; 12 fois la raison serait donc égal à 42 — 6, c'est-à-dire 36; la raison serait donc égale à 36 divisé par 12, c'est-à-dire 3; d'où l'on tire cette règle : Retranchez le plus petit nombre du plus grand, et divisez le reste par le nombre de termes à insérer plus un, vous aurez la raison.

En traitant la même question avec des lettres, insérer m moyens arithmétiques entre deux nombres donnés a et b, on a la raison $r=\frac{b-a}{m+1}$.

Si entre les termes consécutifs d'une progression par différence on insère un nombre égal de termes de moyens différentiels, toutes les progressions qu'on obtiendra n'en formeront qu'une seule, car la raison sera partout la même, et ces progressions ont des termes communs.

Quand une progression arithmétique commence par zéro, par exemple,

$$\div 0.3.\ 6.\ 9.\ 12.\ 15.\ 18 \ldots\ 27 \ldots\ 45 \text{ etc.},$$

ou, pour simplifier :

$$0.3.3\times2.3\times3.\ 3\times4.3\times5.\ 3\times6\ldots\ 3\times9\ldots\ 3\times15,$$

tous les multiples de la raison font partie des termes de la progression arithmétique commençant par zéro; de plus, le nombre entier qui multiplie la raison indique combien il y a de termes qui précèdent celui que l'on considère; d'où résultent ces deux propriétés fondamentales de la *théorie des logarithmes* : la somme de 2 termes d'une pareille progression est un terme de la progression, car la somme de 2 multiples d'un nombre est un multiple de ce nombre.

En second lieu, le nombre de termes qui précèdent celui que l'on obtient, en ajoutant 2 termes de la progression est égal à la somme des 2 nombres de termes qui précèdent ceux que l'on a ajoutés; si j'ajoute, par exemple, 6 et 12, j'obtiens 18, c'est-à-dire que j'ai : $2.3+4.3=6.3$, c'est bien égal à $(4+2).3$. Tout multiple d'un terme d'une pareille progression est un terme de la progression; ce qui est évident.

Pour les progressions décroissantes, on dit le second terme égale le premier *moins* la raison, le troisième égale le premier *moins* deux fois la raison, etc.

Progressions géométriques.

44. De même que l'on passe des proprietés des proportions par différence aux proportions par quotient en changeant quelques mots, de même pour trouver les propriétés des progressions géométriques, il suffit de changer dans les énoncés des principes des progressions arithmétiques les mots *ajouté*, *diminué* en ceux de multiplié et divisé, puis le mot multiple en celui de puissance.

Ainsi, une progression géométrique par quotient est une suite de termes tels que chacun d'eux est égal à celui qui le précède, multiplié par la raison. Quand les termes de gauche à droite croissent, la progression est dite croissante; elle est décroissante dans le cas contraire.

De la définition d'une progression géométrique ou par quotient résulte le principe suivant :

Un terme de rang quelconque est égal au premier terme multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre de termes qui précèdent : soit, par exemple, la progression :

$$\div 3:6:12:24:48:96:192:384:768.$$

$$\div 3:3\times2:3\times2^2:3\times2^3:3\times2^4:3\times2^5:3\times2^6:3\times2^7:3\times2^8:3\times2^9.$$

Le tableau suivant donne la démonstration des principes :

$$\begin{aligned}
6 &= 3\times2\\
12 &= 6\times2 = 3\times2\times2 = 3\times2^2\\
24 &= 12\times2 \ldots\ldots\ldots\ldots = 3\times2^2\times2 = 3\times2^3\\
48 &= 24\times2 \ldots\ldots\ldots\ldots = 3\times2^3\times2 = 3\times2^4
\end{aligned}$$

Ainsi, en nommant a le premier terme, q la raison, l le dernier terme, n le nombre des termes de la progression, $l=a\times q^{n-1}$.

Il est évident que si l'on prend 2 termes à égale distance des extrêmes, le produit de ces termes est égal au produit des extrêmes. Ce serait la même démonstration que pour les progressions arithmétiques avec la modification énoncée ci-dessus (1).

Somme des termes d'une progression géométrique.

Soit la progression

$$\div a:b:c:d:e:f\ldots\ldots:h:k:l;$$

en appelant s la somme, on a

$$s=a+b+c+d+e+f\ldots\ldots+h+k+l.$$

Jusque-là, rien n'indique que les termes sont en progression géométrique; nous l'exprimons en disant qu'en multipliant a par la raison q, nous aurons b; b multiplié par la raison donnera c, et ainsi des autres produits.

On peut l'indiquer en multipliant la somme et ses différentes parties par la raison, de cette manière :

$$: sq=aq+bq+cq\ldots\ldots+q+kq+lq.$$

En retranchant une fois la somme, et en remarquant que les termes égaux disparaissent, et qu'il reste seulement le dernier terme $\times$ par la raison, puisque le premier terme doit être retranché, on trouve $sq-s=lq-a$, c'est-à-dire $s\,(q-1)=lq-a$; puis, d'après la définition de la division, $s=\dfrac{lq-a}{q-1}$.

(1) A une première lecture on fera bien de prendre des nombres sur lesquels on appliquera les raisonnements

Si la progression est décroissante, c'est-à-dire, si la raison est plus petite que l'unité, 1 ne peut pas se retrancher de q, il faut donc faire la soustraction dans l'ordre inverse, ce qui donne $s-sq=a-lq$, et enfin $s=\frac{a}{1-q}-\frac{lq}{1-q}$.

Une observation très-importante doit être faite ici : si la progression est décroissante, les termes vont en diminuant, et si l'on prend un nombre indéfini de termes, le dernier pourra être considéré comme nul, en sorte qu'alors on aura $s=\frac{a}{1-q}$, c'est-à-dire que la somme des termes d'une progression décroissante et prolongée à l'infini est égale au premier terme divisé par 1 moins la raison (1).

Une application simple de cette formule, fait trouver la valeur d'une fraction périodique simple ou mixte.

Soit, par exemple, 0,34343434.

Cela est égal à $\frac{34}{100}+\frac{34}{100^2}+\frac{34}{100^3}$; c'est donc une progression géométrique commençant par 34 centièmes, et qui a pour raison $\frac{1}{100}$, ce qui donne $S=\frac{\frac{34}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{34}{99}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Soit m un nombre de moyens géométriques à insérer entre a et b.

Ce problème revient à celui-ci : trouver la raison ; en divisant le dernier terme par le premier on obtient la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent : $\frac{b}{a}=q^{m+1}$, et par suite la raison $q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$.

On déduit de là que si, entre les différents termes consécutifs d'une progression géométrique, on insère le même nombre de moyens géométriques, les progressions partielles qu'on obtient forment une même progression, car la raison est la même partout puisque l'on a toujours un radical de même indice à extraire, et que la quantité sous le radical est la même puisqu'elle est la raison de la progression.

Prenons maintenant une progression géométrique commençant par

---

(1) Voir en algèbre (équations) les problèmes qu'on peut se proposer sur les progressions.

l'unité ; dans une pareille progression, tous les termes sont des puissances de la raison indiquée par le nombre des termes qui précèdent celui que l'on considère. Dans ces progressions, le produit de 2 termes est un terme de la progression, et le nombre de termes qui précèdent ce dernier est égal à la somme des nombres de termes qui précèdent les 2 facteurs du produit.

Soit la progression

$$\div\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 : q^7 \ldots$$

q^2 multiplié par q^4 est égal à q^6, etc.

Théorie des logarithmes (1).

45. Dans la théorie des logarithmes, on a pour but de démontrer qu'on peut remplacer, au moyen des logarithmes, des multiplications par des additions, des divisions par des soustractions, des élévations aux puissances par des multiplications, enfin que pour extraire une racine il suffit de faire une division.

En second lieu on indique comment il faudra s'y prendre pour effectuer les simplifications de calculs énoncées ci-dessus. Enfin on donnera une idée des erreurs que l'on peut commettre dans ces opérations simplifiées.

On nomme logarithme d'un nombre le terme de la progression arithmétique commençant par zéro et correspondant à ce nombre qui fait partie des termes d'une progression géométrique commençant par l'unité. Zéro et l'unité se correspondent dans les deux progressions.

Soient par exemple les deux progressions dont les termes se correspondent

$$\div\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 : 19683 \ldots$$
$$\div 0 . 2 . 4 . 6 . 7 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 \ldots$$

0 est le logarithme de 1, 2 est le logarithme de 3, 4 est le logarithme de 9, etc.

Nous avons vu (nº 43) que la somme de deux termes d'une progression arithmétique qui commence par zéro est un terme de cette progression.

---

(1) Nous renvoyons à la seconde partie de ce volume, Algèbre (nºs 60-68), pour les démonstrations des principes relatifs aux quantités négatives. Ainsi nous admettons les règles relatives à ces quantités négatives.

Nous avons vu (nº 44) que le produit de deux termes d'une progression géométrique qui commence par 1 est un terme de cette progression.

Dans ces deux principes il y a une relation commune, c'est que le rang du produit ou de la somme des termes de chaque progression est égal à la somme des rangs des deux facteurs ou des deux parties (en appelant rang d'un terme pour plus de simplicité le nombre de termes qui précèdent celui que l'on considère). La théorie des logarithmes est fondée sur ce dernier principe.

Ainsi multiplions 27 par 243, nous obtenons 6561, terme de la progression géométrique qui en a 8 avant lui, c'est-à-dire 3 plus 5.

Faisant la somme des logarithmes de 27 et de 243, c'est-à-dire de 6 et de 8, nous obtenons 14, c'est-à-dire le logarithme de 6561.

D'où l'on déduit que *le logarithme d'un produit est égal à la somme de logarithmes de ses facteurs.*

Ce principe doit être démontré d'une manière générale.

On peut faire cette démonstration de la manière suivante, sans prendre un exemple (1).

Dans une progression géométrique commençant par l'unité un terme de rang quelconque est égal à la raison *élevée à une puissance marquée par le nombre de termes qui le précèdent.*

Le produit de deux termes de la progression géométrique commençant par l'unité sera la raison élevée à une puissance égale à la somme des puissances de la raison dans chacun de ces termes, c'est-à-dire que le rang de ce produit dans la progression géométrique sera égal à la somme des rangs des deux facteurs.

En second lieu la somme de deux termes d'une progression arithmétique commençant par zéro, est un terme de cette progression, car tous les termes d'une pareille progression arithmétique sont des multiples de la raison, et le rang de la somme des deux termes est égal à la somme des rangs de ces termes.

Donc, le logarithme d'un produit de deux facteurs est égal à la somme des logarithmes des facteurs (2).

Ce principe peut s'étendre à un produit d'un nombre quelconque de facteurs.

---

(1) Il faut rappeler ici que $5^3 \times 5^7$, par exemple, est égal à 5^{10}, ce qu'on sait déjà et qu'on peut voir dans l'Algèbre (nº 8).

(2) Nous engageons le lecteur à démontrer les principes d'une manière générale,

Soit, par exemple, le produit $27 \times 9 \times 81 \times 3$, on peut écrire $27 \times 9 \times 81 \times 3 = 27.9.81 \times 3$. En considérant le produit des trois premiers facteurs comme effectué, alors on a un produit de deux facteurs et il en résulte

$$\log 27.9.81 \times 3 = \log 27.9.81 + \log 3.$$

De même $$\log 27.9.81 = \log 27.9 + \log 81.$$

De même $$\log 27.9 = \log 27 + \log 9.$$

Donc enfin $\log(27 \times 9 \times 81 \times 3) = \log 27 + \log 9 + \log 81 + \log 3.$

Ce qu'il fallait démontrer.

En suivant les conséquences de ce principe, on trouve que $\log 9^4 = \log(9 \times 9 \times 9 \times 9)$, c'est-à-dire $\log 9 + \log 9 + \log 9 + \log 9$, ou bien 4 fois $\log 9$, ainsi $\log 9^4 = 4 \times \log 9$. *Donc, le logarithme de la puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre multiplié par l'indice de la puissance.*

Le logarithme du quotient d'une division est égal au logarithme du dividende diminué du logarithme du diviseur.

En effet, le dividende étant le produit du diviseur multiplié par le quotient, il en résulte que le *logarithme du dividende* est égal *au logarithme du diviseur plus* le logarithme du quotient, donc le logarithme du quotient est égal au logarithme du dividende, moins le logarithme du diviseur.

Par analogie, on est conduit à dire que le logarithme d'une fraction est égal au logarithme du numérateur diminué du logarithme du dénominateur. Nous disons par analogie, car rien ne justifie encore ce principe, puisqu'on est conduit à retrancher un nombre plus grand d'un nombre plus petit. (Au reste ce qui est relatif au calcul des fractions par les logarithmes peut être donné sans qu'il soit nécessaire de considérer des logarithmes négatifs.)

Pour l'extraction des racines, qui est l'opération inverse de l'élévation aux puissances, on verra que le logarithme de la racine 5ᵉ de 27 est égal au logarithme de 27 divisé par 5. En effet, la définition de cette racine est qu'en l'élevant à la puissance 5ᵉ on aura 27,

---

quand cela est possible, sans employer d'exemple particulier; cependant il faut commencer par prendre des nombres; ainsi on pourrait appliquer les raisonnements qui précèdent aux deux expressions

$$\div\div 1 : 2^1 : 2^2 : 2^3 : 2^4 : 2^5 : 2^6 : 2^7$$

$$\div 0 . 3 2 . 3 . 3 . 3 . 4 . 3 . 5 . 3 . 6 . 3 . 7 . 3.$$

ainsi, en posant $x=\sqrt[5]{27}$, on aura $x^5=27$, par suite $5\log x=\log 27$, et, par conséquent, $\log x=\frac{\log 27}{5}$.

Donc nous pouvons dire que si nous avons une table de logarithmes renfermant d'une part les nombres, et en regard leurs logarithmes, on pourra remplacer une *multiplication par une addition*, *une division par une soustraction*; *l'élévation à une puissance par une multiplication*, et enfin, *les extractions de racines par des divisions*.

En outre de la facilité des calculs qui résulte de l'emploi des logarithmes, il y a certaines questions qui ne peuvent être résolues que par leur moyen, et maintenant les logarithmes jouent un grand rôle dans toutes les parties des mathématiques (1).

Les propriétés des logarithmes sont fondées sur l'emploi de progressions commençant par 1 et par zéro, *elles n'existeraient pas si les progressions géométrique et arithmétique commençaient par des nombres quelconques*. Ainsi la somme de deux termes d'une progression qui ne commence pas par zéro, n'est pas un terme de la progression qui en a autant avant lui qu'il y en avait avant les deux termes ajoutés.

Ce qu'on peut voir ainsi : $a+r.a+2r.a+3r.a+4r$; si l'on ajoute $a+2r$ et $a+4r$, on aura $2a+6r$; si ce nombre était un terme de la progression on aurait $a+6r$ égal à un certain nombre de fois la raison, donc a serait un multiple de la raison et, par suite, $a+(a+6r)$ aurait plus de six termes avant lui.

Il en serait de même pour la multiplication de deux termes d'une progression qui commencerait par b et qui serait $\div b:bq:bq^2:bq^3:bq^4$, etc.

Par exemple, je multiplie bq^2 par bq^4, j'obtiens b^2q^6 ou bien $b\times bq^6$; si ce produit était un terme de la progression, bq^6 serait une puissance de la raison, b serait donc une puissance de la raison, alors $b\times(bq^6)$ n'en aurait pas *six* avant lui, et par suite la propriété fondamentale des logarithmes n'existerait pas.

Système de logarithmes employé.

46. On prend pour raison de la progression géométrique 10, et pour raison de la progression arithmétique 1; en sorte qu'on a les deux progressions

(1) Consulter la brochure de M. Vallès sur les logarithmes.

$$\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000\ldots \text{etc.},$$
$$: 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5\ldots\ldots \text{etc.}$$

Ainsi 1 est le logarithme de 10 (10 est alors la base du système, car on nomme base d'un système de logarithme le nombre qui a pour logarithme l'unité), 2 est le logarithme de 100, 3 est le logarithme de 1000, etc.

Dans la progression géométrique ne se trouvent pas les nombres entiers 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. En un mot, il n'y a que des puissances de 10 qui fassent partie des termes de cette progression.

Voici comment on peut concevoir que tous les autres nombres entiers puissent en faire partie, du moins approximativement.

On insère un grand nombre de moyens géométriques entre 1 et 10, et l'on peut dire que l'on trouvera, si l'on veut, des termes d'une progression qui diffèrent entre eux de quantités très-petites, aussi petites même que l'on veut; entre ces termes se trouveront les nombres entiers 2, 3, 4, 5, etc. Par la même raison en insérant un très-grand nombre de moyens entre 10 et 100, on trouvera des nombres qui diffèrent entre eux de quantités très-petites et qui croissant de 10 jusqu'à 100, comprendront entre eux les nombres 11, 12, 13, 14, 15, etc.

Ainsi on conçoit qu'on puisse insérer entre les termes consécutifs de la progression géométrique 1 : 10 : 100 : 1000, etc., les mêmes nombres de moyens géométriques de manière à former une nouvelle progression générale telle que si les nombres entiers n'y sont pas compris, ces nombres entiers diffèrent des termes de la progression de quantités très-petites (1).

Cela posé, si l'on insère entre 0 et 1 dans la progression arithmétique, entre 1 et 2, entre 2 et 3, etc., des moyens arithmétiques en même nombre que le nombre de moyens géométriques insérés entre les termes correspondants de la progression 1 : 10 : 100 : 1000, etc., on aura deux progressions sur lesquelles on pourra raisonner comme sur les précédentes progressions; on pourra déduire les logarithmes des nombres entiers, ou bien des nombres qui diffèrent très-peu de ces nombres entiers, car on démontre qu'il est impossible d'obtenir les nombres entiers consécutifs dans la progression géométrique dont 10 est la raison.

---

(1) On peut consulter le traité sur les logarithmes, publié par M. Vallès, et qui contient des détails très-complets sur cette matière.

Au reste on peut insérer un seul moyen géométrique entre 1 et 10, puis un moyen entre 1 et ce moyen géométrique obtenu, et ainsi de suite successivement, en sorte que l'on pourra insérer un très-grand nombre de moyens géométriques en n'extrayant que des racines carrées successives, ce qui est un moyen très-simple.

Mais en même temps qu'on insère un moyen géométrique il faut concevoir qu'on insère un moyen arithmétique entre les termes correspondants de la progression arithmétique.

En insérant des moyens arithmétiques entre deux nombres commensurables on trouve toujours deux nombres commensurables, ainsi les termes de la progression arithmétique sont toujours commensurables. Mais en insérant un certain nombre de moyens géométriques entre deux nombres commensurables, *en général* on trouve une raison incommensurable et par suite presque tous les termes insérés sont incommensurables. Par exemple, en insérant des moyens entre 1 et 10, il faut extraire une certaine racine de 10, ce qui donne un nombre incommensurable, les termes insérés sont tous incommensurables; mais on conçoit que deux termes consécutifs peuvent être assez rapprochés pour que leur différence soit aussi petite qu'on le desire; ensorte que ces deux nombres comprenant 3, par exemple, on pourra prendre l'un de ces nombres pour 3 sans erreur trop grande. Le nombre de la progression arithmétique correspondant au nombre que l'on a pris pour 3 est dit alors le *logarithme de* 3 *par approximation*.

Caractéristique d'un logarithme.

En reprenant les deux progressions

$$\div\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \text{etc.},$$
$$\div\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5$$

on peut voir que tout nombre compris entre 1 et 10 a pour logarithme un nombre compris entre 0 et 1; tout nombre compris entre 10 et 100 a son logarithme compris entre 1 et 2, sa partie entière est donc 1. La partie entière du logarithme d'un nombre compris entre 100 et 1000 est 2. Or, un nombre compris entre 10 et 100 a deux chiffres et la partie entière de son logarithme est 1, c'est-à-dire 2 *moins* 1. La partie entière du logarithme d'un nombre entier a donc autant d'unités moins une, qu'il y a de chiffres dans ce nombre entier. Cette partie entière d'un logarithme *caractérise* la nature du nombre correspondant et pour cela on la nomme caractéristique du logarithme.

En multipliant un nombre par 10, par 100 ou par 1000, le logarithme du produit augmente de 1, de 2, de 3, car *le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.* Ainsi le logarithme de 28×10 est égal à log. de 28 *plus* log 10 ; or, log 10 est égal à 1, donc $\log 28 \times 10 = \log 28 + 1$. Ainsi à la caractéristique de log 28 il suffit d'ajouter 1.

En général, quand deux nombres ne diffèrent que par un facteur 10, 100, 1000, *ou plutôt par un facteur égal à une puissance de* 10 *leurs logarithmes ne diffèrent que par* UNE, DEUX, TROIS, *etc., unités.*

Inversement pour diviser un nombre par 10, 100, 1000, il suffit de retrancher à la caractéristique de ce nombre une, deux, trois unités autant que cela est possible.

Si nous prenons 0,35742 pour logarithme d'un nombre, et si nous voulons diviser ce nombre par 100, nous avons vu qu'il suffisait de retrancher 2 du logarithme donné, et comme cela n'est pas possible, nous l'indiquons en plaçant 2 à la caractéristique du logarithme donné, et nous surmontons ce 2 du signe — de cette manière $\bar{2},35742$.

C'est là ce qu'on appelle logarithme dont la caractéristique seule est négative.

Pour les fractions, le dénominateur étant plus grand que le numérateur en prenant les logarithmes, le résultat de la soustraction sera négatif. On peut l'éviter en multipliant le numérateur de la fraction par une puissance de 10 assez grande pour que le produit devienne plus grand que le dénominateur, puis le quotient trouvé par le logarithme, on divise par la puissance de 10 employée.

Construction des tables de logarithmes.

Nous avons vu comment on peut concevoir les opérations à effectuer pour trouver le logarithme de 3 ou de 7, cela peut se faire par des extractions de racines carrées de 10 (1).

On ne cherche pas ainsi par des extractions de racines carrées les logarithmes de tous les nombres, car il suffit d'avoir les logarithmes

(1) Ou bien en extrayant des racines cubiques.

Par exemple, j'insère 2 moyens géométriques entre 1 et 10, la raison q est alors égale à $\sqrt[3]{10}$. Entre $\sqrt[3]{10}$ et 1, si j'insère deux nouveaux moyens géométriques, j'obtiens $\sqrt[3]{\sqrt[3]{10}}$. Mais on peut voir facilement que cette opération revient à insérer entre 1 et 10 un nombre de moyens égal à $3^n - 1$.

des nombres premiers, puisque, nous le répétons encore, le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.

On ne cherche pas non plus les logarithmes des fractions. Car le logarithme d'une fraction est égal au logarithme du numérateur moins le logarithme du dénominateur.

Les tables sont calculées dans le système dont la base est 10.

Disposition des tables.

Tables de Lalande. Étendues à 7 décimales par Marie.

Page (1).

Nomb.	Log.		Nomb.	Log.		Nomb.	Log.	
6	0.77815125		36	1.55630250		66	1.81954394	
7	0.84509814		37	1.56820172		67	1.82607480	
8	0.90308999		38	1.57978360		68	1.83250891	
.			.		.	.		
.			.		.	.		
.			.	.	.	.		
.			.		.	.		

Page (28).

Nomb.	Log.	Diff.	Nomb.	Log.	Diff.	Nomb.	Log.	Diff.
2454	3.3898746	1769	2484	3.3951516	1748	2514	3.4003653	1727
2455	3.3900515	1769	2485	3.3953264	1747	2515	3.4005380	1728
2456	3.3902284		2486	3.3955011		2516	3.4007106	
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

La disposition des tables de Lalande est très-simple et s'explique d'elle-même; nous avons pris deux spécimens, l'un de la page (1), l'autre de la page (28). Les caractéristiques des logarithmes sont écrites, ce qu'on pouvait éviter, puisqu'à l'inspection d'un nombre entier ou d'un nombre décimal, on peut écrire la caractéristique.

Les tables de Lalande ne donnent que les logarithmes des nombres jusqu'à 10000, et pour calculer des nombres plus grands que 10000 au moyen de ces tables, on se sert d'une proportion.

Les différences entre des nombres ne sont pas exactement proportionnelles aux différences de leurs logarithmes; mais elles don-

nent une approximation suffisante, quand les nombres donnés sont très-grands et ne diffèrent entre eux que de nombres très-petits relativement.

Ainsi à droite de chaque nombre est écrit son logarithme, et quand la différence des logarithmes de deux nombres consécutifs n'est pas trop grande, elle est écrite dans la colonne marquée *diff.* (abréviation de différence).

Tables de Callet.

Chiliade I.

N	Log.		N.	Log.		N.	Log.		N.	Log.
521	71683772		581	76417613		641	80684803		701	84571802
522	71767050		582	76492298		642	80753503		702	846433711
523	71850169		583	76466855		643	80821097		703	846955333

N. 256. L. 390.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
											173
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1 17
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2 35
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3 52
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4 69
2514	400.3653	3825	3998	4171	4344	4516	4689	4862	5035	5207	5 87
2515	5380	5553	5725	5898	6071	6243	6416	6588	6761	6934	6 104
16	7106	7279	7452	7624	7797	7969	8142	8314	8487	8660	7 121
17	8832	9005	9177	9256	9522	9695	9867				8 138
	401							0040	0212	0385	9 156
18	0557	0730	0902	1075	1247	1420	1592	1764	1937	2109	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Dans les tables de Callet, on a cherché à économiser la place le plus possible sans cependant nuire à la clarté; pour cela on s'est servi de cette remarque. Les logarithmes des nombres plus grands que 10000, ne diffèrent entre eux pour une assez grande quantité de nombres qu'après le 3e ou le 4e chiffre décimal, en sorte qu'il était possible de ne pas écrire plusieurs fois ces premiers chiffres décimaux des logarithmes.

D'ailleurs dans les tables de Callet on n'écrit pas la caractéristique, et c'est seulement la partie décimale de logarithme qui est écrite.

On remarque deux dispositions dans les tables de Callet pour les nombres. Il y a d'abord des pages en tête desquelles on voit Chiliade I, c'est-à-dire premier mille, quoique ces pages contiennent les logarithmes des 1200 premiers nombres entiers, dans ces pages les logarithmes des nombres entiers sont écrits avec 8 décimales. Pour se servir de ces pages, il n'y a rien à dire de particulier.

Après les premières pages viennent celles qui portent en tête des indications comme celle-ci N. 246, L. 390.

Les logarithmes de ces pages sont ceux des nombres de cinq chiffres; par exemple, je trouve dans une même ligne horizontale, le logarithme de 25140 qui est 4,4003653, le logarithme de 25141 qui est 4,4003825, puis logarithme de 25142 égal à 4,4003998, etc.

La colonne dans laquelle se trouve N donne les 4 premiers chiffres du nombre de cinq chiffres, le dernier chiffre, celui des unités, se trouve dans les colonnes intitulées 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; la caractéristique du logarithme s'écrit d'après les principes connus; on place ensuite une virgule puis les trois premiers chiffres de la colonne 0, que l'on fait suivre des quatre chiffres placés horizontalement sur la tranche du nombre cherché et dans la colonne de 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc.; suivant que le dernier chiffre du nombre est 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc.

Ainsi, je veux trouver le logarithme de 25178, je trouve 2517 dans la colonne N; mais je ne prends pas les trois premiers chiffres 400, car dans la colonne 8, je vois, qu'il y a un blanc à la tranche 2517, et qu'il faut recourir à la tranche suivante, où se trouve 401 que je fais suivre de 0212. Le logarithme de 25178 est donc 4, 4010212.

La dernière colonne intitulée différence, contient des tables proportionnelles destinées à donner immédiatement les accroissements des logarithmes correspondants à des accroissements de dixièmes pour les nombres. Nous en expliquerons l'usage plus loin.

Voyons comment on peut se servir des tables, mais avant d'entrer dans des détails, examinons les logarithmes des nombres plus petits que 1 c'est-à-dire les logarithmes *négatifs* ou bien ceux dont la caractéristique seule est négative.

Soit à trouver le logarithme de $\frac{7}{68}$, nous savons que $\log \frac{7}{68} = \log 7 - \log 68$, or $\log 7 = 0{,}84509814$, $\log 68 = 1{,}83250891$;

$$\text{Ainsi } \log \frac{7}{68} = 0{,}84509814 - 1{,}83250891.$$

Cette soustraction n'est pas possible, en sorte qu'on retranche le plus petit nombre du plus grand, et on place le signe — devant le reste (*Algèbre* nos 60—68), donc $\log \frac{7}{68} = -0{,}08741077$, ce logarithme est entièrement négatif. Nous pouvions éviter un logarithme pareil en multipliant $\frac{7}{68}$ par 10, ce qui donnait $\frac{70}{68}$, on avait alors

$$\log \frac{7}{68} = \log \frac{70}{68} - \log 10 = \log \frac{70}{68} - 1,$$

$$\log \frac{70}{68} = \log 70 - \log 68 = 1{,}84609814 - 1{,}83250891,$$

$$\log \frac{70}{68} = 0{,}01258923.$$

Pour avoir le logarithme de $\frac{7}{68}$, il faut retrancher 1 de ce nombre, ce qu'on fait en le plaçant à la caractéristique, surmonté du signe —, ce qui indique par convention qu'il est seul soustractif.

Ainsi $\log \frac{7}{68} = \bar{1}{,}01258923$.

Dans l'emploi des tables de logarithmes il y a deux problèmes généraux à résoudre, l'un direct, l'autre inverse: chacun de ces problèmes se subdivise en plusieurs autres; nous allons les résoudre successivement.

Premier problème. *Un nombre étant donné, trouver son logarithme.*

Tables de Lalande.

1. Le nombre est entier et plus petit que 10,000.

Le logarithme se trouve immédiatement, on trouve par exemple que le logarithme de 2485 est 3,3953264.

2° Le nombre entier a plus de 4 chiffres.

Soit par exemple 24557, sa caractéristique est 4; pour la partie décimale du logarithme, on commence par placer une virgule après ce quatrième chiffre, ce qui donne 2455,7, et on sait que le logarithme de ce

Tables de Callet.

I. Le nombre est entier et plus petit que 108000. *Premier cas*, le nombre à moins de cinq chiffres, par exemple, le logarithme de 2516, on cherche en tête à la suite de N le premier chiffre 2, puis on trouve 2516, et dans la colonne suivante 0, c'est-à-dire 25160 dont le logarithme est celui de 2516 diminué de 1. On prend donc pour logarithme de 2516, le nombre 3,4007106, en écrivant 3 à la caractéristique, puisqu'il y a 4 chiffres dans le nombre entier.

nombre a même partie décimale que celle du logarithme de 24557.

Or, 2455,7 est compris entre 2455 et 2456, donc le logarithme de 2455,7 se composera du logarithme de 2455, plus d'une partie dépendant du chiffre décimal 7, qu'on obtiendra ainsi.

On dit : pour 1 de différence on trouve une différence entre les logarithmes égale à 1769, *du septième ordre décimal ;* pour 0,7, combien faudra-t-il ajouter au logarithme de 2455, *on suppose qu'il y a proportion entre ces quatre nombres*, et l'on a

$$1 : 0{,}7 :: 1769 : x,$$

$$x = \frac{1769 \times 0{,}7}{1} = 1769 \times 0{,}7 = 1238{,}3$$

la quantité à ajouter est donc 1238. Ainsi on a 3,3900515, on ajoute 1238,3, ou, en négligeant les trois unités du huitième ordre, 1238, puis en passant au logarithme de 24557, dont la caractéristique est 4, on trouve

$$\log 24557 = 4.3900515 + 1238 \text{ du septième ordre.}$$
$$= 4\ 3901753$$

Pour un nombre de plus de 5 chiffres on ferait le calcul de la même manière, mais alors l'erreur commise pourrait être plus grande.

2° Le nombre entier est plus grand que 108000, soit par exemple 251634.

Pour avoir un nombre de 5 chiffres, je sépare un chiffre sur la droite, j'obtiens 25163,4.

Le logarithme de 25163 est pour la partie décimale 4007624, mais la différence entre les deux logarithmes consécutifs est 173, or la table proportionnelle relative à 173 donne, toute calculée, pour 4, 69 que j'ajoute, j'ai ainsi 4007624 + 69, ou bien 4007693 dans

$$\log 251634 = 5{,}4007693.$$

Pour un nombre de plus de six chiffres on opérerait de la même manière.

Soit à trouver le logarithme de 25163478.

On sépare deux chiffres sur la droite, et on obtient 251634,78, on prend la partie décimale du logarithme de 251634 qui est 4007624 ; pour 0,7, la table donne ; 121 pour 0,08 la table donne 13,8 ou 14, en forçant ce chiffre 3, on a donc

$$\begin{array}{r} 4007624 \\ 121 \\ 14 \\ \hline 4007759 \end{array}$$

donc $\log 25163478 = 7{,}4007759.$

DEUXIÈME PROBLÈME. *Un logarithme étant donné, trouver le nombre correspondant.*

TABLES DE LALANDE.

I. La caractéristique est au plus 3.

Alors il peut arriver deux cas, ou bien le logarithme est dans les tables, ou bien il n'y est pas.

TABLES DE CALLET.

1er *cas*. Si le logarithme se trouve parmi ceux de la première chiliade, on aura sur-le-champ le nombre qui lui correspond ; ce nombre sera dans

1° Si je donne par exemple 3,3953264, le nombre correspondant à ce logarithme est 2485.

2e *cas*. Le logarithme ne se trouve pas dans les tables.

J'ai par exemple 3.3898932.

Je cherche le nombre qui en approche le plus en moins, je trouve 3.3898746 qui correspond à 2454, je fais la différence entre 3.3898932 et 3.3898746, la différence est 186 ; je dis alors pour 1769, différence des deux logarithmes consécutifs, j'ai *une unité*, pour 186 combien aurais-je, ce qui donne la proportion

$$1769 : 186 :: 1 : x$$

d'où $x=\frac{186}{1769}=0,1$, à peu près le nombre correspondant est donc 2454,1.

Si l'on avait donné pour logarithme le nombre 5.3898932, j'aurais enlevé d'abord 2 à la caractéristique, puis ayant obtenu d'abord

2454,105.

Reculant la virgule de deux rangs à cause de la caractéristique, le nombre demandé est 245410,5.

Pour le reste, voir les traités spéciaux placés en tête des tables de logarithmes, et encore les problèmes placés dans les applications du troisième et du quatrième livre.

la colonne marquée N qui précède immédiatement celle qui contient le logarithme donné, et dans l'alignement de ce logarithme.

2e *cas*. Si le logarithme ne se trouve pas dans la première table, on cherchera les trois premières décimales de ce logarithme parmi les nombres isolés que l'on voit dans la colonne marquée O de la seconde table, et les ayant trouvées, on cherchera les quatre derniers chiffres du logarithme parmi les nombres de quatre chiffres qui sont dans cette même colonne en descendant. Si l'on y trouve ces quatre derniers chiffres, on verra le nombre cherché dans la colonne marquée N et sur leur alignement.

3e *cas*. Si l'on ne trouve pas dans la colonne marquée O les quatre derniers chiffres du logarithme donné, on s'arrêtera à celles qui en approchent le plus en moins, on suivra la ligne sur laquelle on se sera arrêté en la parcourant de gauche à droite, et si l'on trouve dans cette ligne les quatre derniers chiffres du logarithme donné, on suivra, en montant ou en descendant, la colonne dans laquelle on les aura trouvés ; le chiffre qu'on verra à la tête ou au pied de cette colonne, sera la cinquième figure du nombre cherché dont les quatre premiers se trouveront, comme ci-dessus, dans la colonne marquée N.

APPLICATIONS

ET PROBLÈMES DE L'ARITHMÉTIQUE.

CALCUL DES NOMBRES CONCRETS (1).

47. ADDITION. L'espèce des unités de la somme est nécessairement la même que celle des unités que renferment les nombres additionnés.

Ainsi la somme des nombres 8 mètres et 7 mètres est $8+7$ ou 15 mèt.

SOUSTRACTION.— La même réflexion est applicable à la soustraction. Le reste exprime nécessairement des unités de même espèce que celle des nombres sur lesquels on a opéré.

MULTIPLICATION.— Le produit devant se composer avec le multiplicande comme le multiplicateur se compose avec l'unité, les unités du produit doivent être de même espèce que celles du multiplicande. On fait toujours abstraction de l'espèce des unités du multiplicateur.

Exemple.—Il y a 7 jours dans une semaine : combien y en a-t-il dans 5 semaines? Puisqu'une semaine contient 7 jours, 5 semaines contiendront 5 fois 7 jours. Mais le nombre des unités de jours contenu dans le produit de 7 jours par 5 ne peut être différent du nombre d'unités abstraites contenu dans le produit du nombre abstrait 7 par 5. Je multiplie donc 7 par 5 ou 5 par 7, et je fais exprimer des jours au résultat 35.

DIVISION.— Le dividende est un produit dont le diviseur et le quotient sont les deux facteurs. D'où il suit que le dividende étant concret, le quotient doit aussi l'être, si, d'après la nature de la question, le diviseur est abstrait, et réciproquement.

Exemple du premier cas.—Quel est le quotient de 36 mètres par 4? Le quotient doit exprimer un nombre de mètres quatre fois moindre que 36.

Exemple du second cas.— Quel est le quotient de 42 kilogrammes par 7 kilogrammes? C'est le nombre abstrait qui indique le nombre de fois que le poids 42 kilogrammes contient le poids 7 kilogrammes. J'obtiendrai ce nombre en divisant 42 par 7.

---

(1) Nous conservons cette dénomination pour nous conformer à l'usage, nous réservant cependant de critiquer autre part ces expressions impropres de *nombres abstraits* et *nombres concrets*.

Il résulte de ce qui vient d'être dit que, lorsqu'on a à exécuter, sur des nombres concrets, une des quatre opérations fondamentales de l'arithmétique, on fait l'opération de la même manière que si les nombres étaient abstraits, et que l'on fait ensuite exprimer au résultat des unités dont l'espèce est déterminée tant par celle des nombres soumis au calcul que par la nature de la question qui y donne lieu.

Nomenclature des mesures anciennes.

48. Il existe beaucoup de traités importants sur les arts et sur les sciences, faits avant l'établissement du nouveau système de mesures, et auxquels le savant, l'industriel et l'étudiant ont, à chaque instant, besoin de recourir. On ne peut donc rester étranger au système des anciennes mesures. Nous devons conséquemment en donner ici la nomenclature sommaire.

Mesures de longueur. Pour les petites étendues, *l'unité principale* était la *toise*, qui vaut 6 pieds; le pied vaut 12 pouces, le pouce 12 lignes et la ligne 12 points.

La mesure itinéraire était *la lieue* avec ses subdivisions binaires $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.

Il y avait trois sortes de lieues, savoir:

1° *La lieue terrestre* ou *ordinaire* qui était la 25e partie d'un degré terrestre, c'est-à-dire, la 25e partie de $57008^{\text{toises}},2222$, et valait conséquemment $2280^{\text{toises}},3288$... (1).

2° *La lieue marine*, qui était la 20e partie du degré terrestre, et valait conséquemment $2850^{\text{toises}},4111$....

Le rapport de la lieue ordinaire à la lieue marine était celui de 4 à 5.

3° *La lieue de poste*, qui valait 2000 toises.

On se servait, pour le mesurage des étoffes, d'une unité particulière: c'était l'aune, dont la longueur était de $3^{\text{pi}}\cdot7^{\text{po}}\cdot10^{\text{li}}\cdot10^{\text{pts}}$.

L'aune se divisait en demies, en quarts, en huitièmes, en seizièmes; en tiers, en sixièmes, en douzièmes.

Le pas ordinaire était une longueur de 2 pieds 6 pouces.

Le pas géométrique ou la brasse était de 5 pieds.

La perche linéaire de Paris était de 18 pieds.

Celle des eaux et forêts était de 22 pieds.

Mesures de surface. On évaluait les surfaces de peu d'étendue en toises carrées, pieds carrés, pouces carrés...

On appelle toise carrée, pied carré, pouce carré, un carré qui a pour côté une toise, un pied, un pouce.

La toise carrée vaut 6×6 ou 36 pieds carrés.

---

(1) Le degré terrestre valant 25 lieues terrestres, la circonférence de la terre, qui est de 360 degrés, vaut 360 fois 25 lieues terrestres, ou 9,000 lieues terrestres.

Le pied carré vaut 12×12 ou 144 pouces carrés.

Le pouce carré vaut 12×12 ou 144 lignes carrées.

Les surfaces d'une grande étendue s'évaluaient en lieues carrées. Une lieue carrée vaut, à peu de chose près, 2280×2280 ou 5198400 toises carrées.

Il existait en outre des mesures agraires qui variaient suivant les lieux, de noms, de grandeur et de subdivisions.

Toutefois, les plus usitées étaient l'arpent et la perche.

L'arpent valait 100 perches.

La perche de Paris était un carré dont le côté égalait 18 pieds.

Celle des eaux et forêts était un carré dont le côté était égal à 22 pieds.

La perche de Paris était donc égale à 18×18 ou à 324 pieds carrés.

La perche des eaux et forêts était donc égale à 22×22 ou à 484 pied carrés.

Conséquemment, les arpents correspondants étaient de 32400 pieds carrés et de 48400 pieds carrés.

Mesures de volume et de capacité. Les volumes s'évaluaient en toises cubes, pieds cubes, pouces cubes.

On appelle toise cube, pied cube, pouce cube... un cube (solide de la forme du dé à jouer), dont le côté est égal à une toise, à un pied, à un pouce.... (1).

Il suit de là qu'une toise cube vaut $6 \times 6 \times 6$ ou 216 pieds cubes; qu'un pied cube vaut $12 \times 12 \times 12$ ou 1728 pouces cubes, qu'un pouce cube vaut aussi $12 \times 12 \times 12$ ou 1728 lignes cubes....

Il y avait en outre des mesures particulières de volume :

1° Pour les matières sèches, tels que les grains; le setier qui valait 12 boisseaux. Le boisseau valait 12 litrons.

2° Pour les liquides, le muid, qui valait à Paris 288 pintes. La pinte avait des subdivisions binaires.

3° Pour le bois de chauffage, la corde qui valait deux voies.

Poids.— L'unité de poids était la livre qui valait 2 marcs; le marc valait 8 onces, l'once 8 gros, le gros 72 grains.

Dans l'orfévrerie, les pesées s'évaluaient en marcs.

Un poids de 100 livres formait le quintal.

Le tonneau de mer représentait un poids de 2000 livres.

Monnaies.— L'unité monétaire était la livre tournois, qui valait 20 sous : le sou valait 12 deniers.

---

(1) Le nombre des unités de volume contenu dans un cube est égal, ainsi qu'on le démontre en géométrie, au produit de trois facteurs égaux chacun au nombre abstrait entier ou fractionnaire, qui exprime le nombre des unités de longueur contenues dans le côté de ce cube.

Les monnaies d'argent contenaient $\frac{11}{12}$ de leur poids en argent pur et $\frac{1}{12}$ en cuivre.

Les monnaies d'or contenaient $\frac{11}{12}$ de leur poids en or pur, $\frac{1}{24}$ en argent et $\frac{1}{24}$ en cuivre. On disait des monnaies d'argent, ainsi que des monnaies d'or, qu'elles étaient au titre $\frac{11}{12}$, ou en d'autres termes, qu'elles renfermaient $\frac{11}{12}$ de fin.

Mesures du temps. L'unité principale du temps était l'année, qui se divisait, comme elle se divise encore, en 365 jours quand l'année est commune, et en 366 jours quand elle est bissextile.

La durée d'une révolution de la terre sur son axe, forme un jour que l'on partage en 24 heures. L'heure se divise en 60 minutes et la minute en 60 secondes.

L'année se divise aussi en 12 mois, dans l'ordre suivant :

Janvier, février, mars, avril, mai, juin, juillet, août, septembre, octobre, novembre, décembre.

Sept de ces mois, savoir janvier, mars, mai, juillet, août, octobre et décembre, ont 31 jours.

Quatre autres, qui sont avril, juin, septembre et novembre, ont 30 jours.

Selon que l'année a 365 jours ou 366 jours, le mois de février a 28 ou 29 jours.

La semaine se compose de sept jours.

La collection de 100 années forme un siècle.

Division de la circonférence. — Toute circonférence se divisait (et se divise même encore, à cause des nombreux avantages que présente cette division), en 360 parties égales, nommées degrés. Le degré se divise en 60 minutes, la minute en 60 secondes, la seconde en 60 tierces.

La circonférence contient donc 21600 minutes sexagésimales, 1296000 secondes, 77760000 tierces.

Le quart de la circonférence, alors comme aujourd'hui, s'appelait quadrant.

Système métrique.

49. Le nouveau système des poids et mesures (devenu obligatoire depuis le 1er janvier 1840), a reçu le nom de système métrique, parce que le mètre, qui est la nouvelle unité de longueur, lui sert de base fondamentale.

Ce système est d'une simplicité extrême, tant sous le rapport de la nomenclature qui n'offre que quelques mots à retenir, que sous celui des calculs qui s'effectuent, tous, sur des nombres décimaux.

Mesures de longueur. Le mètre ou nouvelle unité linéaire est la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre, c'est-à-dire de l'arc qui mesure la distance de l'équateur au pôle.

Les multiples et les sous-multiples du mètre, de même que ceux de toutes les autres unités du système, suivent la loi décimale.

Les noms des multiples de l'unité dont il s'agit, s'obtiennent en plaçant, devant le nom caractéristique de cette unité, les quatre mots grecs suivants :

	déca,	*hecto*,	*kilo*,	*myria*,
qui se traduisent par	dix,	cent,	mille,	dix-mille.

Les noms des subdivisions se forment en plaçant, devant le nom distinctif de cette unité, les trois mots latins suivants :

	déci,	*centi*,	*milli*,
qui se traduisent par	dixième,	centième,	millième.

Ainsi, pour énoncer les multiples du mètre, dans leur ordre graduel d'augmentation, on dira :

décamètre,	au lieu de 10 mètres,
hectomètre,	au lieu de 100 mètres,
kilomètre,	au lieu de 1000 mètres,
myriamètre,	au lieu de 10000 mètres.

De même, pour énoncer les sous-multiples du mètre, on dira :

décimètre,	au lieu de dixième de mètre,
centimètre,	au lieu de centième de mètre,
millimètre,	au lieu de millième de mètre.

Les savants chargés de la détermination de la longueur du quart du méridien terrestre, ayant trouvé que cette longueur est de 5130740 toises, il s'ensuit que le mètre égale $0^{t.},5130740$ ou $0^{t.}513074$, fraction décimale qui, traduite en subdivisions de la toise, équivaut à très-peu de chose près, à 3 pieds, 0 pouce, 11 lignes, 296 millièmes de ligne.

Le myriamètre et le kilomètre, qui sont particulièrement des mesures itinéraires, équivalent, à très-peu de chose près, le premier à $5130^{t.}\,4^{pi.}5^{po.}$, et le second à $513^{t.}\,0^{pi.}5^{po.}$.

Mesures de superficie. Il y a deux espèces d'unités de surface.

Pour les surfaces de peu d'étendue, l'unité est le mètre carré, c'est-à-dire, un carré dont les côtés sont égaux au mètre (1).

---

(1) Le nombre des unités de surface contenu dans un carré, ainsi qu'on le dé-

Pour évaluer les surfaces des terrains, on a adopté l'*are*, qui n'est autre chose qu'un carré dont le côté est égal à 10 mètres ou à un décamètre.

Le décamètre, qui remplace la perche linéaire, est la nouvelle chaîne de l'arpenteur.

Il résulte de ce qu'on vient de dire que l'*are* vaut cent fois le mètre carré. La centième partie de l'*are* ou le *centiare* n'est donc autre chose qu'un mètre carré.

La surface qui renferme cent ares reçoit le nom d'*hectare*. Le côté de l'hectare, sous la forme d'un carré, est égal à 100 mètres. L'hectare vaut donc 10000 mètres carrés.

Le mot *myriare* est usité, quand il s'agit d'évaluations géographiques. Le côté du myriare est égal à 1000 mètres; le myriare vaut donc 1000000 de mètres carrés.

Mesures de volume. L'unité de volume, quand il s'agit de pierres ou de métaux, est le mètre cube.

Le décimètre cube, le centimètre cube, le millimètre cube sont autant de solides, de la forme du dé à jouer, dont tous les côtés seraient égaux à un décimètre, ou à un centimètre, ou à un millimètre. Chacun d'eux n'est d'ailleurs que la millième partie de celui qui le précède dans l'ordre de grandeur.

Le mètre cube reçoit le nom de *stère*, lorsqu'il sert à mesurer le bois de chauffage. Le seul multiple usité du *stère* est le *décastère* qui vaut dix stères; son seul sous-multiple est le *décistère*, qui vaut un dixième de stère.

Mesures de capacité.— L'unité de mesure, pour les liquides et pour les grains, est le décimètre cube, auquel on donne alors le nom de *litre*. Sa forme primitive fut celle d'un cube; mais dans la suite, pour en rendre l'usage plus commode, on lui a donné la forme cylindrique. La hauteur du litre, sous forme cylindrique, est le double du diamètre de la base.

Les multiples du litre sont le *décalitre* ou dix litres, et l'*hectolitre* ou 100 litres.

Les sous-multiples sont le *décilitre* ou dixième du litre, et le *centilitre* ou centième du litre. On n'emploie pas le *millilitre*, qui serait une quantité trop petite. Ce ne serait en effet qu'un centimètre cube.

Mesures de poids. La détermination du gramme ou nouvelle unité de poids a exigé les opérations les plus délicates. Il équivaut au poids d'un

---

montre en géométrie, est égal au produit de deux facteurs égaux chacun au nombre qui représente le nombre d'unités linéaires contenues dans le côté de ce carré. Or, le mètre vaut 10 décimètres. Donc le mètre carré vaut 10×10 ou 100 décimètres carrés.

centimètre cube d'eau distillée, pesée dans le vide, après l'avoir ramenée à son maximum de densité, qui a lieu à quatre degrés centigrades audessus de zéro.

L'expression de ce poids en anciennes mesures, est 18 grains, 82715.

Le kilogramme ou la double livre décimale, équivaut conséquemment à 18827 grains, 15. La simple livre décimale nouvelle vaut donc 9413 grains, 575.

Les multiples et les sous-multiples du gramme sont :

le myriagramme qui vaut	dix mille grammes,
le kilogramme	mille grammes,
l'hectogramme	cent grammes,
le décagramme	dix grammes,
le décigramme	un dixième de gramme,
le centigramme	un centième de gramme,
le milligramme	un millième de gramme.

Le quintal métrique est un poids de 100 kilogrammes ou 10 myriagrammes.

Le *litre* n'étant autre chose qu'un décimètre cube, et le décimètre cube valant 1000 centimètres cubes, le poids d'un décimètre cube d'eau équivaut à 1000 grammes ou à un kilogramme.

Le mètre cube valant 1000 décimètres cubes, il s'ensuit que le mètre cube d'eau, ou tonneau métrique, pèse 1000 kilogrammes.

Monnaies.— La nouvelle unité monétaire est le *franc.*

Le franc est une pièce de monnaie qui pèse cinq grammes, et qui contient les $\frac{9}{10}$ de son poids en argent pur et $\frac{1}{10}$ en cuivre : c'est-à-dire, que son titre est à $\frac{9}{10}$ de fin.

Le franc n'a point de noms particuliers de multiples dans la nomenclature. On ne dit point *déca-franc*, *hecto-franc.* On dit simplement 10 francs, 100 francs.

Le *décime*, qui vaut un dixième de franc, et le *centime*, qui vaut un centième de franc, sont les seules subdivisions de l'unité monétaire.

Puisque le poids d'un franc est 5 grammes, et que 5 grammes sont contenus 200 fois dans 1000 grammes ou dans un kilogramme, un kilogramme d'argent monnayé vaut évidemment 200 francs.

Donc, en divisant une somme donnée par 200, on obtient le poids de cette somme en kilogrammes.

Réciproquement, le poids d'une somme quelconque d'argent étant donné, on obtient la valeur de cette somme, en multipliant par 200 le nombre des kilogrammes qui forment son poids.

Division centésimale de la circonférence.— La circonférence elle-même a été assujettie à la division décimale. On l'a partagée en 400 parties égales nommées *grades*. Chaque quart ou *quadrant* renferme 100 grades. Le grade se divise d'ailleurs en 100 minutes, et la minute en 100 secondes.

La circonférence renfermant 400 grades vaut 40000 minutes centésimales ou 4000000 de secondes.

Chaque seconde, quand il s'agit de la circonférence de la terre, est égale à la longueur de la nouvelle chaîne de l'arpenteur ou au *décamètre*.

Conversion des anciennes mesures en mesures nouvelles.

50. On aura besoin, pendant longtemps encore, de traduire les anciennes mesures en nouvelles. Nous allons indiquer ici les rapports de grandeur qui existent entre les plus importantes de ces mesures, et donner en même temps quelques exemples de traductions.

La toise $=$ 864 lignes.

Le mètre $=$ 443 lignes, 296.

Donc, 1 toise vaut $\frac{864000}{443296}$ de mètre, ou $1^{m},949037$.

Ainsi, pour convertir des toises en mètres, il suffit de multiplier $1^{m},949037$ par le nombre de toises proposé.

Exemple : Que valent en mètres 519 toises ?

$$\begin{array}{r}
1^{m},949037 \\
519 \\
\hline
17\ \ ,541333 \\
59\ \ ,49037 \\
974\ \ ,5185 \\
\hline
\text{Réponse. . . . }\ 1051^{m},550203
\end{array}$$

Le méridien renferme 4000 myriamètres. Il renferme aussi 9000 lieues ordinaires.

Donc, 1 lieue vaut $\frac{4000}{9000}=\frac{4}{9}$ de myriamètre: ou $0^{myr.},444444\ldots$

Ainsi, pour convertir des lieues en myriamètres, il suffit de multiplier $0^{myr.},444444\ldots$ par le nombre de lieues proposé.

Exemple : Que valent 97 lieues en kilomètres ?

$$\begin{array}{lr} & 0^{myr.},444444 \\ & 97 \\ \hline & 3\quad ,111108 \\ & 39\quad ,69996 \\ \hline \text{Réponse. . . . .} & 43^{myr.},111068 \end{array}$$

Une toise carrée $=864^{lig.}\times 864^{lig.}$ ou 746496 lignes carrées.

Un mètre carré $=443^{lig.},296\times 443^{lig.},296$, ou $196511^{lig.\ car.},343616$.

Donc, 1 toise carrée vaut

$$\frac{746496000000}{196511343616}$$

de mètre carré, ou $3^{m.\ car.},798748...$

Ainsi, pour convertir des toises carrées en mètres carrés, il suffit de multiplier $3^{m.\ car.},798748$ par le nombre de toises carrées proposé.

Exemple : Que valent 316 toises carrées en mètres carrés ?

$$\begin{array}{lr} & 3^{m.car.},798748 \\ & 316 \\ \hline & 22\quad ,792488 \\ & 37\quad ,98748 \\ & 1139\quad ,6244 \\ \hline \text{Réponse. . . .} & 1200^{m.car.},404368 \end{array}$$

Une lieue carrée $=\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$ de myriamètre carré, ou, en faisant la division une fois pour toutes, $0^{myr.\ car.},19753086...$

Ainsi, pour convertir des lieues carrées ordinaires en myriamètres carrés, il suffit de multiplier $0^{myr.car.},19753086$ par le nombre de lieues carrées proposé.

Exemple : Combien de myriamètres carrés valent 37 lieues carrées ?

$$\begin{array}{lr} & 0^{myr.car.},19753086 \\ & 37 \\ \hline & 1\quad ,38271602 \\ & 5\quad ,9259258 \\ \hline \text{Réponse. . . . .} & 7^{myr.car.},30864182 \end{array}$$

Une toise cube $=864^{lig.}\times 864^{lig.}\times 864^{lig.}$ ou 644972544 lignes cubes.

Un mètre cube $=443^{lig.},296\times 443^{lig.},296\times 443^{lig.},296$,

ou $87112692^{lig.\ cub.},579598336$.

Donc, 1 toise cube vaut $\frac{644972544000000000}{87112692579598336}$ de mètre cube,

ou $7^{\text{m. cub.}},40389\ldots$

Ainsi, pour convertir des toises cubes en mètres cubes, il suffit de multiplier $7^{\text{m. cub.}},40,389$ par le nombre de toises cubes proposé.

Exemple : Que valent 78 toises cubes en mètres cubes?

	$7^{\text{m.cub.}},40389$
	78
	59 ,23112
	518 ,2723
Réponse. . . .	$577^{\text{m.cub.}},50342$

Poids.

La livre poids = 9216 grains.

Le kilogramme = $18827^{\text{gra.}},15$.

Donc, la livre vaut $\frac{921600}{1882715}$ de kilogramme, ou, en faisant la division une fois pour toutes, $0^{\text{kilog.}},489506\ldots$

Ainsi, pour convertir des livres poids en kilogrammes, il suffit de multiplier $0^{\text{kilog.}},489506$ par le nombre de livres proposé.

Exemple : Combien 314 livres valent-elles de kilogrammes?

	$0^{\text{kilog.}},489506$
	314
	1 ,958024
	4 ,89506
	146 ,8518
Réponse.	$153^{\text{kilog.}},704904$

Monnaies.

Il est résulté de la comparaison de la valeur du franc et de celle de la livre, que ces valeurs sont entre elles comme 81 et 80.

La livre serait représentée par le nombre 80,

Et le franc serait exprimé par le nombre 81.

Donc, 1 livre tournois vaut $\frac{80}{81}$ de franc, ou $0^{\text{fr.}},987654\ldots$

Ainsi, pour convertir des livres tournois en francs, il suffit de multiplier $0^{\text{fr.}},987654$ par le nombre de livres proposé.

Exemple : Que valent en francs 69 livres tournois ?

$$\begin{array}{r} 0^{fr},987654 \\ 69 \\ \hline 8\ ,888886 \\ 59\ ,25924 \\ \hline \end{array}$$

Réponse. . . . . . . $68^{fr},148126$

RÈGLE DE TROIS.

51. La règle de trois est une opération dans laquelle on donne trois quantités, à l'aide desquelles on en trouve une quatrième.

Premier exemple. — 38 ouvriers ont fait dans un temps donné, 342 mètres : on demande combien 15 ouvriers feront de mètres dans le même temps ?

Dans l'hypothèse ci-dessus, l'ouvrage fait par un seul ouvrier sera évidemment exprimé par le nombre fractionnaire... $\frac{342}{38}$.

Et l'ouvrage fait par 15 ouvriers sera représenté par l'expression

$$\frac{342 \times 15}{38}.$$

Simplifiant cette expression, en divisant le numérateur et le dénominateur par le facteur commun 38, on obtient $\frac{9 \times 15}{1} = 9 \times 15 = 135$.

Donc les 15 ouvriers feront dans le même temps la quantité de 135^m.

Second exemple. — Un homme fait 654 lieues en 48 jours. Combien fait-il de lieues en 32 jours ?

Le nombre de lieues faites pendant un jour sera exprimé par $\frac{654}{48}$.

Et le nombre de lieues faites pendant 32 jours sera représenté par

$$\frac{654 \times 32}{48}.$$

En simplifiant, on obtient 109×4 ; or $109 \times 4 = 436$.

Cet homme fait donc 436 en 32 jours.

Dans le premier de ces deux exemples, les quantités d'ouvrage fait sont évidemment proportionnelles aux temps employés à les faire.

Dans le deuxième exemple, les distances parcourues sont aussi évidemment proportionnelles aux temps employés à les parcourir.

Les règles qui font la matière de ces deux exemples, sont par cette raison nommées règles de trois directes.

Exemple d'une règle de trois inverse.

28 ouvriers ont mis 45 jours pour faire un certain ouvrage : on demande combien 35 ouvriers mettront de jours pour faire le même ouvrage?

Il est évident que le temps employé par un seul ouvrier pour faire le même ouvrage sera exprimé par la quantité 45×28.

Et que le temps employé par 35 ouvriers sera 35 fois moindre que la quantité de temps marquée par 45×28.

Ce temps sera donc représenté par $\frac{45 \times 28}{35}$.

En simplifiant, nous trouverons $9 \times 4 = 36$.

Il faudra donc à 35 ouvriers, 36 jours pour faire le même ouvrage.

RÈGLE DE TROIS COMPOSÉE.

52. La règle de trois s'appelle composée, lorsque, pour obtenir un résultat on est obligé de passer par une suite de règles de trois simples.

Exemple. 24 ouvriers, travaillant 15 jours et 10 heures par jour, font 684 mètres d'ouvrage ; on demande combien de jours mettront 18 ouvriers en travaillant 8 heures par jour pour faire 575 mètres du même ouvrage.

Supposons d'abord que les ouvriers travaillent le même nombre de jours, le même nombre d'heures par jour et fassent le même ouvrage, l'ouvrier, pour faire 684 mètres, devra travailler 24 fois plus de jours, c'est-à-dire 15×24 ; l'ouvrier travaillant une heure par jour, mettra 10 fois plus de temps ; donc, pour faire 684 mètres, il mettra $15 \times 24 \times 10$; pour faire un mètre, il mettra 684 fois moins de temps, c'est-à-dire $\frac{15 \times 24 \times 10}{684}$.

18 ouvriers, travaillant 1 heure par jour pour faire 1 mètre, mettront 18 fois moins de temps qu'un ouvrier, c'est-à-dire $\frac{15 \times 24 \times 10}{684 \times 18}$.

S'ils travaillent 8 heures par jour, pour faire un mètre, ils mettront 8 fois moins de temps ou $\frac{15\times24\times10}{684\times18\times8}$.

S'ils veulent faire 575 mètres d'ouvrage, ils mettront 575 fois plus de temps, donc $\frac{15\times24\times10\times575}{684\times18\times8}$; $\frac{15\times24\times10\times575}{684\times18\times8}$ est donc le nombre de jours employés. Voici les simplifications :

$$\frac{15^5\times24^3\times10^5\times575}{684\times18\times8}=\frac{575\times25}{684}.$$

$$\begin{array}{r} 575 \\ 25 \\ \hline 2875 \\ 1150 \\ \hline 14375 \end{array} \qquad \frac{575\times25}{684}=\frac{14375}{684} \qquad \begin{array}{r|l} 14375 & 684 \\ \cline{2-2} 695 & 21+\frac{11}{684} \\ 11 & \end{array}$$

Le nombre des jours est $21+\frac{11}{684}$ de jours. Voici un tableau qui représente la marche que l'on suit dans ces différents calculs, et la manière dont on les dispose : on met d'abord les nombres de cette manière :

24 ouvriers,	15 jours,	10 heures,	624 mètres.
18	x	8	575

On met x pour exprimer que l'on cherche le nombre de jours.

Voici les calculs :

1 ouvrier,	15×24 j.,	10 h.,	684 mètres;
1 ouv.	$15\times24\times10$ j.,	1 h.,	684
1 ouv.	$\frac{15\times24+10}{684}$ j.,	1 h.,	1
18 ouv.	$\frac{15\times24\times10}{684\times18}$ j.,	1 h.,	1
18 ouv.	$\frac{15\times24\times10}{684\times18\times8}$ j.,	8 h.,	1
18 ouv.	$\frac{10\times24\times10\times575}{684\times18\times8}$ j.,	8 h.,	575.

$\frac{15\times24\times10\times575}{684\times18\times8}$, le nombre de jours que mettront 18 ouvriers travaillant 8 heures par jour pour faire 575 mètres d'ouvrage.

Règle de trois simple résolue par les proportions.

53. Résolvons maintenant des règles de trois par des proportions.

Premier problème. 12 ouvriers ont fait dans un temps donné 348 mètres d'ouvrage, on demande combien 25 ouvriers en feront dans le même temps?

Les quantités d'ouvrages exécutés sont évidemment proportionnelles au nombre des ouvriers employés à les faire, c'est-à-dire que si le nombre d'ouvriers devient double, triple, quadruple, et, en général, un certain nombre de fois plus grand, l'ouvrage fait par ces ouvriers sera aussi ou double, ou triple, ou quadruple, ou, enfin, le même nombre de fois plus grand.

En conséquence, si on représente par x le nombre de mètres cherché, la valeur de l'inconnue, dans le problème en question, dépendra nécessairement de la proportion suivante :

$$12 : 25 :: 348 : x = \frac{348 \times 25}{12} = 725.$$

Dans ce problème, comme dans tous ceux de même espèce, le rapport qui existe entre les ouvrages faits, est absolument le même que celui qui existe entre les nombres d'ouvriers : aussi, dit-on que les ouvrages exécutés sont en raison directe du nombre de ces ouvriers. Toutes les fois que cette circonstance aura lieu, la règle de trois sera dite directe.

Deuxième problème. 35 ouvriers ont fait un certain ouvrage en 12 jours : on demande combien 42 ouvriers mettraient de jours à faire le même ouvrage?

Le temps employé à faire un ouvrage est d'autant plus court, que le nombre d'ouvriers est plus grand; c'est-à-dire, que si le nombre des ouvriers devient double, triple, quadruple; ou, en général, un certain nombre de fois plus grand, le temps qu'ils mettront à exécuter la même quantité d'ouvrage deviendra deux fois, trois fois, quatre fois moindre; ou, en général, le même nombre de fois plus petit. On dit par ce motif que le nombre des jours de travail est en raison inverse du nombre des ouvriers.

Le rapport des ouvriers est ici marqué par les nombres 35 : 42; et celui des temps employés par 12 : x. Mais, d'après la remarque que l'on vient de faire, l'un de ces rapports est l'inverse de l'autre; il faut donc que l'ordre des termes de l'un de ces rapports, du premier par exemple, soit interverti, et que les termes de la proportion soient posés de la manière suivante :

$$42 : 35 :: 12 : x = \frac{35 \times 12}{42} = \frac{5 \times 12}{6} = \frac{5 \times 2}{1} = 10.$$

Autre exemple d'une règle de trois simple inverse.

Troisième problème. Les difficultés d'exécution des deux ouvrages, sont entre elles comme 36 : 16; un ouvrier a fait, dans un temps donné, 48 mètres du premier ouvrage : combien en fera-t-il du second dans le même temps?

L'ouvrage exécuté devant être d'autant plus considérable que la difficulté est moins grande, les quantités d'ouvrage faites seront dans le rapport inverse de 36 à 16, c'est-à-dire qu'elles seront dans le rapport de 16 à 36.

La quantité inconnue x du second ouvrage sera donc déterminée par la proportion :

$$16 : 36 :: 48 : x = \frac{48 \times 36}{16} = \frac{3 \times 36}{1} = 108.$$

Règle de trois composée, résolue par les proportions.

La règle de trois est dite composée, toutes les fois que son énoncé renferme plus de trois nombres connus. (La quantité de ces nombres est au reste illimitée.)

Problème. 72 ouvriers travaillant pendant 25 jours et 9 heures chaque jour, avec une force représentée par 7, ont fait 548 mètres d'ouvrage : on demande la quantité de mètres que feraient 53 ouvriers travaillant pendant 43 jours, 7 heures par jour, avec une force mesurée par le nombre 11.

Il est évident que les quantités d'ouvrage doivent croître et diminuer dans le rapport direct des ouvriers, des temps employés et des forces. Car deux fois plus d'hommes feront certainement deux fois plus d'ouvrage; de même, deux fois plus de temps et une face double, produiront un double effet.

On arrive au résultat par le moyen de quatre règles de trois simples et directes : la première relative aux ouvriers; la deuxième aux jours; la troisième aux heures, et la quatrième aux forces.

Les voici posées dans leur ordre :

$$\begin{aligned} 27 : 53 &:: 548 : x \\ 25 : 43 &:: x : x' \\ 9 : 7 &:: x' : x'' \\ 7 : 11 &:: x'' : x''' \end{aligned}$$

Les termes de ces proportions étant multipliés par ordre, fournissent la proportion suivante, à laquelle eût au reste conduit le plus simple raisonnement :

$$72\times25\times9\times7 : 53\times43\times7\times11 :: 548\times x\times x'\times x'' : x\times x'\times x''\times x'''.$$

Supprimant les facteurs communs, il vient:

$$72\times25\times9 : 53\times43\times11 :: 548 : x'''.$$

D'où
$$x'''=\frac{53\times43\times11\times548}{72\times25\times9}=848^{m}\frac{35}{4050}.$$

La règle de trois composée peut être en partie directe et en partie inverse.

Problème. 29 ouvriers, pendant 23 jours, dans un terrain dont la dureté est comme 5, ont fait 244 mètres : on demande combien 25 ouvriers, pendant 11 jours, feraient de mètres dans un terrain dont la dureté ne serait que comme 2 ?

Cette règle est directe relativement aux ouvriers et aux temps ; mais elle est inverse relativement aux difficultés d'exécution.

On la résoudra en posant les trois règles de trois simples suivantes, dont les deux premières sont directes et la troisième est inverse.

$$29 : 25 :: 244 : x$$
$$23 : 11 :: x : x'$$
$$2 : 5 :: x' : x''$$

Multipliant les termes par ordre, il vient :

$$29\times23\times2 : 25\times11\times5 :: 244\times x\times x' : x\times x'\times x''$$

Et, en supprimant les facteurs communs :

$$29\times23\times2 : 25\times11\times5 :: 244 : x''$$

D'où
$$x''=\frac{25\times11\times5\times244}{29\times23\times2}=352^{m},009.$$

Quelques problèmes relatifs à des partages non proportionnels.

54. *Premier problème.* Partager le nombre 749 en deux parties telles, que la première surpasse la seconde de 63.

Solution. Puisque la première partie surpasse la seconde de 63 unités, le nombre 749 se compose du double de la seconde partie, plus 63.

Donc, si je retranche 63 de 749, le reste, qui est 686, sera égal au double de la seconde partie.

Donc cette partie sera la moitié de 686 ou 343. La première partie est donc $343+63=406$.

Vérification. La somme des deux parties est égale à 749, et leur différence est égale à 63.

Deuxième problème. Une personne fait ainsi le partage de son bien :

elle donne à son fils les $\frac{2}{5}$ de sa succession, à sa fille le $\frac{1}{3}$ et à son neveu le $\frac{1}{7}$. Le reste, qui se monte à 10325 fr. 90 c., est laissé aux pauvres de la commune. On demande quelle était la force de la succession et combien ont eu le fils, la fille et le neveu?

Solution. Pour connaître la partie de sa fortune que cette personne a laissée à son fils, à sa fille et à son neveu, il suffit d'additionner les trois fractions $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{7}$.

Ces fractions, réduites au même dénominateur, deviennent $\frac{42}{105}$, $\frac{35}{105}$ et $\frac{15}{105}$, dont la somme est $\frac{92}{105}$.

Donc la somme de 10325 fr. 90 c., laissée aux pauvres, est égale à toute la succession représentée dans la circonstance par $\frac{105}{105}$ moins $\frac{92}{105}$ ou $\frac{13}{105}$.

Donc $\frac{1}{105}$ de l'héritage vaut $\frac{10325^{\text{fr.}},90^{\text{c.}}}{13}$.

Donc la fortune tout entière est égale à $\frac{10325^{\text{fr.}},90 \times 105}{13}$

ou à 83401$^{\text{fr.}}$50.

La part du fils est donc les $\frac{2}{5}$ de cette somme = 33360 fr. 60 c.; celle de la fille est le $\frac{1}{3}$ de la même somme = 27800 fr. 50 c.; celle du neveu le $\frac{1}{7}$ de la même somme = 11914 fr. 50 c.

Vérification. En joignant aux trois parts ci-dessus déterminées, la somme de 10325 fr. 90 c. laissée aux pauvres, on trouve pour total 83401 fr. 50 c. ou la succession entière.

Troisième problème. Un fermier fait ainsi le partage de sa récolte : un quart pour la consommation de sa famille, un vingtième pour les semailles de l'année suivante, deux cinquièmes pour payer le propriétaire, un septième pour le percepteur, il vend ensuite le reste pour en placer le prix à la caisse d'épargne. Ce reste procure la somme de 2134 fr.

On demande quelle était la valeur de la récolte entière et quel est le prix de la ferme?

Solution. Ajoutons les quatre fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{7}$,

$\frac{35}{140}$, $\frac{7}{140}$, $\frac{56}{140}$, $\frac{20}{140}$.

Leur somme est égale à $\frac{118}{140}$

Donc la somme de 2134 fr., prix du reste de la récolte, est égale à $\frac{140}{140}-\frac{118}{140}$ ou à $\frac{22}{140}$. Donc $\frac{1}{140}$ de la récolte est égal à $\frac{2134}{22}$. Donc la récolte entière est égale à $\frac{2134\times 140}{22}=13580$ fr.

En prenant les $\frac{2}{5}$ de cette somme, on obtient celle de 5432 fr. pour prix du fermage.

Vérification.

$$\begin{array}{lr} \text{Le } \frac{1}{4} = & 3395 \\ \text{Le } \frac{1}{20} = & 679 \\ \text{Les } \frac{2}{5} = & 5432 \\ \text{Le } \frac{1}{7} = & 1940 \\ \text{La quantité vendue a produit. . } & 2134 \\ \hline & 13580 \text{ fr.} \end{array}$$

Partages proportionnels ou règles de société.

55. La règle de partage proportionnel (fondée sur le principe que, dans une suite de rapports égaux, la somme de tous les antécédents est à celle de tous les conséquents comme un antécédent quelconque est à son antécédent) reçoit le nom de règle de *société*, parce qu'elle sert le plus souvent, dans l'usage, à partager le profit ou la perte qui résulte d'une association commerciale.

On appelle *mise* le capital pour lequel chaque intéressé est fondé dans la spéculation.

La règle de société est *simple* ou *composée* : simple, lorsque toutes les mises sont faites pour le même temps ; composées, si elles sont faites pour des temps différents.

Règle de société simple.

Trois négociants se sont réunis en société pour un temps quelconque

La mise du premier est de 15000 fr ; celle du deuxième est de 11600 fr , et celle du troisième est de 19500 fr.

Le profit résultant de la spéculation est 17503 fr. Combien revient-il à chacun d'eux ?

De l'énoncé même de la question résulte la suite de rapports égaux : 15000 fr. : première partie de 17503 fr. :: 11600 fr. : deuxième partie de 17503 fr. :: 19500 fr. : troisième partie de 17503 fr.

Donc 15000 fr + 11700 fr + 19500 fr., somme des trois mises : première + deuxième + troisième partie de 17503 fr., ou à ce nombre lui-même :: 15000 fr. : première partie :: 11600 fr. : deuxième partie :: 19500 fr. : troisième partie.

$$15000 \text{ fr.} + 11600 \text{ fr.} + 19500 \text{ fr.} = 46100 \text{ fr.}$$

Représentons par x la valeur de la première partie, par y la valeur de la seconde, et par z celle de la troisième, nous aurons les trois proportions suivantes :

$$46100 \text{ fr.} : 17503 \text{ fr.} :: 15000 \text{ fr.} : x \text{ fr.}$$
$$46100 \text{ fr.} : 17503 \text{ fr.} :: 11600 \text{ fr.} : y \text{ fr.}$$
$$46100 \text{ fr.} : 17503 \text{ fr.} :: 19500 \text{ fr.} : z \text{ fr.}$$

Résolvant chacune de ces trois proportions, on obtient pour la valeur de x, de y et de z, les trois nombres : 5695 fr. 11 c. $\frac{429}{461}$, 4404 fr. 22 c. $\frac{258}{461}$ et 7403 fr. 65 c. $\frac{235}{461}$, lesquels, par leur réunion, procurent le nombre à partager 17503 fr , ce qui prouve que tous les calculs ont été faits exactement.

Règle de société composée.

56. Trois spéculateurs se sont réunis en société. Le premier a mis 2700 fr. pendant 2 ans $\frac{1}{2}$; le deuxième 4000 fr. pendant 17 mois, et le troisième 4310 fr pendant 8 mois seulement.

Il s'agit de partager entre eux la somme de 7004 fr., proportionnellement à leurs mises respectives et aux différents temps que ces mises sont restées dans la société.

Or, il est évident que 2700 fr. pendant 2 ans $\frac{1}{2}$ ou pendant 30 mois, rapportent le même profit que 30 fois 2700 fr. ou 81000 fr. pendant un seul mois;

Que 4000 fr. pendant 17 mois rapportent le même bénéfice que 17 fois 4000 fr. ou 68000 fr. pendant un mois;

Que 4310 fr. pendant 8 mois procurent aussi le même profit que 8 fois 4310 fr. ou 34480 fr. pendant un mois.

Ainsi, un raisonnement tout à fait simple conduit à multiplier chaque mise par le temps qui lui correspond. Par ce moyen, l'opération devient facile et s'achève comme ci-dessus.

En faisant tous les calculs, on trouvera que les sommes revenant aux trois spéculateurs sont :

3092 fr. 02 c., 2595 fr. 77 c., et 1316 fr. 21 c.

Résolvons maintenant une question qui paraît présenter plus de difficultés.

Trois spéculateurs se réunissent en société pour 4 ans 9 mois, ou 57 mois. Le premier fait d'abord une mise de 21000 fr., un an ou 12 mois après, il en fait une seconde de 15000 fr.; le deuxième, 16 mois après le commencement de la spéculation, verse une somme de 25000 fr., et 9 mois après avoir fait ce versement, il retire 6000 fr.; enfin, le troisième fait, dès le commencement, une mise de 43,000 fr. qui demeure dans la société tout le temps de sa durée.

Partager entre eux la somme de 36000 fr., eu égard à toutes ces circonstances.

Voici le raisonnement :

Les 21000 fr. mis d'abord par le premier négociant sont restés 57 mois dans la société, et les 15000 fr. qu'il a mis 12 mois après n'y sont restés que 45 mois. Ces deux mises donnent le même bénéfice que 57 fois 21000 fr. + 45 fois 15000 fr. ou 1872000 fr. pendant un seul mois.

Le second négociant a mis 25000 fr. qui sont restés 9 mois dans la société; il a ensuite retiré 6000 fr., et le reste 25000 fr. — 6000 fr. = 19000 fr. n'a été dans la société que 57 — 16 — 9 ou 32 mois. Ces deux sommes doivent donc rapporter autant de profit que 25000 fr. $\times$ 9 + 19000 fr. $\times$ 32 ou 1441000 fr. pendant un mois.

Enfin, les 43,000 fr. du troisième spéculateur étant restés pendant 57 mois dans la société, rapportent autant que 43000 fr. $\times$ 57 ou 2451000 fr. pendant un mois.

Il ne s'agit donc plus que de partager le bénéfice qui est 36000 fr., en se conformant à ce qui a été dit, en parties proportionnelles aux trois mises ramenées à la même unité de temps.

En faisant toutes les opérations, on trouvera qu'il revient :

Au premier 11691 fr. 88 c.;

Au deuxième 9000 fr. 00 c.,

Et au troisième 15308 fr. 12 c.

RÈGLE D'INTÉRÊT.

57. On appelle intérêt ce que rapporte une somme placée pendant un certain temps à un taux convenu. On appelle taux la somme que rapportent 100 fr. au bout d'une année.

Premier exemple. 740 fr. sont placés pendant un an à 6 pour 100. On demande quel est l'intérêt que rapporteront les 740 fr. Voici comment on raisonne : 100 fr., au bout d'un an, rapportent 6 fr.; combien rapportent 740 fr ?

1 fr. rapporte 100 fois moins que 100 fr., c'est-à-dire $\frac{6}{100}$;

740 fr. rapporteront 740 fois plus que 1 fr., c'est-à-dire $\frac{6\times740}{100}$;

En simplifiant, on a $\frac{4440}{100}=44$ fr. 40 cent.;

Donc 740 fr., placés pendant 1 an à 6 pour 100, rapporteront 44 fr. 40 c.

Il ne faut pas ignorer que dans toutes les règles d'intérêt, soit dans la langue, soit dans le commerce, le mois est regardé comme composé de 30 jours, et, par conséquent, l'année de 360 jours.

Second exemple. Une somme de 6480 fr. a été placée pendant 3 ans, 2 mois et 7 jours, et a rapporté 948 fr. On demande le taux de l'intérêt.

6480 fr. rapportant 948 fr. pendant 3 ans, 2 mois et 7 jours,

1 fr. rapportera 6480 fois moins ou $\frac{948}{6480}$.

1 fr., en 3 ans, 2 mois et 7 jours ou 1147, rapporte donc, comme nous venons de le dire, $\frac{948}{6480}$.

En 1 jour, 1 fr. rapportera $\frac{948}{6480\times1147}$;

100 fr., au bout de 360 jours, rapporteront $\frac{948\times360\times100}{6480\times1147}$.

Cela est donc le taux de 100 fr. pendant 1 an, et c'est ce qu'il nous fallait chercher.

Maintenant, simplifions :

$$\frac{\overset{158}{948}\times\overset{1}{360}\times100}{\underset{\substack{72\\18\\3}}{6480}\times1147}=\frac{15800}{3441}\qquad \begin{array}{r|l} 15800 & 3441 \\ \cline{2-2} 20360 & 4,59 \\ \cline{1-1} 31550 & \\ 581 & \end{array}$$

4 fr. 59 cent. est le taux.

RÈGLE D'ESCOMPTE.

58. L'escompte est la retenue que l'on fait sur la valeur d'un billet payable après un certain temps, lorsqu'on veut toucher ce billet avant son échéance.

Dans un billet, il y a deux valeurs : la valeur nominale, qui est la valeur inscrite dans le billet, et la valeur actuelle, ou la valeur inscrite diminuée de ses intérêts, autrement dit la somme que l'on doit prendre avant l'échéance du billet.

Il y a deux escomptes : l'escompte en dehors, qui est l'intérêt de la valeur nominale, et l'escompte en dedans, qui est l'intérêt de la valeur actuelle. Ainsi, si j'ai un billet de 100 fr. placés à 6 pour cent, payable dans un an, et que je veuille toucher l'argent de suite, on me donnera 94 fr., et c'est l'escompte en dehors. Si j'ai un billet de 106 fr à 6 p. 100, payable dans un an, et que je veuille en toucher la valeur avant son échéance, on me donnera 100 fr. : c'est l'escompte en dedans. 106 fr., valeur inscrite dans le billet, est la valeur nominale, et 100 fr., somme que l'on doit toucher, est la valeur actuelle (1).

Problème. On veut escompter un billet de 5460 fr., payable au bout de 5 mois et 7 jours, le taux étant à 6 p. 100, et l'escompte en dehors.

D'après la définition, il faut que je prenne l'intérêt de la valeur nominale.

Ramenons, comme nous le faisons toujours, à l'unité : 100 fr., au bout d'un an, rapportent 6 fr.; au bout d'un jour, ils rapportent $\frac{6}{360}$; 1 fr., au bout d'un jour, rapportera $\frac{6}{360\times100}$; au bout de 157 jours (5 mois, 7 jours $=157$), il rapportera $\frac{6\times157}{360\times100}$; 5460 fr., au bout de 157 jours, rapporteront $\frac{6\times157\times5460}{360\times100}$.

Simplifions : $6\times157\times546\ \frac{157\times91}{100}=14287$ divisé par $100=142{,}87$.

142 fr. 87 cent. sont les intérêts au bout de 157 jours. Retranchons cette somme de 5460, nous aurons la valeur actuelle.

$$\begin{array}{r} 5460,\ 00 \\ 142,\ 87 \\ \hline 5317,\ 13 \end{array}$$

(1) Comme il pourrait arriver que l'on oubliât ce que c'est que l'escompte en dedans et en dehors; on fait un tableau qui, au moyen des quatre initiales des mots nominal, actuel, dehors, dedans, rappelle très-bien ce que c'est que chacun de ces escomptes :

$$\text{Escompte}\left\{\begin{array}{l}\text{dedans}\\ \text{dehors}\end{array}\right. = \text{intérêt de la valeur}\left\{\begin{array}{l}\text{nominale.}\\ \text{actuelle.}\end{array}\right.$$

Ainsi, on écrit dans leur ordre naturel; A, D, H, N.

On a mis H au lieu de D pour représenter le mot dehors, parce qu'on aurait pu confondre avec dedans. Ce tableau étant fait, on prend de chaque côté les deux lettres qui sont les plus rapprochées, on a d'un côté AD et de l'autre HN, ce qui rappelle que l'escompte en dedans est l'intérêt de la valeur actuelle, et que l'escompte en dehors est l'intérêt de la valeur nominale.

La valeur que l'on doit toucher avant l'échéance du billet est donc 5317 fr. 13 cent.

Problème. 7460 fr., payables au bout de 8 mois, 12 jours, à 7 p. 100, l'escompte étant en dedans, on veut être payé avant l'échéance du billet.

Il faut chercher quel est le billet payable au bout de 8 mois, 12 jours ou 252 jours, qui vaut 100 fr. actuellement.

100 fr., dans un an, rapportent 7 fr.; 100 fr., au bout d'un jour, rapportent $\frac{7}{360}$; au bout de 252 jours, 100 fr. rapportent $\frac{7\times 252}{360}$; 1 fr. rapporte donc, au bout de 252 jours, $\frac{7\times 252}{360\times 100}$. Maintenant 7460 fr., au bout du même temps, rapportent $\frac{7\times 252\times 7460}{360\times 100}$.

Et simplifiant, $\frac{7\times 7\times 746}{100}=\frac{49\times 746}{100}=\frac{36554}{100}=365{,}54.$

$$\begin{array}{r} 7460,\ 00 \\ 365,\ 54 \\ \hline 7094,\ 46. \end{array}$$

7094,46 est la somme qui revient au porteur du billet.

Problème. Un billet de 6400 fr., escompté en dehors à 6 p. 100, a donné pour escompte 738 fr. 24 cent. On demande au bout de quel temps la valeur totale serait payable.

100 fr., au bout d'un an, rapportent 6 fr.; 1 fr., au bout d'un an, rapporte $\frac{6}{100}$; 6400 fr., au bout d'un an, rapportent $\frac{6\times 6400}{100}$. Simplifions les fractions : $\frac{6\times 6400}{100}=6\times 64=348.$

Autant de fois 348 sera contenu dans 738,24, autant il y aura de temps.

Faisons les divisions de 738,24 : 384 ou de 73824 par 38400 :

$$\begin{array}{r|l} 73824 & 38400 \\ \cline{2-2} 35424 & 1\text{ a.}, 11\text{ m.}, 2\text{ j.} \\ 12 & \\ \cline{1-1} 70848 & \\ 35424 & \\ \cline{1-1} 425088 & \\ 41088 & \\ 2688 & \\ 30 & \\ \cline{1-1} 806,40 & \\ 38,40 & \end{array}$$

En 738,24 combien de fois 386? Il y va une fois et il reste 354,24; si je multiplie ce nombre par 12, et que je divise par 384, j'aurai au quotient le nombre de mois; si je multiplie le reste 2688 par 30, et que je divise par 384, j'aurai le nombre de jours; le temps est donc 1 an, 11 mois, 2 jours.

Règle d'alliage et de mélange.

59. Un marchand de vin achète 54 litres de vin à 0,60 c. le litre; il y a mélangé 6 litres d'eau. On demande quel sera le prix du litre du mélange, admettant que l'eau ne coûte rien.

Il faut voir combien il y a de litres en tout, et diviser la dépense faite par le nombre de litres.

54 l. à 0 fr. 60 c. coûtent, $0,60\times 54$.

$54+6=60$,

1 litre coûtera $\dfrac{0,60\times 54}{60}=0,54$.

Ainsi, le prix du litre du mélange est de 0, 54.

Supposons qu'on prenne deux espèces de vin et qu'on les mélange, et qu'on demande à combien revient le litre du mélange.

On mélange 28 litres coûtant 0, 75 c. le litre avec 15 litres coûtant 0, 84 c. le litre. On demande le prix d'un litre du mélange.

Les 28 litres ont coûté $0,75\times 28$; les 15 litres ont coûté $0,84\times 15$; les 43 litres du mélange coûteront $0,84\times 15+0,75\times 28$; $0,75\times 28=21,00$; $0,84\times 15=12,60$; 12 f. 60 + 21 f. = 33,60; les 43 coûtent donc 33,60; un litre coûte 43 fois moins ou $\dfrac{33\text{ f. }60}{43}$;

$$\begin{array}{r|l} 33,60 & 43 \\ \cline{2-2} 3,50 & 0,78 \\ 6 & \end{array}$$

Le litre du mélange vaut donc 0,78 à peu près.

S'il y avait trois sortes de vin, on ferait la même chose.

Dans les ouvrages d'orfévrerie, l'or et l'argent n'offrant pas assez de facilité pour être travaillés, on a mélangé chacun de ces deux métaux avec du cuivre.

Le nombre qui exprime combien de parties d'argent ou d'or entrent dans un alliage, s'appelle titre. Ainsi, lorsque l'on a un lingot de $\frac{9}{10}$ d'argent pur, on dit $\frac{9}{10}$ de fin; $\frac{9}{10}$ est le titre.

Un lingot a $\frac{9}{10}$ de fin, lorsqu'il a 9 parties d'argent pur et 1 de cuivre.

Problème. Combien faut-il ajouter de cuivre à 15 kilogrammes d'argent pour avoir un alliage à $\frac{9}{14}$ de fin? Voici comment on raisonne :

Pour un kilogramme d'alliage, il y a $\frac{9}{14}$ kilogrammes d'argent ; pour 14 kilogrammes d'alliage, il y a 9 parties d'argent, et *pour* 1 *kilogramme d'argent il y a* $\frac{14}{9}$ *d'alliage*; donc, pour 15 kilogrammes d'argent, il faudra 15 fois $\frac{14}{9}$, c'est-à-dire $\frac{14\times15}{9}=\frac{70}{3}=23+\frac{1}{3}$. Ainsi il y a un alliage de 23 kilog. $+\frac{1}{3}$.

Retranchons 15 de $23\frac{1}{3}$, on a 8 kilog. et $\frac{1}{3}$, qui représentent la partie du cuivre qu'il faut ajouter à 15 kilog. d'argent pur pour avoir un alliage de $\frac{9}{14}$ de fin.

Problème. On a un lingot à 0,75 de fin, on en a un second à 0,83 de fin ; je voudrais faire un mélange de ces deux lingots pour faire 432 kilogrammes à 0,78 de fin.

Si je prends un kilog. du premier, qui est à 0,75 de fin, pour arriver à 0,78, je gagne 0,03.

Mais si je prends 1 kil. du second à 0,83 de fin, je perds 0,05.

Pour ne gagner que 0,01, il faudrait que je prisse $\frac{1}{3}$ du premier.

Pour ne perdre que 0,01, il faudrait que je prisse $\frac{1}{5}$; donc sur $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$, ou $\frac{8}{15}$ d'alliage, il faut prendre $\frac{1}{3}$ du premier ;

Pour prendre 15 fois plus d'alliage, c'est-à-dire pour 8, il faut prendre $\frac{15}{3}$,

Et pour un kilog., il ne faut prendre que $\frac{15}{3\times8}$;

Pour 432; on prend 432 fois plus, c'est-à-dire $\frac{15\times432}{3\times8}$.

Simplifions :

$$\frac{15\times432}{3\times8}=5\times54=270.$$

Il faut prendre 270 kilog. du premier lingot. En retranchant 270 kilog. de 432, je trouve 162, qui est le nombre de kilog. qu'il faut prendre du second lingot.

Pour voir si nous ne nous sommes pas trompés, nous allons faire la preuve.

$270\times0,75$ donne 202,50 de fin.

$162\times0,83$ de fin donne 134,46 de fin. Or 202,50 de fin + 134,46 de fin $=336{,}96$ de fin, en divisant 336,96 par 432, nous devons trouver 0,78.

$$\begin{array}{r|l} 336{,}96 & 432 \\ \cline{2-2} 3456 & 0{,}78 \\ \hline 0000 & \end{array}$$

Problème. On a un lingot à 0,83 de fin, et un second à 0,92 de fin; on veut faire avec les deux premiers un troisième lingot de 654 kilog. à 0,86 de fin. Si je prends un kilog. du premier, je gagne 0,03; si je prends un kilog. du second, je perds 0,06; pour gagner 0,01, je prends $\frac{1}{6}$ du second.

Pour un demi-kilog., on a $\frac{1}{3}$, pour 1 kilog., on a $\frac{2}{3}$, pour 654 kilog., on aura $\frac{2\times654}{3}=436$ kilog., on a 436 kilog. à prendre du premier lingot.

Retranchant 436 de 654, on a 218 kilog. à prendre sur le second lingot

Vérification. $436\times0{,}83=361{,}88$.

$218\times0{,}92=200{,}56$.

Mais $361{,}88+200{,}56=562{,}44$.

Divisant 562,44 par 654, on trouve 0,86.

$$\begin{array}{r|l} 562{,}44 & 654 \\ \cline{2-2} 39{,}24 & 0{,}86 \\ 0{,}00. & \end{array}$$

Progressions par différence.

60. *Premier problème.* Une personne paye à une autre une somme inconnue, en 28 payements, dont le premier est de 5 francs, et qui se surpassent tous de 4 francs : on demande 1° quel est le dernier de ces payements? 2° quelle est la somme de tous ces payements?

On connaît ici le premier terme, la différence commune et le nombre des termes; or, ces données sont d'abord suffisantes pour trouver le dernier terme. Ce dernier terme en effet, d'après la nature de la progression, n'est autre chose que le premier terme, augmenté de la différence commune répétée 27 fois, c'est-à-dire autant de fois qu'il y a de termes avant le dernier.

Calcul.

27, nombre des termes qui précèdent le dernier.
4, différence commune.

108
5, premier terme.

113, dernier terme.

Les données sont suffisantes aussi pour trouver la somme de tous les termes. En effet, on sait maintenant que le dernier terme est 113. Or, la somme de tous les termes est égale à la somme du premier et du dernier termes, multipliée par la moitié du nombre des termes.

Calcul.

$$\begin{array}{rl} 5, & \text{premier terme.} \\ 113, & \text{dernier terme.} \\ \hline 118 & \\ 14, & \text{moitié du nombre des termes.} \\ \hline 472 & \\ 118 & \\ \hline 1652, & \text{somme de tous les termes.} \end{array}$$

Second problème. Une somme de 1652 francs a été payée en plusieurs payements qui se surpassaient tous également. Le premier payement a été de 5 francs, et le dernier de 113 francs. On demande : 1° quel a été le nombre des payements ? 2° qu'elle était la différence commune de ces payements ?

On connaît ici le premier terme, le dernier et la somme de tous les termes ; or, ces données suffisent pour calculer le nombre des termes. En effet, la somme de tous les termes d'une progression par différence, est égale à la somme du premier et du dernier termes, multipliée par la moitié du nombre des termes. Si donc on divise la somme de tous les termes qui est égale à 1652 par 118, somme du premier et du dernier, le quotient sera un nombre égal à la moitié du nombre des termes. En doublant ce quotient, on aura donc le nombre de tous les termes.

Calcul.

$$\begin{array}{r|l} \text{Somme de tous les termes } 1652 & 118, \text{ somme du premier et du dernier.} \\ \cline{2-2} 472 & 14, \text{ moitié du nombre des termes.} \\ 0 & \end{array}$$

Donc le nombre total des termes est $14 \times 2 = 28$.

Ces données suffisent aussi pour calculer la différence commune. En effet, si du dernier terme 113 on ôte le premier terme qui est 5, le reste 108 qu'on obtient, est la différence commune répétée autant de fois qu'il y a eu de payements faits avant le dernier. Or, on vient de trouver que le nombre total des termes ou des payements est égal à 28 ; donc, si on divise par 27 le nombre 108, le quotient exprimera la différence commune des payements.

Calcul.

$$\begin{array}{r|l} 108 & 27 \\ \cline{2-2} 0 & 4, \text{ différence des payements.} \end{array}$$

Progressions par quotients.

61. *Premier problème.* Une personne fait quatre payements pour s'acquitter d'une dette. Le premier payement est de 15 francs, et le dernier de 405 fr.; tous ces payements offrent des sommes qui contiennent la précédente le même nombre de fois. On demande quel est le nombre de fois que ces sommes se contiennent ?

Puisque le dernier terme d'une progression par quotient n'est autre chose que le premier terme multiplié par la raison autant de fois facteur qu'il y a de termes avant lui, et qu'il y a eu 4 payements, le dernier payement est égal au premier multiplié par la troisième puissance du nombre de fois que chaque payement contient le précédent.

On doit donc diviser le dernier payement par le premier. Le quotient exprimera le nombre de fois que chaque payement contient celui qui le précède, élevé à la troisième puissance ou pris trois fois facteur. Donc, pour obtenir ce nombre de fois, il faudra extraire la racine cubique du quotient.

Calcul.

Dernier payement	405	15, premier payement.
	105	27, cube du nombre de fois que chaque payement contient le précédent.
	0	

La racine cubique de 27 est 3; donc chaque payement contient le précédent trois fois.

Remarque. Toute progression par quotient, décroissante à l'infini, a nécessairement 0 pour limite de son décroissement. Une progression de cette espèce, quand on l'écrira dans un sens inverse, commencera donc par 0. Cela étant, la somme de tous les termes de ces sortes de progressions, s'obtiendra en multipliant le dernier terme par la raison, et divisant le produit par la raison diminuée d'une unité.

Exemple. Quelle est la somme de tous les termes d'une progression par quotient, décroissante à l'infini, dont la raison est 5 et le dernier terme 17 ?

En renversant cette progression, son premier terme pourra être considéré comme 0. La somme de tous les termes sera donc égale à $\frac{17 \times 5}{4} = \frac{85}{4} = 21\frac{1}{4} = 21,25$.

Il résulte de là que la somme de toutes les puissances de la fraction $\frac{1}{2}$ qui forment une progression par quotient, décroissante à l'infini, dont la raison est 2, $= \frac{1 \times 2}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$;

Que la somme de toutes les puissances de $\frac{1}{3}$, formant une progression décroissante à l'infini, dont la raison est 3, $=\frac{1\times3}{3\times2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$;

Que la somme de toutes les puissances de $\frac{1}{4}$, formant aussi une progression décroissante à l'infini, dont la raison est 4, $=\frac{1\times4}{4\times3}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$;

Que la somme de toutes les puissances d'un $\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$; que celle de toutes les puissances de $\frac{1}{6}=\frac{1}{5}$; ainsi de suite.

Second problème. Une personne paye à une autre une somme inconnue, en quatre payements, dont chacun des trois derniers contient le précédent trois fois; le premier payement est de 15 francs; on demande : 1° quel est le dernier payement? 2° quelle est la somme des quatre payements?

Ces données sont d'abord suffisantes pour calculer le dernier payement. En effet, ce dernier payement, d'après la nature de la progression, n'est autre chose que le premier payement multiplié par une puissance de 3 qu'indique le nombre de payements qui précèdent le dernier. Cette puissance est ici la troisième, puisqu'il y a en tout quatre payements.

Calcul.

15, premier payement.
27, troisième puissance de 3.

105
30

405, dernier payement.

Ces données suffisent aussi pour calculer la somme acquittée par les quatre payements. En effet, on obtient la somme de tous les termes d'une progression par quotient, en multipliant le dernier terme par la raison, retranchant le premier terme du produit, et divisant le reste par la raison diminuée d'une unité.

Calcul.

405, dernier terme ou dernier payement.
3, raison.

1215
15, premier terme ou premier payement.

1200 | 2, raison, diminuée d'une unité.
000 | 600, somme de tous les payements.

Intérêts composés.

62. Une somme est placée à intérêts composés, lorsque, au bout d'une période de temps déterminée (cette période est communément une année ou une demi-année), l'intérêt s'ajoute au capital pour produire, concurremment avec lui, des intérêts pendant la période ou les périodes suivantes.

Question. On demande ce que devient, au bout de 4 ans, une somme de 56789 fr., placée à intérêts composés, à raison de 4 pour 100 par an ?

100 fr. pendant un an rapportent 4 fr. d'intérêt ; donc, 1 fr. rapportera $\frac{4}{100}$=0 fr. 04 c.

Un franc vaut donc, au bout d'un an, 1 fr. 04.

Conséquemment, une somme quelconque, 8700 fr. par exemple, vaut au bout de l'année, 8700 fr. $\times$ 1 fr. 04 c.

La valeur d'un capital placé pour une année, à 4 pour 100, s'obtient donc en multipliant ce capital par 1 fr. 04 c.

Or, ici le capital placé au commencement de la première année, est 56789 fr.

La valeur de ce capital, à la fin de l'année, est donc 56789 fr. $\times$ 1 fr. 04 c.

Le capital placé au commencement de la deuxième année, est conséquemment 56789 fr. $\times$ 1 fr. 04 c.

Donc, ce capital, au bout de cette deuxième année, vaut 56789 fr. $\times$ 1 fr. 04 c $\times$ 1 fr. 04 c.

Ou 56789 fr. $\times(1,04)^2$.

Par la même raison, sa valeur, au bout de 3 ans, est 56789 fr. $\times(1,04)^2 \times 1,04$,

Ou 56789 fr. $\times(1,04)^3$.

Et, au bout de la quatrième année, elle est 56789 fr. $\times(1,04)^3 \times 1,04$ ou 56789 fr. $\times(1,04)^4$.

On généralise facilement.

Le calcul serait assez long par les moyens ordinaires.

En recourant aux logarithmes, on arrive promptement au résultat.

En effet, si l'on représente par x la valeur du capital au bout de la quatrième année, on aura l'équation suivante :

$$\log x = \log. 56789 + 4 \log. 1,04$$

Or, $\log 56789 = 4,7542642$
$4 \log\ 1,04 = 0,0081334$

Donc $\log x = 4,8223976$

Cherché dans la table, le logarithme 4,8223976 se trouve devant le nombre 66435. Donc, au bout de la quatrième année, le capital 56789 fr. est devenu 66435 fr

Deuxième question. Que vaudra, au bout de 3 ans $\frac{1}{2}$, un capital de 6543 fr., dont les intérêts se capitalisent de 6 mois en 6 mois, à raison de 2 fr. 75 c. par période de 6 mois?

Le raisonnement précédent fournit le type de calcul suivant. En représentant toujours par x la valeur du capital, au bout des 7 périodes de 6 mois :

$$x = 6543 \times (1{,}0275)^7.$$

$$x = \log 6543 + 7 . \log 1{,}0275.$$

$$\begin{aligned} \log 6543 &= 3{,}8157769 \\ 7 \log 1{,}0275 &= 0{,}0824726 \\ \hline \log x &= 3{,}8982495 \end{aligned}$$

$$x = 7911 \text{ fr.} + \text{une fraction}.$$

Règle d'escompte composé.

63. *Question.* Quel capital faut-il placer aujourd'hui à intérêts composés, à raison de 5 fr. 50 c. pour 100 par an, pour avoir, au bout de 9 ans, une somme de 29786 fr.?

Cette question est l'inverse des précédentes : au lieu donc de multiplier par $(1{,}055)^9$ le capital qu'on veut avoir au bout de 9 ans, il faut, au contraire, diviser ce capital par $(1{,}055)^9$. Le quotient indiquera nécessairement le capital qu'il faut placer actuellement pour avoir, au bout de la neuvième année, le capital voulu, qui est, dans le cas présent, 29786 fr.

Représentons par x le capital qu'il faut placer actuellement :

Nous aurons $$x = \frac{29786}{(1{,}055)^9}.$$

Voici le type du calcul par le moyen des logarithmes :

$$\log x = \log 29786 - 9 \log 1{,}055$$

$$\begin{aligned} \log 29{,}786 &= 4{,}4740122 \\ 9 \log \ 1{,}055 &= 0{,}2092725 \\ \hline \log x &= 4{,}2647397 \end{aligned}$$

$$x = 18396 \text{ fr. } 70 \text{ c.}$$

Remarque. La question ci-dessus eût pu être formulée de la manière suivante : Quelle somme faut-il payer actuellement pour se libérer, en tenant compte des intérêts composés, du capital 29786 fr., qui n'est exigible qu'au bout de 9 ans?

En conséquence, le type ci-dessus, en le modifiant convenablement, quand il y a des fractions de temps, est applicable à la solution de toutes les questions d'escompte composé. C'est pour cela que nous avons intitulé cet article *Règle d'escompte composé.*

Annuités.

64. On a déjà dit que l'annuité est l'acquittement d'une dette par des payements égaux faits d'année en année. Mais, comme celui qui se libère ainsi tient nécessairement compte au créancier des intérêts composés de toute la partie de la somme qui reste due après chaque payement égal, ces sortes de règles, d'ailleurs fort intéressantes, présentent d'assez grandes difficultés à l'arithméticien. On ne s'en occupera donc d'une manière spéciale que dans le traité d'algèbre.

Racines par approximation à l'aide des logarithmes.

65. Il peut se présenter trois cas : le nombre proposé peut être un nombre entier, un nombre fractionnaire, ou une fraction.

Premier cas. S'agit-il d'un nombre entier? l'opération est très-facile et très-courte.

On cherche le logarithme du nombre dont on veut avoir la racine par approximation, et l'on divise ce logarithme par l'indice de la racine. On cherche ensuite parmi les logarithmes le quotient obtenu, en augmentant sa caractéristique d'une unité, si l'on veut obtenir la racine à 0,1 près; de deux unités, si on veut l'avoir à 0,01 près : de trois unités, si on veut la calculer à 0,001 près; ainsi de suite.

Exemple. Quelle est la racine sixième de 25, à moins d'un millième d'unité près ?

Le logarithme de 25 est 1,397940

Le $\frac{1}{6}$ de ce logarithme est. . . . . 0,232990.

Ce sixième, cherché dans la table avec une caractéristique plus forte de trois unités, tombe entre les logarithmes de 1709 et 1710. Si on divise chacun de ces nombres par 1000, on obtient les quotients 1,709 et 1,710, qui diffèrent l'un de l'autre d'un millième; donc la racine carrée de 25, qui est comprise entre ces deux quotients, diffère de chacun d'eux de moins d'un millième.

Deuxième cas. Quand il s'agit d'un nombre fractionnaire, on retranche le logarithme du dénominateur de celui du numérateur; ensuite on divise le reste par l'indice de la racine; enfin, après avoir augmenté la caractéristique du quotient obtenu d'une, de deux ou de trois unités, suivant le cas, on cherche ce quotient dans la table.

Les deux logarithmes entre lesquels tombe ce quotient, ainsi modifié, sont ceux des nombres, divisés par 10, par 100 ou par 1000, entre lesquels est comprise la racine que l'on cherche.

Premier exemple. Quelle est, à moins d'un millième près, la racine septième de $\frac{519}{11}$?

Logarithme de 519.	2,715167
Logarithme de 11.	1,041393
Excès de l'un sur l'autre.	1,673774
Septième de cet excès.	0,239111

Ce septième cherché dans la table avec une caractéristique plus forte de trois unités, tombe entre les logarithmes 3,239049 et 3,239299, qui correspondent aux nombres 1734 et 1735. La racine cherchée est donc comprise entre les nombres 1,734 et 1,735 qui diffèrent entre eux d'un millième. Cette racine est donc calculée à moins d'un millième d'unité près.

La table de Callet eût permis de calculer immédiatement, à moins d'un dix-millième d'unité près, la racine septième du nombre fractionnaire $\frac{519}{11}$.

Deuxième exemple. Quelle est, à moins d'un centième près, la racine cubique de $31\frac{4}{7}$?

On réduirait d'abord les 31 unités en septièmes, ce qui procurerait le nombre fractionnaire $\frac{221}{7}$.

On achèverait ensuite l'opération comme dans l'exemple précédent.

Troisième cas. S'il s'agit d'une fraction, on retranche l'excès du logarithme du dénominateur sur celui du numérateur, d'autant de fois dix unités qu'il y a d'unités dans l'indice de la racine. Le reste de cette soustraction, divisé par l'indice de la racine, est le complément du logarithme de la racine cherchée; c'est-à-dire, que sa racine doit être considérée comme étant trop forte de dix unités; et que, conséquemment, si l'on avait des tables assez étendues pour que ce logarithme s'y trouvât, il faudrait diviser le nombre correspondant par 10,000,000,000. Mais, comme les tables ordinaires ne vont que jusqu'à 10,000, et que les plus étendues ne dépassent pas 100,000, on retranche six unités ou cinq unités de la caractéristique de ce logarithme. On cherche le reste dans la table, et on divise le nombre correspondant seulement par 10,000 ou par 100,000, suivant qu'on a retranché six unités ou cinq unités de la caractéristique; c'est-à-dire qu'on le fait exprimer des dix-millièmes ou des cent-millièmes.

Exemple. Quel est, à moins d'un millième d'unité près, la racine cubique de la fraction $\frac{13}{19}$?

Calcul.

Le logarithme de 19 est		1,278754
Celui de 13 est		1,113943
Excès de l'un sur l'autre		0,164811
De	30,000000	
Je retranche	0,164811	
Le reste est	29,835189	
Dont le $\frac{1}{3}$ est	9,945063	

Ce tiers, cherché dans la table de Lalande avec 3 pour caractéristique, tombe entre les logarithmes de 8811 et 8812.

La racine cubique de $\frac{13}{19}$ tombe donc entre 0,8811 et 0,8812.

La table de Callet, qui contient les logarithmes des nombres jusqu'à 100,000, permettrait de chercher une décimale de plus, et d'obtenir ainsi immédiatement la racine cubique de $\frac{13}{19}$, à moins d'un cent-millième d'unité près.

Observation. S'il arrive que l'indice de la racine soit un diviseur exact de 10, s'il est 2 ou 5, c'est-à-dire, s'il s'agit de la racine carrée ou de la racine cinquième, l'opération est encore moins longue.

Après avoir calculé l'excès du logarithme du dénominateur sur celui du numérateur de la fraction proposée, on formerait tout de suite le complément arithmérique de cet excès, et on en prendrait la moitié ou la cinquième partie, suivant qu'il s'agirait de la racine carrée ou de la racine cinquième.

Cette moitié ou ce cinquième, cherchés dans la table, répondraient à un nombre 100,000 fois ou 100 fois plus grand que la racine que l'on cherche.

Exemple. Quelle est, à moins d'un centième près, la racine cinquième de $\frac{7}{15}$?

Logarithme de 15	1,176091
Logarithme de 7	0,845098
Excès de l'un sur l'autre	0,330993
Complément de cet excès	9,669007
Cinquième de ce complément	1,933801

Ce cinquième de logarithme, dont la caractéristique doit être considérée comme ne renfermant plus que deux unités de trop, tombe entre les logarithmes des nombre 85 et 86. Ces nombres, divisés l'un et l'autre par 100, deviennent 0,85 et 0,86. La racine cinquième de $\frac{7}{15}$ est donc comprise entre 0,85 et 0,86 : elle est donc calculée à moins d'un centième près.

Si l'on avait voulu avoir la racine de $\frac{7}{15}$, à moins d'un dix-millième d'unité près, on eût augmenté de deux unités la caractéristique du logarithme 1,933801, ce qui eût donné le logarithme 3,933801, dont la caractéristique eût alors été considérée comme trop forte de 4 unités.

Ce nouveau logarithme, cherché dans la table, tombe entre les logarithmes 3,933791 et 3,933841, qui appartiennent aux nombres 8586 et 8587.

La racine cinquième de $\frac{7}{15}$ tombe donc entre les deux fractions décimales 0,8586 et 0,8587.

Les tables de Callet permettraient de calculer immédiatement cette racine, à moins d'un cent-millième d'unité près.

Calculs avec approximation.

66. Il arrive fréquemment que les nombres sur lesquels on doit opérer sont terminés par une grande quantité de chiffres décimaux, dont les derniers surtout expriment des divisions de l'unité qui n'ont presque aucune valeur, et dont la conservation allonge et complique, sans utilité, les calculs à effectuer. On a donc dû, pour épargner le temps et pour ne pas se donner une peine infructueuse, chercher des méthodes qui permissent d'obtenir, en supprimant une partie de ces chiffres, une approximation suffisante. On en a trouvé d'aussi simples que commodes, à l'aide desquelles on abrége considérablement certains calculs, sans s'exposer au danger de s'éloigner plus qu'on ne veut du véritable résultat.

67. *Addition.* Ne conservez, dans chacun des nombres proposés (lorsque leur nombre n'est pas supérieur à dix), que la décimale immédiatement inférieure à celle à laquelle vous avez fixé votre approximation; faites ensuite la somme de ces nombres ainsi modifiés.

Exemple. Soit proposé de calculer, à moins de 0,001, la somme des nombres suivants : 34,78689; 17,543289; 2,40410; 0,904326; 8,656187 et 45,240228.

$$\begin{array}{r} 34,7868 \\ 17,5432 \\ 2,4041 \\ 0,9043 \\ 8,6561 \\ 45,2402 \\ \hline 109,5347 \end{array}$$

La somme de ces nombres est, à moins de 0,001, égale à 109,5347. Mais si l'on ne veut conserver que les trois premières décimales de ce résultat, il arrive que la somme cherchée est comprise entre 109,5347 et 109,5357, nombres qui diffèrent entre eux de 0,001. Donc elle diffère de chacun d'eux, et, par conséquent, du nombre intermédiaire 109,535, de moins de 0,001. Elle est donc égale à 109,535, à moins de 0,001.

Première observation. L'erreur contenue dans le résultat serait encore moindre, en corrigeant, quand il y a lieu, conformément au principe général, le dernier chiffre conservé de chacun des nombres. Moyennant cette attention, l'erreur de chaque partie de la somme serait moindre qu'un demi-dix-millième, et par conséquent celle de la somme serait moindre qu'un demi-millième. Il peut même se faire que, par suite de la compensation, cette erreur soit nulle ou excessivement petite.

Reprenons l'addition qui vient d'être faite, en ayant soin d'augmenter d'une unité, lorsqu'il y aura lieu, le dernier chiffre conservé dans chacun des nombres proposés :

$$\begin{array}{r} 34,7869 \\ 17,5433 \\ 2,4042 \\ 0,9043 \\ 8,6562 \\ 45,2402 \\ \hline 109,5351 \end{array}$$

La somme de ces nombres est égale, à moins d'un dix-millième, à 109,5351 ; mais si on ne conservait que les trois premières décimales, on ne serait plus certain que le résultat ne diffère que d'un demi-dix-millième.

Seconde observation. Quand on veut obtenir, à moins d'une unité décimale d'un ordre donné, la somme de plus de dix nombres, il est nécessaire de conserver, dans chacun de ces nombres, deux décimales de plus que n'en comporte l'approximation que l'on veut obtenir. On en voit bien la raison.

68. *Soustraction.* Pour obtenir, à moins d'une unité décimale donnée, la différence de deux nombres décimaux, conservez, dans chacun d'eux, un nombre de décimales égal à celui de l'approximation.

Si vous voulez avoir cette différence à moins d'une demi-unité décimale d'un ordre donné, conservez, dans les deux nombres, une décimale de plus qu'il n'y en a dans l'approximation.

Exemple. Calculer, à moins d'un demi-centième, la différence des deux nombres 73,437934 et 14,3708423.

Je ne conserve que trois décimales.

$$\begin{array}{r} 73,438 \\ 14,371 \\ \hline 59,067 \end{array}$$

La différence des deux nombres donnés est égale à 59,06, à moins d'un demi-centième. Elle différerait encore moins si l'on changeait le 6 en un 7, en vertu de la règle générale.

69. *Multiplication.* Pour obtenir les produits décimaux, à moins d'une unité décimale d'un ordre donné, il suffit d'obtenir chaque produit partiel avec une certaine approximation facile à déterminer, comme on va le voir.

Soit proposé d'obtenir le produit des deux nombres 43,75438 et 7,5782, à un millième d'unité près.

Pour que le produit total soit obtenu à moins d'un millième, il suffit que chaque produit partiel soit calculé à moins d'un dix-millième. Mais je remarque que, pour déterminer chaque produit partiel avec ce degré d'approximation, je puis négliger de multiplier, par chaque chiffre du multiplicateur, la partie du multiplicande dont le produit par ce même chiffre procure des unités inférieures aux cent-millièmes. Ainsi, pour obtenir le produit du multiplicande par 0,0002, je puis négliger de multiplier les quatre chiffres 5, 4, 3 et 8; car, en opérant de cette manière, la partie supprimée dans le multiplicande est moindre que 0,1 : donc l'erreur qui en résultera est moindre que $0,1 \times 0,0002$ ou que 0,00002; elle sera donc moindre que 0,0001. Ainsi, en multipliant par 0,0002, je puis supprimer les chiffres 5, 4, 3 et 8 du multiplicande. De même, en multipliant par 0,008, je puis supprimer les chiffres 4, 3 et 8; en multipliant par 0,07, je puis supprimer les chiffres 3 et 8; et en multipliant par 0,5, je puis supprimer le chiffre 8. Mais en multipliant par 7, je ne puis supprimer aucun chiffre. Je conclus de là généralement qu'il suffit de conserver, dans la multiplication du multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, une partie du multiplicande, telle que les plus faibles unités du produit qui en résultent soient inférieures de deux ordres à celle de l'approximation cherchée.

Voici comment on ordonne les facteurs.

On pose chaque chiffre du multiplicateur sous le chiffre du multiplicande exprimant les plus faibles unités du multiplicande qui doivent être multipliées par ce chiffre du multiplicateur. Ainsi, dans l'exemple dont il s'agit, on écrirait le chiffre 7 au-dessous du chiffre 8, le chiffre 5 au-dessous du chiffre 3.... Cela se réduit évidemment à placer le chiffre qui représente les unités de l'ordre le plus élevé du multiplicateur sous le chiffre convenable du multiplicande, et à écrire ensuite les autres chiffres du multiplicateur à la gauche de celui-là dans un ordre inverse.

$$\begin{array}{r}
4375438 \\
28757 \\
\hline
30628066 \\
2187715 \\
306278 \\
35000 \\
874 \\
\hline
33157933
\end{array}$$

Après avoir supprimé les virgules, je multiplie 4375438 par 7; 437543 par 5; 43754 par 7; 4375 par 8, et enfin 437 par 2. J'écris les cinq produits partiels de manière que les plus faibles unités se correspondent, attendu que, par suite de la disposition du calcul, ces unités sont de même espèce. La somme de tous ces produits partiels est égale à 33157933 cent-millièmes ou à 331,57933. Le produit cherché est donc égal à 331,57933, à moins de 0,001. Mais si je ne veux conserver dans le résultat que trois décimales, je remarque que le produit cherché est compris entre 331,57933 et 331,58033, nombres qui diffèrent de 0,001. Donc, il diffère de chacun d'eux, et, à plus forte raison, du nombre intermédiaire 331,580, de moins de 0,001. Donc il est égal à 331,580 à moins de 0,001.

Procédé général. Pour obtenir, à moins d'une unité décimale d'un ordre donné, le produit de deux nombres décimaux, renfermant beaucoup de décimales, placez le chiffre des unités de l'ordre le plus élevé du multiplicateur sous un chiffre du multiplicande tel, que le produit de ces deux chiffres procure des unités inférieures de deux ordres à l'unité de l'approximation que vous voulez obtenir; et écrivez à la gauche les autres chiffres du multiplicateur dans un ordre inverse. Les facteurs ainsi ordonnés, multipliez le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, en négligeant les chiffres du multiplicande placés à la droite de celui sur lequel vous opérez actuellement, et faites correspondre les plus faibles unités de tous les produits partiels que vous calculez; additionnez ensuite ces produits, et séparez, sur la droite de la somme, un nombre de chiffres décimaux supérieur de deux unités à celui de l'approximation; enfin supprimez deux chiffres sur la droite du résultat, et augmentez d'une unité le dernier des chiffres conservés. Le nombre décimal ainsi obtenu est le produit demandé, avec le degré d'approximation voulu.

On peut diminuer encore l'erreur que contient le résultat, en augmentant d'une unité, lorsqu'il y a lieu, le premier chiffre de droite conservé au multiplicande dans chaque produit partiel. Moyennant cette attention, l'erreur de chacun des produits partiels, dans le cas de l'exemple précédent, sera moindre d'un demi-dix-millième, et par conséquent celle de la somme sera moindre d'un demi-millième. Il arrive même quelquefois que, par suite de la compensation, cette erreur devient nulle ou excessivement petite.

Appliquons cette observation à la multiplication que nous avons prise pour exemple.

4375438
28757
30028066
2187720
306278
35000
876
33157940

Effectuons les multiplications par 7, 7 et 8 comme dans l'opération précédente; mais 1° en multipliant par 5, augmentons le chiffre 3 correspondant du multiplicande d'une unité, parce que le chiffre suivant 8, est plus grand que 5; 2° en multipliant par 2, augmentons aussi le chiffre correspondant 7 d'une unité, parce que le 5 qui suit est lui-même suivi d'autres chiffres significatifs.

Le produit des nombres proposés est donc égal à 331,57940, à moins d'un demi-millième. Mais si l'on ne conservait que les trois premières décimales, on ne serait plus certain d'avoir le produit cherché à moins d'un demi-millième.

70. *Division.* On sait déjà comment on peut obtenir le quotient de deux nombres entiers ou décimaux, à moins d'une unité décimale d'un ordre donné. Il ne reste donc qu'une simple observation à faire relativement au cas où le dividende contiendrait plus de décimales que le diviseur. Alors, on peut quelquefois supprimer un certain nombre des chiffres décimaux du dividende, car on n'a pas oublié qu'il suffit que le nombre des chiffres décimaux du dividende soit égal à celui du diviseur, plus celui de l'approximation.

Supposons le cas où le dividende aurait huit chiffres décimaux et le diviseur deux seulement. Supposons ensuite qu'on veuille avoir le quotient à 0,001 près. Il suffirait de conserver les cinq premiers chiffres décimaux du dividende; on supprimerait les trois derniers.

Nous répéterons ici, en cas de besoin, que, pour avoir le quotient à moins d'une demi-unité décimale d'un ordre donné, on cherche un chiffre de plus qu'on ne veut en conserver, et que l'on augmente ensuite, s'il y a lieu, d'une unité le dernier de ceux que l'on conserve.

Calcul des nombres complexes.

71. Le nombre concret qui renferme une unité d'une certaine espèce, avec une ou plusieurs subdivisions de cette unité, reçoit le nom de nombre

complexe : tel est le nombre $7^{t.}\,5^{pi.}\,9^{p.}\,11^{l.}$ Celui qui ne contient qu'une seule espèce d'unités, se nomme nombre *incomplexe* : tel est le nombre 49 livres.

Les règles données pour le calcul des nombres entiers, sont applicables aux nombres incomplexes ; mais le calcul des nombres complexes présente quelques difficultés, et exige l'emploi de procédés particuliers que nous exposerons successivement.

Tout nombre complexe peut se mettre sous la forme d'un nombre incomplexe, en se conformant à l'une ou l'autre des règles que nous allons indiquer.

1° *Conversion d'un nombre complexe en unités de sa plus petite espèce.*

Règle. Multipliez les unités de la plus forte espèce par le nombre de fois que chacune de ces unités renferme les unités de la première subdivision ; ajoutez au produit les unités de cette première subdivision renfermées dans le nombre proposé. Puis multipliez la somme obtenue par le nombre de fois que les unités de la première subdivision renferment celles de la seconde subdivision, et ajoutez encore au produit les unités de la seconde subdivision contenues dans le nombre donné ; et ainsi de suite, jusqu'à ce que vous soyez arrivé à la plus petite subdivision.

Exemple. Soit proposé de convertir en deniers le nombre complexe $43^{\#}\,17^{s.}\,9^{d.}$.

Disposition du calcul.

```
 43. 17. 9.
 20
 ─────
 860
  17
 ─────
 877 sous.
  12
 ─────
 1754
 877
 ─────
 10524
     9
 ─────
 10533 deniers.
```

Une livre vaut 20 sous : conséquemment, 43 livres valent 43 fois 20 sous = 860 sous. 860 sous, ajoutés aux 17 sous contenus dans le nombre proposé font 877 sous. Mais un sou vaut 12 deniers ; donc 877 sous valent 877 fois 12 deniers ou 10524 deniers, qui, ajoutés aux 9 deniers du nombre proposé, font 10533 deniers.

2° *Conversion d'un nombre complexe en fraction de l'unité de la plus forte espèce.*

Règle. Convertissez d'abord, en vous conformant au procédé qui vient d'être prescrit, le nombre complexe proposé en unités de sa plus petite espèce ; cela fait, donnez au résultat, pour dénominateur, le nombre qui exprime la quantité de fois que l'unité de la plus petite espèce est contenue dans l'unité de la plus forte espèce

Exemple. Soit à convertir le nombre complexe 43# 17s. 9d. en fraction de la livre, ou plutôt en nombre fractionnaire rapporté à la livre.

Nous avons trouvé tout à l'heure que 43# 17s. 9d. valent 10533 deniers.

Mais une livre vaut 20 sous, et un sou vaut 12 deniers ; donc une livre (ou 20 sous) vaut 20 fois 12 ou 240 deniers. Donc un denier vaut $\frac{1}{240}$ de livre ; donc 43# 17s. 9d. ou 10533 deniers valent $\frac{10533}{240}$ de livre.

Il est aussi quelquefois utile de faire les transformations inverses, c'est-à-dire, de convertir en nombre complexe équivalent : 1o un nombre entier incomplexe ; 2° un nombre fractionnaire rapporté à une unité concrète ; 3° une simple fraction d'unité concrète.

1° *Conversion d'un nombre entier incomplexe en nombre complexe.*

Règle. Divisez le nombre incomplexe proposé par le nombre qui exprime combien il faut d'unités de son ordre pour en former une de l'ordre immédiatement supérieur. La partie entière du quotient représentera le nombre des unités de l'ordre supérieur, et le reste celui des unités de l'espèce contenue dans le nombre proposé. Puis cherchez de la même manière combien les unités du quotient de la première division renferment d'unités de l'ordre qui leur est supérieur, et d'unités de l'ordre que ce quotient exprime ; continuez ainsi jusqu'à ce que vous soyez parvenu aux unités de l'ordre le plus élevé, ou à un nombre qui ne contienne pas assez d'unités pour en former une de l'ordre supérieur.

Exemple. Soit proposé de convertir le nombre 10533 deniers en livres et subdivisions de la livre.

Disposition du calcul.

$$\begin{array}{r|l} 10533^{d.} & 12 \\ \cline{2-2} 93 & 877 \text{ sous.} \\ 93 & \\ 9. & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 877^{s.} & 20 \\ \cline{2-2} 77 & 43 \text{ livres.} \\ 17. & \end{array}$$

Il faut 12 deniers pour faire un sou ; donc le quotient 877 de la division de 10533 deniers par 12, exprimera le nombre de sous contenus dans 10533 deniers, et le reste 9 exprimera le nombre de deniers qui excèdent ce nombre de sous. On voit par là que 10533 deniers égalent 877 sous 9 deniers. Maintenant, puisqu'il faut 20 sous pour faire une livre, le quotient 43 de la division de 877 sous par 2, exprimera des livres, et le reste 17 exprimera des sous. Donc le nombre 10533 deniers égale $43^{\#}17^{s.}9^{d.}$.

2° *Conversion en nombre complexe d'un nombre fractionnaire rapporté à une unité concrète.*

Règle. Divisez le numérateur par le dénominateur. La partie entière du quotient exprimera le nombre des unités de la plus forte espèce contenues dans le nombre fractionnaire proposé. Multipliez ensuite le reste par le nombre des unités que renferme l'unité principale : puis divisez le produit par le dénominateur. La partie entière du quotient exprimera les unités de la première subdivision que renferme le nombre fractionnaire proposé. Continuez de la même manière jusqu'à ce que vous soyez arrivé à la plus petite subdivision.

Exemple. Soit proposé de convertir en nombre complexe le nombre fractionnaire $\frac{10533}{240}$ de livre tournois.

Disposition du calcul.

$$
\begin{array}{r|l}
10533^{\#} & 240 \\ \cline{2-2}
933 & 43^{\#}\,17^{s.}\,9^{d.} \\
213 & \\
20 & \\ \cline{1-1}
4260 & \\
1860 & \\
180 & \\
12 & \\ \cline{1-1}
360 & \\
180 & \\ \cline{1-1}
2160 & \\
0. &
\end{array}
$$

La première division donne $43^{\#}$ pour quotient et $213^{\#}$ pour reste. On convertit ces $213^{\#}$ en sous, en multipliant par 20, ce qui donne 4260 sous. On divise 4260 par 240 ; on obtient $17^{s.}$ pour quotient et $180^{s.}$ pour reste ; enfin, on réduit ces $180^{s.}$ en deniers, en multipliant par 12. Le produit 2160, divisé par 240, donne exactement 9 deniers pour quotient. Donc le quotient de 10533 livres par 240 est égal à $43^{\#}17^{s.}9^{d.}$; donc aussi $\frac{10533}{240}$ de livre, valent $43^{\#}17^{s.}9^{d.}$.

3° *Conversion en nombre complexe d'une fraction d'une unité complexe.* Ce cas diffère du précédent en ce que le numérateur étant plus petit que le dénominateur, la première division par le dénominateur, et quelquefois même la deuxième et la troisième division ont 0 pour partie entière du quotient : du reste, c'est la même règle.

Exemple. Soit proposé de transformer en nombre complexe équivalent, la fraction $\frac{17}{513}$ de toise

Disposition du calcul.

17	513
6	$0^{T.}\ 0^{pi.}\ 2^{po.}\ 4^{l.}\ 7^{points}\ \frac{297}{513}=\frac{33}{57}=\frac{11}{19}$.
102	
12	
204	
102	
1224	
198	
12	
396	
198	
2376	
324	
12	
648	
324	
3888	
297	

On ne trouve au résultat ni toises ni pieds; on obtient seulement $2^{po.}\ 4^{l.}\ 7^{points}\ \frac{11}{19}$.

On pourrait, à la rigueur, à l'aide des transformations dont on vient d'exposer les règles, exécuter, sur les nombres complexes, toutes les opérations de l'arithmétique. Mais, dans un grand nombre de cas, on parvient au résultat, d'une manière plus simple et plus expéditive. Examinons donc en particulier chacune des quatre opérations fondamentales.

72. *Addition.* Règle à suivre. Écrivez les nombres complexes donnés les uns sous les autres, de manière que les unités de même espèce se correspondent; puis additionnez successivement les nombres contenus dans chaque colonne, en commençant par celle des plus petites unités. Si la somme contient une ou plusieurs unités de l'espèce immédiatement supérieure, retenez-les pour les ajouter avec celles de cette espèce, et écrivez l'excédant au-dessous de la colonne sur laquelle vous opérez actuellement; dans le cas contraire, écrivez le résultat tel que vous l'avez trouvé.

Exemple Soit proposé d'additionner les quatre nombres suivants : $45^{\#}\,15^{s.}\,11^{d.}\,\frac{2}{3}$; $72^{\#}\,17^{s.}\,8^{d.}\,\frac{3}{4}$; $13^{\#}\,19^{s.}\,7^{d.}\,\frac{1}{2}$; $51^{\#}\,5^{s.}\,9^{d.}$.

Disposition du calcul.

$$\begin{array}{rrrc}
45^{\#} & 15^{s.} & 11^{d.} & \frac{2}{3} \\
72 & 17 & 8 & \frac{3}{4} \\
13 & 19 & 7 & \frac{1}{2} \\
51 & 5 & 9 & \\
\hline
183^{\#} & 19^{s.} & 0^{d.} & \frac{11}{12}
\end{array}$$

Dites : $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{23}{12}=1^{d.}\,\frac{11}{12}$. Écrivez $\frac{11}{12}$ et retenez un denier ; 1 et 11 font 12 ; 12 et 8 font 20 ; 20 et 7, 27 ; 27 et 9, 36. 36 deniers valent 3 sous ; ainsi, écrivez 0 sous la colonne des deniers, et retenez 3 sous. 3 et 5, 8 ; et 7, 15 ; et 9, 24 ; et 5, 29. Écrivez 9 et retenez 2. 2 et 1, 3 ; et 1 4 ; et 1, 5. 5 dizaines de sous valent 2 livres, plus une dizaine de sous ; écrivez 1 sous la colonne des dizaines de sous, et retenez 2 livres. Achevez ensuite l'addition comme à l'ordinaire.

La somme sera égale à $183^{\#}\,19^{s.}\,0^{d.}\,\frac{11}{12}$.

73. *Soustraction.* Règle. Placez les nombres comme pour l'addition, en écrivant le plus petit des deux nombres sous le plus grand. Effectuez ensuite la soustraction partiellement, en commençant par les unités de la plus petite espèce. Si quelqu'une des soustractions partielles se trouve, dans l'état, impossible, ajoutez, au nombre dont vous devez soustraire, une unité de l'espèce immédiatement supérieure ; mais, quand vous passerez à la soustraction subséquente, augmentez d'une unité le nombre des unités de cette espèce supérieure dans le nombre à soustraire.

Exemple. Soit proposé de calculer la différence entre deux pesées, l'une de $4^{liv.}\,1^{o.}\,7^{G.}\,19^{g.}\,\frac{2}{3}$ et l'autre de $2^{liv.}\,7^{o.}\,4^{G.}\,35^{g.}\,\frac{3}{4}$.

Disposition du calcul.

$$\begin{array}{rrrrc}
4^{liv.} & 1^{o.} & 7^{G.} & 19^{g.} & \frac{2}{3} \\
2 & 7 & 4 & 35 & \frac{3}{4} \\
\hline
1^{liv.} & 10^{o.} & 2^{G.} & 55^{g.} & \frac{11}{12}
\end{array}$$

Réduisez au même dénominateur les deux fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ qui deviennent $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$. La seconde ne pouvant se soustraire de la première, augmentez le numérateur de celle-ci d'une unité ou de 12 parties Soustrayez alors $\frac{9}{12}$ de $\frac{20}{12}$; le reste est $\frac{11}{12}$ Dites ensuite 1 et 35 font 36. Mais 36 ne peut être retranché de 19; ajoutez donc à 19 grains, 1 gros ou 72 grains, 36 de 91, il reste 55, que vous écrivez, et vous retenez 1. 1 et 4, 5; 5 de 7, il reste 2. Passez aux onces et dites : 7 de 1 ; cela ne se peut; ajoutez donc $1^{\text{liv.}}$ ou 16 onces à 1^{o}. Dites ensuite 7 de 17, reste 10; que vous écrivez au-dessous et vous retenez 1. Or 1 et 2 font 3, qui, retranchés de 4, donnent pour reste 1. Donc la différence totale des nombres proposés est $1^{\text{liv.}}\ 10^{\text{o.}}\ 2^{\text{G.}}\ 55^{\text{g.}}\ \frac{11}{12}$.

74. *Multiplication*. Il est de principe que dans toute multiplication, le multiplicateur doit être considéré comme abstrait. Cela étant, voici la règle à suivre pour multiplier un nombre complexe, soit par un nombre abstrait, soit par un nombre incomplexe considéré comme abstrait.

Multipliez, en commençant par celles de la plus petite espèce, toutes les unités du nombre complexe dont il s'agit, par le nombre abstrait proposé (ou par le nombre complexe donné, considéré comme abstrait). Quand un produit partiel ne contiendra pas d'unités de l'espèce supérieure, écrivez ce produit tel qu'il est; mais lorsqu'il contiendra une ou plusieurs unités de l'espèce supérieure, n'écrivez que l'excédant de ces unités, et retenez celles-ci pour les ajouter au produit suivant.

Exemple. Soit à multiplier $42^{\#}\ 13^{\text{s.}}\ 5^{\text{d.}}$ par le nombre abstrait 7, ou bien soit à calculer ce que coûteraient 7 toises d'ouvrages, à raison de $42^{\#}\ 13^{\text{s.}}\ 7^{\text{d.}}$ la toise.

Disposition du calcul.

$$\begin{array}{r} 42^{\#}\ 13^{\text{s.}}\ \ 5^{\text{d.}} \\ 7\quad\quad\quad \\ \hline 298^{\#}\ 13^{\text{s.}}\ 11^{\text{d.}} \end{array}$$

Je dirai 7 fois 5 deniers font 35 deniers, qui valent 2 sous plus 11 deniers. J'écris 11 deniers et je retiens 2 sous. Je dirai ensuite 7 fois 13 sous font 91 sous, et 2 sous de retenue, font 93 sous ou 4 livres plus 13 sous. J'écris 13 sous et je retiens 4 livres. Je dis, enfin, 7 fois 42 livres font 294 livres et 4 livres de retenue font 298 livres.

Le produit total est donc $298^{\#}\ 13^{\text{s.}}\ 11^{\text{d.}}$

Ce procédé, qui est très-simple et très-expéditif, lorsque le multiplicateur n'a qu'un seul chiffre, entraîne de longs calculs, lorsque le multiplicateur est composé de plusieurs chiffres. Il est donc nécessaire que le calculateur ait à sa disposition une autre méthode.

Cette autre méthode consiste à décomposer les subdivisions du multiplicande en parties aliquotes de l'unité immédiatement supérieure, c'est-à-dire, en parties qui soient exactement contenues dans cette unité. Cette manière d'opérer reçoit le nom de méthode des parties aliquotes.

Exemple. Soit à multiplier $56^{\#}\ 17^{s.}\ 9^{d.}$ par le nombre abstrait 318, ou bien soit à trouver le prix de 318 aunes de drap, à raison de $56^{\#}\ 17^{s.}\ 9^{d.}$

Disposition du calcul.

	$56^{\#}$	$17^{s.}$	$9^{d.}$
	318		
	$448^{\#}$		
	56		
	168		
Produit de $10^{s.}$	159		
de $5^{s.}$	79	$10^{s.}$	
de $2^{s.}$	31	8	
de $6^{d.}$	7	17	
de $3^{d.}$	3	18	$6^{d.}$
	$18089^{\#}$	$13^{s.}$	$6^{d.}$

Multipliez d'abord 56 par 318 comme à l'ordinaire.

Pour multiplier 17 sous par 318, remarquez que 17 sous se décomposent en 10 sous, plus 5 sous, plus 2 sous, parties aliquotes de la livre, qui vaut 20 sous. Mais 10 sous sont la moitié d'une livre ; donc le produit de 10 sous par 318, doit être la moitié de 318 livres ou 159 livres. De même, le produit de 5 sous par 318 sera le quart de 318 livres ou la moitié de 159 livres, c'est-à-dire 79 livres 10 sous. De même encore, le produit de 2 sous par 318, sera la dixième partie de 318 livres, ou, ce qui revient au même, la cinquième part de 159 livres, qui est égale à 31 livres 10 sous. Ecrivez ces produits, à mesure que vous les formez, au-dessous du produit des entiers.

Pour multiplier ensuite 9 deniers par 318, décomposez aussi 9 deniers en 6 deniers, plus 3 deniers, parties aliquotes du sou ou de 12 deniers. Mais 6 deniers étant la moitié d'un sou ou le quart de 2 sous, le produit de 6 deniers par 318 sera le quart de 31 livres 10 sous, ou 7 livres 17 sous. De même, le produit de 3 deniers par 318, sera la moitié de 7 livres 17 sous, 3 livres 18 sous 6 deniers. Écrivez donc ces deux produits au-dessous des précédents. Faites ensuite la somme de tous les produits partiels que vous avez successivement obtenus. Cette somme qui est égale au nombre $18089^{\#}\ 13^{s.}\ 9^{d.}$, est nécessairement le produit demandé.

Il ne reste plus qu'à examiner le cas où le multiplicateur serait lui-même un nombre complexe.

Règle à suivre. Après avoir multiplié le multiplicande par les unités entières du multiplicateur, en vous conformant au procédé ci-dessus, décomposez les différentes subdivisions du multiplicateur en parties aliquotes de l'unité subdivisionnaire immédiatement supérieure ; ensuite, comparant, de proche en proche, ces parties aliquotes les unes aux autres, formez les produits partiels qui leur sont relatifs. Puis additionnez le tout.

Exemple. Soit proposé de calculer le prix de 25T. 5pi. 9po. 1l., à raison de 36# 16s. 8d. $\frac{1}{3}$ la toise.

Disposition du calcul.

		36#	16s.	8d.	$\frac{1}{3}$	
		25T.	5pi.	9po.	1l.	
		180#				
		72				
Produit de	10s.	12	10s.			
	5s.	6	5			
	1s.	1	5			
	6d.	0	12	6		
	2d.	0	4	2		
	$\frac{1}{3}$d.	0	0	8	$\frac{1}{3}$	$=\frac{864}{2592}$
Produit par	3pi.	18	8	4	$\frac{1}{6}$	$=\frac{432}{2592}$
	2pi.	12	5	6	$\frac{7}{9}$	$=\frac{2016}{2592}$
	6po.	3	1	4	$\frac{25}{36}$	$=\frac{1800}{2592}$
	3po.	1	10	8	$\frac{25}{72}$	$=\frac{900}{2592}$
	6ll.	8	5	4	$\frac{169}{432}$	
	1ll.	0	0	10	$\frac{601}{2592}$	$=\frac{601}{2592}$
		956#	4s.	2d.	$\frac{1420}{2592}$	

Calculez d'abord le produit de 36# 16s. 8d. $\frac{1}{3}$ par 25, comme dans l'exemple précédent. Ensuite, pour obtenir le produit de ce nombre par 5 pieds, décomposez 5 pieds en 3pi. + 2pi.. Or, 3 pieds et 2 pieds sont la moitié et le tiers de la toise, qui vaut 6 pieds. Ainsi, prenez pour 3 pieds et pour 2 pieds la moitié et le tiers du multiplicande. Écrivez cette moitié et ce tiers au-dessous des produits partiels que vous avez déjà obtenus. Décomposez ensuite 9 pouces en parties aliquotes du pied, qui vaut 12 pouces, c'est-à-dire, en 6po. + 3po.. 6 pouces sont la moitié d'un pied ou le quart de 2 pieds; prenez donc le quart du produit obtenu pour 2 pieds. 3 pieds sont la moitié de 6 pouces, et doivent donner un produit égal à la moitié de celui de 6 pouces. Passez à 1 ligne. C'est la douzième partie d'un pouce ou la trente-sixième partie de 3 pouces. La trente-sixième partie d'un nombre n'étant pas assez facile à prendre, calculez un produit fictif intermédiaire, que les arithméticiens nomment *produit auxiliaire*. Agissez comme si vous aviez 6 lignes au lieu d'une. 6 lignes étant la sixième partie de 3 pouces, donnent évidemment un produit égal à la sixième partie de celui que 3 pouces ont procuré. Vous prendrez ensuite la sixième partie de ce produit : ce sera le produit d'une ligne ou de la trente-sixième partie de 3 pouces. Vous aurez soin, avant de procéder à l'addition des produits partiels, de *barrer* le produit *auxiliaire*, qui ne doit pas faire partie du résultat.

Vous trouverez ainsi que le prix des 25T. 5pi. 9po. 1l., s'élève à la somme de 956# 4s. 2d. $\frac{1429}{2592}$.

Autre procédé. Réduisez les deux nombres complexes proposés, en nombres fractionnaires ou en fractions de l'unité de la plus forte espèce.

S'il s'agit des deux nombres complexes de l'exemple ci-dessus, vous trouverez pour 36# 16s. 8d. $\frac{1}{3}$ le nombre fractionnaire $\frac{26521}{720}$, et pour 25T. 5pi. 9po. 1l.. L'autre nombre fractionnaire $\frac{22429}{864}$.

La question proposée eût donc pu recevoir l'énonciation suivante : Une toise d'ouvrage a coûté $\frac{26521}{720}$ de livre : quel est le prix de $\frac{22429}{864}$ de toise du même ouvrage?

Une fois que les deux facteurs ont été mis ainsi sous la forme fractionnaire, il ne reste plus qu'à les multiplier l'un par l'autre, en se conformant aux règles bien connues de la multiplication des fractions.

Le prix des $\frac{22429}{864}$ de toise ou de $25^{T.}\ 5^{pi.}\ 9^{po.}\ 1^{l.}$, à raison de $\frac{26521}{720}$ de livre, ou de $36^{\#}\ 16^{s.}\ 8^{d.}\frac{1}{3}$ sera donc égal à $\frac{26521}{720}\times\frac{22429}{864}=\frac{594839509}{622080}$.

En divisant le numérateur de ce résultat fractionnaire par son dénominateur, suivant le procédé qui va être prescrit ci-dessous, on trouvera qu'il est égal à $956^{\#}\ 4^{s.}\ 2^{d.}\ \frac{1429}{2592}$.

Ce dernier procédé de multiplication est peut-être un peu plus long que l'autre ; mais il exige une attention moins soutenue.

75. *Division.* La division des nombres complexes présente deux cas principaux : Le premier est celui où le dividende et le diviseur sont de nature différente ; le second est celui où les deux termes de la division sont de même espèce.

Le premier cas se subdivise en deux cas particuliers, selon que le diviseur est un nombre incomplexe ou un nombre complexe.

Nous allons examiner, l'un après l'autre, ces trois cas différents.

Premier cas. Division d'un nombre complexe par un nombre incomplexe de nature différente (ou par un nombre abstrait).

Exemple. 38 toises d'ouvrage ont été payées $557^{\#}\ 16^{s.}\ 2^{d.}$; on demande quel est le prix de la toise?

Le dividende devant, dans toute division, être considéré comme le produit du diviseur par le quotient, l'un de ceux-ci doit nécessairement être un nombre concret de même espèce que le dividende : donc, dans l'exemple dont il s'agit ici, le quotient doit être un nombre de livres, puisque le diviseur exprime des unités différentes de la livre. La question revient conséquemment à trouver un nombre de livres qui, répété 38 fois, reproduise $557^{\#}\ 16^{s.}\ 2^{d.}$ Le quotient est donc la 38ᵉ partie de ce nombre. On obtiendra évidemment cette 38ᵉ partie en divisant successivement par 38 chacune des parties de $557^{\#}\ 16^{s.}\ 2^{d.}$.

Dispositions du calcul.

```
557# 16s. 2d. | 38
177           | 14# 13s. 7d.
 25
 20
---
500
 16
---
516
136
 22
 12
---
 44
 22
---
264
  2
---
266
  0
```

Le quotient de 557 livres par 38, est 14 livres, et le reste est 25 livres, qu'il faut encore diviser par 38. Pour y parvenir, convertissez ces 25 livres en sous, en multipliant par 20, ce qui fait 500 sous, lesquels, joints aux 16 sous du dividende, donnent 516 sous. Le quotient de cette seconde division est 13 sous et le reste est 22 sous. Ces 22 sous doivent eux-mêmes être divisés par 38. Or, 22 sous valent 22 fois 12 deniers, ou 264 deniers qui, joints aux 2 deniers du dividende, donnent 266 deniers. En sorte que le quotient cherché est $14^{\#}\ 13^{s.}\ 7^{d.}$.

En résumant ce qui vient d'être pratiqué, on peut établir la règle suivante pour le cas dont nous nous occupons.

Divisez successivement, par le diviseur donné, les collections des diverses espèces d'unités, en commençant par celles de l'ordre le plus élevé. et en ayant soin de convertir le reste de chaque division partielle en unités de l'ordre inférieur, pour les ajouter à celles de la même espèce qui se trouvent dans le dividende.

Deuxième cas. Division d'un nombre complexe par un autre nombre complexe d'espèce différente.

Exemple. $418^{\#}\ 18^{s.}\ 6^{d.}\ \frac{13}{18}$ sont le prix de $23^{T.}\ 5^{pi.}\ 8^{po.}$: on demande quel est le prix de la toise?

Le quotient, comme dans l'exemple précédent, doit être de même nature que le dividende et exprimer des livres et subdivisions de la livre, en sorte que la question revient à trouver un nombre qui, multiplié par le rapport du diviseur à la toise, reproduise le dividende.

Il s'agit donc de diviser $418^{\#}\ 18^{s.}\ 6^{d.}\ \frac{13}{18}$ par ce rapport ; ce qui nous ramène au cas que nous avons examiné. Or, $23^{T.}\ 5^{pi.}\ 8^{po.}$ égalent 1724 pouces, et 1 toise vaut 72 pouces. Donc, le rapport du diviseur à la toise est $\frac{1724}{72}=\frac{862}{36}=\frac{431}{18}$.

Ainsi, il faut diviser $418^{\#}\ 18^{s.}\ 6^{d.}\ \frac{13}{18}$ par $\frac{431}{18}$, ou multiplier en vertu de ce qui a été dit (p. 51), $418^{\#}\ 18^{s.}\ 6^{d.}\ \frac{13}{18}$ par $\frac{431}{18}$.

Le quotient est donc $\frac{(418^{\#}\ 18^{s.}\ 6^{d.}\ \frac{13}{18})\times 18}{431}=\frac{7540^{\#}\ 14^{s.}\ 1^{d.}}{431}=17^{\#}$ $9^{s.}\ 11^{d.}$.

Troisième cas. Division d'un nombre complexe par un autre nombre complexe de la même nature.

Exemple. Combien ferait-on faire de toises d'ouvrage pour la somme de $2285^{\#}\ 18^{s.}\ 0^{d.}\ \frac{1}{4}$, à raison de $79^{\#}\ 12^{s.}\ 6^{d.}$ la toise ?

Le rapport de ces deux nombres est évidemment le même que celui du nombre de toises cherché à la toise. Or, $2285^{\#}\ 18^{s.}\ 0^{d.}\ \frac{1}{4}=2194465$ quarts de denier, et $79^{\#}\ 12^{s.}\ 6^{d.}=76440$ quarts de denier. Le rapport demandé est donc $\frac{2194465}{76440}=\frac{438893}{15288}$.

En effectuant la division de 438893 par 15288, on obtiendra pour quotient $28^{T.}\ 4^{pi.}\ 3^{po.}$.

Observation essentielle. On s'épargnerait l'embarras de toutes les distinctions que l'on vient d'établir, en disant simplement, et une fois pour toutes, qu'il faut réduire chaque terme de la division à un nombre incomplexe, dont on ferait le numérateur d'un nombre fractionnaire ou d'une fraction, ayant pour dénominateur le nombre de fois que la plus petite espèce de chacun d'eux serait contenue dans l'unité principale ; que le calcul se trouve ainsi ramené à diviser, conformément aux règles connues, soit deux nombres fractionnaires l'un par l'autre, soit un nombre fractionnaire par une fraction ou réciproquement ; que l'on obtient un résultat fractionnaire, dont on extrait les unités entières et les subdivisions de ces unités que le quotient doit exprimer, suivant la nature de la question.

Nous ferons deux applications qui mettront à même de faire toutes celles qui peuvent se présenter dans l'usage.

Premier exemple. $6^{\text{liv.}}\ 12^{\text{o.}}\ 6^{\text{G.}}\ 48^{\text{g.}}$ d'une certaine marchandise, ont été payées $30^{\#}\ 2^{\text{s.}}\ 6^{\text{d.}}\ \frac{59}{96}$: on demande le prix de la livre ?

Convertissez le dividende $30^{\#}\ 2^{\text{s.}}\ 6^{\text{d.}}\ \frac{59}{96}$ en 96èmes de deniers. Vous trouverez 694139 quatre-vingt seizièmes de denier. Donnez pour dénominateur à 694139, le nombre de fois que la livre contient le $\frac{1}{96^{\text{e}}}$ de denier, c'est-à-dire, 23040. Vous obtiendrez ainsi un nombre fractionnaire $\frac{694139}{23040}$ de livre, qui est équivalent à $30^{\#}\ 2^{\text{s.}}\ 6^{\text{d.}}\ \frac{59}{96}$.

Convertissez également $6^{\text{liv.}}\ 12^{\text{o.}}\ 6^{\text{G.}}\ 48^{\text{g.}}$ en grains. Vous trouverez 62640 grains. Donnez pour dénominateur à 62640 le nombre de fois que la livre contient le grain, c'est-à-dire, 9216. Vous aurez ainsi le nombre fractionnaire $\frac{62640}{9216}$ de livre poids, qui est équivalent à $6^{\text{liv.}}\ 12^{\text{o.}}\ 6^{\text{G.}}\ 48^{\text{g.}}$. Il ne reste plus qu'à diviser, l'un par l'autre, les deux nombres fractionnaires $\frac{694139}{23040}$ et $\frac{62640}{9216}$: division qui s'effectue, comme on sait, en multipliant le premier de ces deux nombres par l'autre renversé.

Disposition de la fin du calcul.

$$\frac{694139}{2304}\times\frac{9216}{62640}=\frac{694139\times9216}{2304\times62640}=\frac{6397185024}{1444331520}=4^{\#}\ 8^{\text{s.}}\ 7^{\text{d.}}.$$

Second exemple. Combien, pour la somme de $127^{\#}\ 18^{\text{s.}}\ 6^{\text{d.}}$, ferait-on exécuter de toises, pieds, pouces et lignes d'ouvrage, à raison de $12^{\#}\ 18^{\text{s.}}\ 6^{\text{d.}}$ la toise ?

Convertis l'un et l'autre, comme dans l'exemple précédent, le dividende équivaut à $\frac{552673}{4220}$ de livre, et le diviseur à $\frac{3102}{240}$ de livre.

Il ne s'agit donc plus que de multiplier le premier de ces nombres fractionnaires par l'autre renversé.

Disposition de la fin du calcul.

$$\frac{552673}{4320}\times\frac{240}{3102}=\frac{552673\times240}{4320\times3102}=\frac{552673\times1}{18\times3102}=\frac{552673}{55836}\ 9^{\text{T.}}\ 5^{\text{pi.}}\ 4^{\text{po.}}\ 8^{\text{l.}}$$

EXERCICES ET PROBLÈMES DIVERS.

Écrire, dans un autre système, un nombre écrit dans le système décimal.

76. Procédé à suivre. Divisez le nombre proposé par la base du système dans lequel vous voulez le traduire. Le reste de cette division sera le

premier chiffre de la droite du nombre cherché. Divisez ensuite le quotient de cette première division par la base du système ; le reste de cette seconde division sera le second chiffre de la droite du nombre cherché. Continuez de la même manière à diviser toujours le quotient de la division précédente par la base du système, jusqu'à ce que vous arriviez à un quotient moindre que cette base. Ce dernier quotient sera le premier chiffre de la gauche du nombre cherché.

Soit le nombre 6483, écrit dans le système décimal. Pour l'écrire dans le système nonaire, je fais les opérations indiquées ci-dessus, et telles qu'on les voit ci-après :

6483	9		
18	720	9	
03	00	80	9
		8	8

Les résultats obtenus montrent que le nombre décimal 6483 prend, quand on l'écrit dans le système nonaire, la forme suivante 8803.

En effet, puisque chaque unité du second ordre en vaut 9 du premier, il est évident qu'en divisant par 9 le nombre décimal proposé, le quotient représentera la quantité d'unités du second ordre que doit renfermer l'expression *nonaire* du nombre proposé, et que le reste en marquera les unités simples. De même, en divisant par 9 le quotient obtenu, le nouveau quotient sera le nombre des unités *nonaires* du troisième ordre, et le reste le nombre de celles du second ordre que renferme le nombre décimal donné. En continuant ainsi de diviser par 9, jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient moindre que 9, on obtiendra nécessairement tous les chiffres qui doivent composer l'expression nonaire cherchée, dont le premier chiffre est le dernier des quotients trouvés, et dont les autres chiffres sont les restes des différentes divisions, pris en rétrogradant.

Soit encore le nombre 80347, écrit dans le système décimal, à traduire dans le système duodécimal.

Le système duodécimal exigeant 12 caractères, y compris le zéro, on ajoute, à ceux dont on se sert dans le système décimal, deux nouveaux caractères, par exemple, a pour représenter 10, et b pour représenter 11.

Disposition du calcul.

80347	12			
83	6695	12		
114	60	557	12	
67	95	77	46	12
7	$11=b$	5	$10=a$	3.

L'expression duodécimale du nombre proposé est donc $3a5b7$.

Un nombre étant écrit dans un système différent du système décimal, l'écrire dans le système décimal.

Ecrivez la base *dix* dans le système du nombre à traduire, et faites ensuite les divisions prescrites.

Soit proposé d'écrire, dans le système décimal, le nombre $3a5b7$, qui est écrit dans le système duodécimal.

Disposition du calcul.

```
3a5b7 | a
 65   | 4796 | a
  7b     59  | 56b | a
   57    96    6b  | 68 | a
    7     4     3     0 | 8.
```

a, dans le système duodécimal, représente la base 10, dans laquelle on veut écrire le nombre proposé $3a5b7$. On a donc divisé ce nombre par a, d'après la règle indiquée. Ainsi, séparant les deux premiers chiffres à gauche, pour en former un premier dividende partiel $3a$, on a divisé ce premier dividende partiel par a, en disant : En quarante six (le chiffre 3 valant trois douzaines et a valant 10), combien de fois a ou dix ? 4 fois. On a donc écrit 4 au quotient ; puis on a dit : 4 fois 10 font 40 ; 40 de 46, reste 6 ; et on a abaissé 5, ce qui a donné pour deuxième dividende partiel le nombre 65, sur lequel on s'est comporté comme sur le premier. ainsi de suite. On a trouvé de cette manière, que l'expression décimale du nombre duodécimal proposé est 80347.

Le raisonnement étant le même que celui qu'on a déjà fait, il est inutile de le répéter.

Un nombre étant écrit dans un système différent du système décimal, écrire ce nombre dans un autre système différent aussi du système décimal.

Procédé à suivre. Divisez le nombre proposé par la base du système dans lequel vous voulez le traduire, écrite dans la base du système à traduire. Le reste de cette division sera le premier chiffre de la droite du nombre cherché. Divisez ensuite le quotient par la même base ; le reste de cette seconde division sera le deuxième chiffre de la droite du nombre cherché. Continuez à diviser toujours le quotient de la division précédente par cette même base, jusqu'à ce que vous parveniez à un quotient moindre que cette base. Ce quotient sera le premier chiffre de la gauche du nombre cherché.

Exemple. Soit proposé de traduire dans le système nonaire le nombre 15243, qui est écrit dans le système septénaire. Je divise ce nombre par 12, qui est le nombre neuf écrit dans le système septénaire.

Voici la suite des opérations :

```
15243 | 12
   32 |_____
      | 1242 | 12
   54 |      |______
        042  | 103 |
   33               | 12
                    |____
    6    3  10=7    | 5.
```

Le quotient 5 et les restes successifs $10 = 7$, 3 et 6, montrent que le nombre proposé 15243, écrit dans le système septénaire, s'offre, en passant dans le système nonaire, sous la forme 5736.

Les observations et les raisonnements étant absolument les mêmes que ceux qu'on a déjà faits, il serait superflu de les reproduire.

On fera seulement remarquer que les deux chiffres successifs 1 et 0, qui expriment le reste de la seconde division, équivalent, par leur réunion, au seul chiffre 7, en passant dans le système *nonaire*.

77. *Problème*. Deux fontaines alimentent un bassin. La première le remplit en 11 heures, et la seconde en 15 heures : on demande quelle serait la partie du bassin remplie, si les deux fontaines coulaient ensemble pendant 5 heures $\frac{1}{2}$?

Solution. Cherchons d'abord la partie du bassin remplie par chaque fontaine pendant une heure.

La première remplit $\frac{1}{11}$ du bassin dans une heure ; la seconde en remplit $\frac{1}{15}$ dans le même temps.

Or, $\frac{1}{11}$ plus $\frac{1}{15}$ ou $\frac{15}{165}$ plus $\frac{11}{165} = \frac{26}{165}$; donc, les deux fontaines coulant ensemble, pendant une heure, remplissent les $\frac{26}{165}$ du bassin. Donc, dans 5 heures $\frac{1}{2}$ ou $\frac{11}{2}$ d'heure, elles en rempliront les $\frac{11}{2}$ des $\frac{26}{165}$ ou les $\frac{26 \times 11}{165 \times 2}$ ou les $\frac{13}{15}$.

Problème. Deux fontaines alimentent un bassin. La première le remplit en $\frac{5}{7}$ d'heure, et la seconde en $\frac{4}{9}$ d'heure. On demande en combien de temps le rempliront les deux fontaines coulant ensemble?

Solution. Cherchons la partie du bassin remplie par les deux fontaines coulant ensemble pendant une heure. Nous en déduirons facilement le temps qu'elles doivent employer à le remplir entièrement.

La première fontaine remplit tout le bassin dans $\frac{5}{7}$ d'heure: donc, dans

$\frac{1}{7}$ d'heure, elle en remplit $\frac{1}{5}$; donc, dans une heure, elle remplit les $\frac{7}{5}$ du bassin. On trouve de la même manière que la seconde remplit dans une heure les $\frac{9}{4}$ du bassin. Donc, les deux fontaines coulant ensemble pendant une heure, remplissent les $\frac{7}{5}$ plus les $\frac{9}{4}$ ou les $\frac{28}{20}$ plus les $\frac{45}{20}$ ou les $\frac{73}{20}$ du bassin.

Les $\frac{73}{20}$ du bassin étant remplis en une heure,

$\frac{1}{20}$ du bassin sera rempli en $\frac{1}{73}$ d'heure.

Donc le bassin tout entier sera rempli en $\frac{20}{73}$ d'heure.

Ainsi, les deux fontaines coulant ensemble, rempliront le bassin en 16 minutes 26 secondes $\frac{22}{73}$.

78. *Courriers.* — *Problème.* Deux courriers marchentdans le même sens. Le premier qui a une avance sur l'autre de 148 myriamètres, fait 9 myriamètres en 7 heures. Le second fait 7 myriamètres en 5 heures. On demande dans combien d'heures le second atteindra le premier.

Solution. Il résulte de l'énoncé de la question, que le premier courrier fait $\frac{9}{7}$ de myriamètre par heure, et que le second fait $\frac{7}{5}$ de myriamètre dans le même temps. En calculant la différence de ces deux résultats, j'aurai nécessairement la distance dont le second courrier se rapproche du premier dans une heure. Il me sera facile alors de calculer le nombre d'heures nécessaire pour qu'il s'en rapproche de 148 myriamètres.

Le second courrier dans une heure se rapproche du second de $\frac{7}{5}-\frac{9}{7}$ ou de $\frac{49}{35}-\frac{45}{35}$ ou de $\frac{4}{35}$ de myriamètre.

S'il s'en rapproche de $\frac{4}{35}$ de myr. en une heure,

Il s'en rapprochera de $\frac{1}{35}$ de myr. en $\frac{1}{4}$ d'heure ;

de 1 myr. en $\frac{35}{4}$ d'heure ;

de 148 myr. en $\frac{35\times148}{4}=1295$ heures.

Le second courrier atteindra le premier en 1295 heures de marche.

Vérification. Le premier courrier fait $\frac{9}{7}$ de myriamètre en une heure; il fait donc en 1295 heures $\frac{9\times1295}{7}$ ou 1665 myriamètres.

Le second courrier fait $\frac{7}{5}$ de myriamètre en une heure; il fait donc en 1295 heures $\frac{7\times1295}{5}$ ou 1813 myriamètre.

En retranchant 1665 myriam. de 1813 myriam., on obtient pour reste 148 myriam., distance qui séparait les deux courriers au moment de leur départ.

Problème. Deux courriers vont dans le même sens : le premier a une avance de 108 myriam., fait 3 myriam. en 4 heures, et part 24 heures avant le second, qui parcourt 7 myriam. en 8 heures. On demande en combien de temps le second courrier atteindra le premier?

Solution. Il résulte de cet énoncé, que pendant une heure, le premier courrier fait $\frac{3}{4}$ de myriam., et que le second fait, dans le même temps, $\frac{7}{8}$ de myriamètre.

Le premier courrier, qui part 24 heures avant le second, parcourt, pendant ce temps, 24 fois $\frac{3}{4}$ de myriam. ou 18 myriamètres.

Ainsi, lorsque le second courrier se met en marche, le premier courrier a réellement une avance sur lui de 108+18 ou 126 myriamètres. Le second courrier n'atteindra donc le second que lorsqu'il s'en sera rapproché de 126 myriamètres.

Or, les courriers se rapprochent :

de $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}$ ou $\frac{28}{32}-\frac{24}{32}=\frac{7}{8}-\frac{6}{8}$ ou $\frac{1}{8}$ de myriam. dans une heure.

de 1 myriam. en 8 heures.

de 126 myriam. en $8^h\times126=1008^h$.

Vérification. Le premier courrier fait $\frac{3}{4}$ de myriamètre par heure, il fait donc, en 1008 heures, $\frac{3^m\times1008}{4}=756$ myriam.

Le second courrier fait $\frac{7}{8}$ de myriamètre par heure, il fait donc, en 1008 heures, $\frac{7\times1008}{8}=882$ myriam.

Retranchant 756 myriam. de 882 myriam., il reste 126 myriam., c'est-à-dire, la totalité de l'avance que le premier courrier avait sur le second.

79. *Problème*. Une montre marque midi : on demande combien de fois l'aiguille des minutes rencontrera celle des heures depuis midi jusqu'à minuit, et à quelle heure se fera cette rencontre?

Il est d'abord évident qu'il ne peut y avoir de rencontre entre midi et une heure.

La première rencontre ne peut avoir lieu que lorsque l'aiguille des minutes aura parcouru 60 divisions de plus que celle des heures, ou, en d'autres termes, lorsque la différence sera égale à 60 divisions. Or, dans l'espace d'une heure, l'aiguille des minutes parcourt les 60 divisions du cadran, tandis que celle des heures ne parcourt que 5 de ces divisions. La différence des espaces que les deux aiguilles parcourent (laquelle est dans le même rapport que leur vitesse) est donc

de 55 divisions dans l'espace d'une heure;

d'une seule division en $\frac{1}{55}$ d'heure;

et de 60 divisions en $\frac{60}{55}$ d'heure.

Simplifiant l'expression fractionnaire $\frac{60}{55}$, il vient $\frac{12}{11}$.

Divisant maintenant par 11 le nombre 12, considéré comme marquant des heures, on obtient pour quotient 1 heure 5 minutes $\frac{5}{11}$. Ainsi, la première rencontre aura lieu à 1 heure 5 minutes $\frac{5}{11}$.

Les aiguilles marchant toujours avec la même vitesse, le temps qui s'écoulera depuis chaque séparation jusqu'à la rencontre suivante, sera constamment égal à $\frac{12}{11}$.

Voici le tableau que présentent les diverses rencontres :

Première rencontre.	1 h. 5 m. $\frac{5}{11}$.
Deuxième rencontre. . . .	2 h. 10 m. $\frac{10}{11}$.
Troisième rencontre. . . .	3 h. 16 m. $\frac{4}{11}$.
Quatrième rencontre. . . .	4 h. 21 m. $\frac{9}{11}$.
Cinquième rencontre. . . .	5 h. 27 m. $\frac{3}{11}$.
Sixième rencontre.	6 h. 32 m. $\frac{8}{11}$.

Septième rencontre. . . . . 7 h. 38 m. $\frac{2}{11}$.

Huitième rencontre. . . . . 8 h. 43 m. $\frac{7}{11}$.

Neuvième rencontre. . . . . 9 h. 49 m. $\frac{1}{11}$.

Dixième rencontre. . . . . 10 h. 54 m. $\frac{6}{11}$.

Onzième et dern. rencontre. 12 h. ou minuit.

Si l'on demande dans combien de temps les aiguilles se rencontreront quand il est 11 heures moins 15 minutes, on verra que cette rencontre doit s'effectuer entre 10 et 11 h ; or, cette dernière a lieu à 10 h. 54 m. $\frac{6}{11}$, en retranchant 10 h 45 m. on trouve 9 m. $\frac{6}{11}$; ainsi la rencontre se fera dans 9 m. et $\frac{6}{11}$.

Règle de fausse position ou de fausse supposition.

80. Cette règle a pour but de découvrir un nombre inconnu, au moyen de certaines données, qui se réduisent, le plus souvent, à des rapports par quotient ou à des rapports par différence.

Pour y parvenir, on suppose un nombre que l'on soumet aux conditions de la question, c'est-à-dire sur lequel on effectue toutes les opérations que l'on ferait sur le résultat pour s'assurer de son exactitude.

Exemple. Trouver un nombre dont la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$ et les $\frac{2}{5}$ fassent 148.

Pour rendre les calculs plus faciles, prenons un multiple de 2, 3 et 5, par exemple 30.

La moitié de. . . . . 30 = 15
Le tiers de. . . . . 30 = 10
Les deux cinquièmes de. . 30 = 12

Résultat. . . . 37

Ce n'est pas 30 qui est le nombre cherché, puisque la moitié de 30, son tiers et ses deux cinquièmes, réunis, ne donnent que 37.

Mais on conçoit d'abord que 37 s'est composé des parties de 30 comme 148 se composera des parties analogues du nombre inconnu, et qu'il y a lieu conséquemment d'établir la proportion suivante :

$$37 : 30 :: 148 : x$$

ou $$37 : 148 :: 30 : x = \frac{148 \times 30}{37} = 120.$$

Vérification. La moitié de. . . . . . . 120 = 60
Le tiers de. . . . . 120 = 40
Les deux cinquièmes de 120 = 48

Total égal. 148

On pourrait multiplier les applications à l'infini.

Lorsqu'il suffit d'une seule supposition pour découvrir le nombre cherché, l'opération est dite règle de fausse position simple.

Outre la règle de fausse position simple, il y en a une autre que l'on nomme règle de double fausse position. On y a recours, lorsque, dans l'énoncé de la question, il entre des quantités qui se combinent avec les autres par addition ou par soustraction.

Voici, en peu de mots, le procédé à suivre :

On suppose successivement deux nombres que l'on soumet aux conditions de la question. On compare, par le moyen de la soustraction, le résultat qu'on obtient, à celui que l'on eût dû obtenir.

Les différences trouvées reçoivent le nom d'erreurs.

Cela fait, on multiplie le premier nombre supposé par la seconde erreur, et le second nombre supposé par la première erreur.

Ensuite, si les signes des erreurs sont les mêmes, on divise la différence de ces deux produits par la différence des deux erreurs. Si, au contraire, les signes des erreurs sont différents, on divise la somme de ces mêmes produits par la somme des erreurs. Dans l'un et l'autre cas, le quotient qu'on obtient est le résultat cherché.

Exemple. Quel est le nombre qui, augmenté de sa moitié, de son quart, de ses deux tiers et de 5 unités, est égal à 150?

Je supposerai successivement 12 et 24.

Voici le tableau de tous les calculs à faire :

Première supposition.	Deuxième supposition.
12	24
6	12
3	6
8	16
5	5
150 — 34 = 116. . 1re erreur.	150 — 63 = 87. . 2e erreur.
87	116
12	24
174	464
87	232
1044. . 1er produit.	2784. . 2e produit.

2784	116
1044	87
1740. . différence des produits.	29. . différence des erreurs.

$$1740 \,\big|\, 29$$
60. nombre qui satisfait à l'énoncé.

Observation. Dans l'exemple ci-dessus, on serait arrivé plus aisément au résultat, en faisant usage de la règle de fausse position simple, car ayant ôté 5 de 150, la question se réduit à trouver un nombre qui, augmenté de sa moitié, de son quart et de ses deux tiers, égalerait 145.

81. *Change des monnaies.* Les opérations relatives au change des monnaies qui étaient si épineuses autrefois (c'est-à-dire sous l'empire des anciens poids et des anciens titres), ne présentent maintenant aucune difficulté réelle, au moins quand le change se fait au pair, comme cela a lieu ordinairement (1).

En effet, il existe des tables légales divisées en colonnes, où les titres et poids légaux de toutes les pièces de monnaies de tous les peuples civilisés, sont établis en décimales (l'unité du poids étant le gramme).

Or, il suffit, pour obtenir la valeur intrinsèque d'une pièce de monnaie quelconque, nationale ou étrangère, 1° de multiplier son poids en grammes par son titre; 2° de multiplier ensuite le produit obtenu par 3,44444, ou par 0,22222, suivant qu'il s'agit d'une pièce d'or ou d'argent; 3° de séparer sur la droite de ce second produit, le nombre de chiffres décimaux voulu.

Exemple. Quelle est la valeur en francs, décimes et centimes, d'une pièce d'or étrangère au titre de 0,907, et qui pèse 19gr548?

```
   19,548
      907
 --------
   136836
  175932
 --------
 17730036
    44443
 --------
 53190018
 7092012
  709200
   70920
    7092
 --------
61f,069242
```

(1) On fera bien de consulter l'Annuaire du Bureau des longitudes; il renferme des documents précieux. Nous en avons extrait quelques pages qu'on trouvera dans les notes de cet ouvrage.

La valeur d'une pièce de monnaie étant une fois connue, on connaît par une simple multiplication la valeur d'un nombre quelconque de ces pièces.

Densités.

82. La densité d'un corps est le rapport de sa masse à son volume. L'eau étant, de tous les corps, celui qu'il est le plus aisé d'amener à l'état de pureté et d'homogénéité, a été prise pour terme de comparaison entre les densités de tous les corps pondérables. Il a été dressé des tables, sous le titre de pesanteurs spécifiques, à l'aide desquelles il devient facile, connaissant le volume d'un corps, de trouver le poids de ce corps; et, réciproquement, connaissant son poids, de déterminer son volume.

Il suffit, en effet, pour connaître le poids d'un corps dont le volume est donné, de multiplier ce volume par la pesanteur spécifique du corps dont il s'agit.

Le corps pèse autant de grammes qu'il se trouve de centimètres cubes dans le produit qu'on obtient.

Exemple. Supposons, pour un instant, que l'or pèse 19 fois plus que l'eau, c'est-à-dire, que la pesanteur spécifique de l'or soit exprimée par 19 : quel sera, dans cette hypothèse, le poids d'un lingot d'or de 3548 centimètres cubes?

Calcul.

$$\begin{array}{r} 3548 \\ 19 \\ \hline 31932 \\ 3548 \\ \hline \end{array}$$

Réponse 67412 grammes.

Réciproquement, pour connaître le volume d'un corps dont le poids est donné, il suffit de diviser le poids de ce corps, exprimé en grammes, par la pesanteur spécifique du corps dont il s'agit.

Le corps contiendra autant de centimètres cubes qu'il se trouve d'unités dans le quotient qu'on obtient.

Exemple. Un lingot d'or pèse 67412 grammes : quel est le volume de ce lingot (en supposant toujours que la pesanteur spécifique de l'or soit exactement exprimée par 19)?

Calcul.

$$\begin{array}{r|l} 67412 & 19 \\ \cline{2-2} 104 & 3548 \text{ centimètres cubes.} \\ 91 & \\ 152 & \\ 0 & \end{array}$$

83. *Thermomètres comparés.* Le thermomètre centigrade a été ainsi nommé, parce que la glace fondante y est marquée 0, et l'eau bouillante 100. Dans le thermomètre de Réaumur, le même intervalle n'est divisé qu'en 80 degrés de température. Dans celui de Fahrenheit, dont se servent les Anglais, les Russes, et quelques autres peuples, l'ébullition de l'eau est marquée 212, et la glace fondante 32. En sorte qu'il y a 180 divisions de la glace fondante à l'ébullition.

Cela posé, le rapport des divisions de ces trois thermomètres est celui des nombres 80, 100 et 180, ou bien, en divisant ces nombres par le facteur comme 20, ce rapport est marqué par les nombres 4, 5 et 9, qui sont premiers entre eux.

D'où il suit : 1° que les degrés Réaumur sont les $\frac{5}{4}$ des degrés centigrades et les $\frac{9}{4}$ des degrés Fahrenheit;

2° Que les degrés centigrades sont les $\frac{4}{5}$ des degrés Réaumur et les $\frac{9}{5}$ des degrés Fahrenheit;

3° Que les degrés Fahrenheit sont les $\frac{4}{9}$ des degrés Réaumur et les $\frac{5}{9}$ des degrés centigrades.

Il devient donc bien facile de résoudre les problèmes suivants :

Premier problème. A quel degré de température centigrade et Fahrenheit correspondent 25 degrés Réaumur?

Calcul.

25 degrés Réaumur.

$$\begin{array}{r|l} \times\ 5 & \\ \hline 125 & 4 \\ \cline{2-2} 05 & 31\frac{1}{4} \text{ centigrades.} \end{array}$$

25 degrés Réaumur.

$$\begin{array}{r|l} \times\ 9 & \\ \hline 225 & 4 \\ \cline{2-2} 25 & 56\frac{1}{4} \\ 1 & \end{array}$$

$$56\frac{1}{4} + 32 = 88\frac{1}{4} \text{ Fahrenheit.}$$

Deuxième problème. A quel degré de température centigrade et Fahrenheit correspondent 7 degrés Réaumur, sous zéro?

Calcul.

$$\begin{array}{r}
7 \text{ Réaumur.} \\
5 \\ \hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
7 \text{ Réaumur.} \\
9 \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
35 & 4 \\ \cline{2-2}
3 & 8\frac{3}{4} \text{ centigrades sous zéro.}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
63 & 4 \\ \cline{2-2}
 & 15\frac{3}{4}
\end{array}$$

$$32-15\frac{3}{4}=16\frac{1}{4} \text{ Fahrenheit.}$$

Troisième problème. Réduire la température 28 degrés centigrades en degrés Réaumur et en degrés Fahrenheit.

Calcul.

$$\begin{array}{r}
28 \text{ centigrades.} \\
4 \\ \hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
28 \text{ centigrades.} \\
9 \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
112 & 5 \\ \cline{2-2}
12 & 22\frac{2}{5} \text{ Réaumur.}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
252 & 5 \\ \cline{2-2}
02 & 50\frac{2}{5}.
\end{array}$$

$$50\frac{2}{5}+32=82\frac{2}{5} \text{ Fahrenheit.}$$

Quatrième problème. Réduire la température 8 degrés centigrades sous zéro, en degrés Réaumur et en degrés Fahrenheit?

Calcul.

$$\begin{array}{r}
8 \text{ centigrades.} \\
4 \\ \hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
8 \\
9 \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
32 & 5 \\ \cline{2-2}
2 & 6\frac{2}{5} \text{ Réaumur.}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
72 & 5 \\ \cline{2-2}
22 & 14\frac{2}{5} \\
2 &
\end{array}$$

$$32-14\frac{2}{5}=17\ \frac{3}{5} \text{ Fahrenheit.}$$

Cinquième problème. Réduire 147 degrés Fahrenheit en degrés Réaumur et en degrés centigrades?

Calcul.

$$
\begin{array}{r|l}
\text{147 Fahrenheit} & \\
32 & \\
\hline
115 & \\
4 & \\
\hline
460 & 9 \\
\cline{2-2}
10 & 51\frac{1}{9}\ \text{Réaumur.} \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
\text{147 Fahrenheit} & \\
32 & \\
\hline
115 & \\
5 & \\
\hline
575 & 9 \\
\cline{2-2}
35 & 63\frac{8}{9}\ \text{centigrades.} \\
8 &
\end{array}
$$

Sixième problème. Réduisez 13 degrés Fahrenheit en degrés Réaumur, et en degrés centigrades ?

Calcul.

$$
\begin{array}{r|l}
32 & \\
\text{13 Fahrenheit.} & \\
\hline
19 & \\
4 & \\
\hline
76 & 9 \\
\cline{2-2}
4 & 8\frac{4}{9}\ \text{Réaumur.}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
32 & \\
\text{13 Fahrenheit.} & \\
\hline
19 & \\
5 & \\
\hline
95 & 9 \\
\cline{2-2}
05 & 10\frac{5}{9}\ \text{centigrades.}
\end{array}
$$

Chute des corps dans le vide.

84. La loi de la chute des corps est celle-ci : un corps qui tombe librement dans le vide parcourt $4^{m},9044$ dans la première seconde de sa chute, le triple de ce nombre dans la seconde suivante, le quintuple dans la troisième, le septuple dans la quatrième, le nonuple dans la cinquième, et ainsi de suite. En sorte que les espaces parcourus pendant la première, la deuxième, la troisième, la quatrième, la cinquième..... seconde, forment une progression équidifférentielle dont le premier terme est $4^{m},9044$, et dont la raison est le double de $4^{m},9044$ ou 9,8088. La totalité de l'espace parcouru pendant un nombre n de secondes est donc la somme des n premiers termes de cette progression.

Or, on sait que les nombres qui expriment les intervalles des carrés successifs forment aussi une progression par différence dont le premier terme est 1, dont la raison est 2, et dont la somme d'un nombre quelconque de termes est le carré de ce nombre de termes : il faut donc multiplier $4^{m},9044$, qui, dans la circonstance, représente 1, par le carré du nombre de secondes qu'a duré la chute.

Premier problème. On laisse tomber, du haut d'un édifice, une boule de métal, qui emploie quatre secondes pour tomber au pied de cet édifice : on demande quelle est la hauteur de cet édifice, en faisant abstraction de la résistance de l'air et du temps que le son emploie à se propager.

Calcul.

```
 4m,9044
      16,   carré du temps qu'a duré la chute.
──────────
 29 4264
 49 044
──────────
 78m,4704,  hauteur de l'édifice.
```

Deuxième problème. On laisse tomber une pierre dans un puits de mine : cette pierre n'arrive au fond qu'après 7 secondes 45 tierces. On demande (en faisant les mêmes abstractions que dans l'exemple précédent) quelle est la profondeur du puits?

Disposition du calcul.

45 tierces égalent 75 centièmes de seconde : la durée de la chute est donc 7'',75.

```
     7,75
     7,75
   ───────
     3875
    5 425
   54 25
   ───────
  60,0625,  carré de la durée de la chute.
   ───────

        4m,9044
        60 ,0625
      ──────────
         245220
         98088.
        294264
   294  264
   ─────────────
   294m,57052500,  profondeur du puits.
```

Troisième problème. Une aérolithe est tombée d'une hauteur de 74198m,6676 : on demande combien de temps a duré sa chute, en faisant toujours les mêmes abstractions?

Il est évident qu'on obtiendra le nombre de secondes cherché, en extrayant la racine carrée du quotient de 74498^{m},6676 par 4^{m},9044.

Disposition du calcul.

74198^{m},6676	4,9044	
25454 6	15129,	carré de la durée de la chute.
632 66		
142 227		
44 1396		
0		

15129	123,	durée de la chute.
051	22	
729	243	
0		

TABLES UTILES

ET

NOTES DE L'ARITHMÉTIQUE.

TABLES UTILES

ET

NOTES DE L'ARITHMÉTIQUE.

---

85. Pour nous conformer à l'usage, et surtout pour que les élèves qui n'auraient étudié que dans notre livre ne soient pas embarrassés pour répondre convenablement, dans certaines circonstances, nous mettrons ici (sans leur donner, au moins à toutes, notre approbation) quelques définitions et quelques distinctions qui se trouvent au commencement de plusieurs traités d'arithmétique.

86. On nomme quantité ou grandeur tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. Ainsi, une longueur, une surface, des arbres, des poids, sont des quantités. Il faut distinguer deux sortes de quantités : celles dont toutes les parties sont liées entre elles, et qui peuvent croître ou décroître sans que leur nature soit changée, on les nomme continues; ainsi une longueur, une surface sont des quantités *continues ;* et les quantités qui ne sont pas liées entre elles, comme des arbres, des poids, sont dites *discontinues*.

De cette division des quantités en deux sortes dérive la division de la science des quantités en deux parties générales. Ainsi, les *Mathématiques*, qui sont la science des quantités, se divisent en deux parties : l'*Arithmétique*, qui a pour objet l'étude et la comparaison des quantités discontinues, et la *Géométrie*, qui a pour objet particulièrement l'étude de la forme des quantités continues.

Pour se former une idée exacte d'une quantité, il faut la rapporter ou la comparer à une quantité de même espèce donnée par la nature, quand les quantités qu'on considère sont discontinues, et prise arbitrairement, quand la quantité qu'on veut évaluer est continue. Dans ce dernier cas, c'est la Géométrie qui donne l'*unité* pour servir de terme de comparaison, et c'est l'Arithmétique qui fait l'évaluation.

Ainsi, l'unité est une quantité prise entre plusieurs quantités de même nature et qui leur sert de terme de comparaison.

D'après cela, le *nombre* est le résultat de la comparaison d'une quantité à son unité.

Lorsqu'en énonçant un nombre, on désigne l'espèce des unités qu'il renferme, on l'appelle nombre concret. Dans le cas contraire, où on ne désigne pas la nature des unités, on le nomme abstrait.

Nous avons dit que l'Arithmétique a pour objet l'étude de la comparaison des quantités; d'après cela, l'Arithmétique est la science des nombres qui sont les résultats de cette comparaison : elle a pour but l'étude des propriétés des nombres et les résultats de leurs combinaisons.

Monnaies décimales de France.

87. Les monnaies françaises sont assujetties, sous le rapport de leurs divisions, de leur titre, de leur poids et de leur module, au système décimal des mesures prises dans la nature.

Aux termes de la loi du 7 germinal an XI (28 mars 1803), cinq grammes d'argent, au titre de neuf dixièmes de fin, constituent l'unité monétaire, qui conserve le nom de *franc*.

Le franc se divise en 10 *décimes* ou en 20 pièces de 5 centimes, qui ont conservé vulgairement les noms de 2 *sous* et de *sous*.

Titre.

Les monnaies d'or de France contiennent, ainsi que celles d'argent, un dixième d'alliage et neuf dixièmes de métal pur. En général (le titre s'exprimant en *millièmes*), le titre monétaire exact, ou sans tolérance, est de 900 millièmes, ou 0,900.

Les expériences de Cavendish et d'Atchett ont démontré que cette proportion d'alliage, outre l'avantage d'être en harmonie avec notre système de numération décimale, et de simplifier par conséquent les calculs d'alliage et de titre, se rapproche beaucoup de celle qui donne au métal le plus de dureté, ou le rend le plus propre à résister à l'action du *frai*, c'est-à-dire à la diminution du poids par le frottement et la circulation.

Le titre du billon est de 200 millièmes, ou 0,200.

La tolérance de titre, soit en dessus, soit en dessous, est de 2 millièmes pour l'or, de 3 millièmes pour l'argent, et de 7 millièmes pour le billon.

Poids et diamètre des pièces de monnaie.

Poids. Le poids des pièces de monnaie d'argent, de cuivre et même de billon ayant été établi en nombres ronds, elles peuvent servir de poids usuels ; ainsi :

1 pièce de billon de 10 centimes	pèse 2 grammes.
1 pièce d'argent de 2 francs ou 1 pièce de cuivre de 5 centimes	pèse 1 décagramme.
4 pièces d'argent de 5 francs ou 10 pièces d'argent de 2 francs ou 10 pièces de cuivre de 5 centimes	pèsent 1 hectogramme.
155 pièces d'or de 20 francs ou 40 pièces d'argent de 5 francs ou 500 pièces de billon de 10 centimes ou 50 pièces de cuivre d'un décime	pèsent 1 kilogramme.
1 sac de 200 pièces de 5 francs ou de 250 décimes ou de 500 pièces de 5 centimes	pèse 5 kilogrammes.

La proportion entre la valeur de l'or et celle de l'argent, qui est, dans notre système de monnaies décimales, de 15 $\frac{1}{2}$ à 1, n'a pas permis de donner aux pièces de 20 francs un poids en nombres ronds ; mais 155 pièces de 20 francs équivalent à un kilogramme, comme on l'a déjà vu.

Ce qu'on vient de dire suppose que les pièces de monnaie sont du poids exact qu'elles doivent avoir, ce qui a lieu ordinairement, à peu de chose près, la tolérance de poids, qui est peu considérable, étant établie tant en dessus qu'en dessous. Il suffit d'en peser un certain nombre, pour être sûr qu'un même poids donne la même quantité de pièces, et réciproquement.

Diamètres. Les monnaies de différentes valeurs ont plus ou moins de diamètre, suivant leur poids et la nature du métal dont elles sont composées ; mais on a eu soin, en général, qu'aucun de ces diamètres ne fût le même pour des monnaies différentes, afin qu'elles ne pussent être confondues dans les piles ou les rouleaux, et qu'on pût les distinguer à la première vue ou même au tact. (La pièce de 2 francs a cependant le même diamètre que la pièce de 5 centimes ; mais la différence du métal et des types les distingue suffisamment).

Les pièces de monnaie de même valeur et de même métal ont toutes, au contraire, rigoureusement le même diamètre. Ainsi, quoique fabriquées dans divers ateliers, comme elles se frappent dans des viroles d'acier exécutées sur un seul et même calibre, elles forment, étant réunies, un cylindre parfait ; ce qui donne une grande facilité pour en former des piles ou des rouleaux. Il suffit d'en compter une pile, pour être sûr que toutes les autres piles de même hauteur contiendront le même nombre de pièces.

Le diamètre ou module des pièces étant fixé en nombres décimaux entiers, elles peuvent offrir des mesures usuelles de longueur ; ainsi, par exemple :

<table>
<tr><td>32 pièces de 40 francs et 8 pièces de 20 francs ou bien</td><td rowspan="4">donnent 1 mètre.</td></tr>
<tr><td>11 id. id. et 34 id. id.</td></tr>
<tr><td>20 pièces { de 2 francs / ou de 5 centimes } et 20 pièces de 1 franc</td></tr>
<tr><td>7 décimes et 29 pièces de 5 centimes</td></tr>
</table>

Au moyen d'un certain nombre de trois espèces de pièces différentes, on pourrait aussi obtenir 1 mètre.

Ce qu'on vient de dire est exact pour les pièces de monnaie qui ont été frappées en virole pleine et dont les lettres de la légende sur tranche sont marquées en creux. Depuis 1830, époque à laquelle on a adopté, pour les monnaies d'or et les pièces de 5 francs, la marque sur tranche en relief, au moyen de la virole brisée, les diamètres des surfaces sont bien les mêmes ; mais la légère saillie des lettres de la tranche, si les pièces qu'on rapprocherait sur une même ligne se touchaient par ces lettres, donnerait moins d'exactitude aux mesures de longueur que nous avons indiquées ci-dessus. Les pièces de 2 francs et de 1 franc sont, depuis la même époque, cannelées sur tranche.

Tableau du poids des pièces de monnaies et de leur diamètre.

DÉNOMINATION.	POIDS EXACT ou droit.	Tolérance en millièmes du poids.	POIDS AVEC LA TOLÉRANCE En plus.	En moins.	Diamètre ou module en millimètres.
Pièces de *Or.*					
fr. c.	gr.	milli.	gr.	gr.	mm.
40 »	12,90322	2	12,92903	12,8774	26
20 »	6,45161		6,46451	6,43871	21
Argent.					
5 »	25	3	25,075	24,925	37
2 »	10	5	10,05	9,95	27
1 »	5		5,025	4,975	23
» 75	3,75	7	3,77625	3,72375	»
» 50	2,50		2,5175	2,4825	18
» 25	1,25	10	1,2625	1,2375	15
Billon.					
» 10	2	7	2,014	1,986	19
Cuivre.					
» 10	20	20	20,4	sans tolérance au-dessous.	31
» 5	10		10,2		27
» 3	6		6,12		25
» 2	4		4,08		22
» 1	2		2,04		»

Il n'a pas été émis de pièces de trois quarts de francs ou 75 centimes ; mais les pièces anciennes de 1 franc 50 centimes et de 75 centimes, créées par les lois du 28 juillet et du 18 août 1791, s'accordant avec la division décimale de nos monnaies, ont continué à circuler.

La refonte de toutes les autres pièces d'or et d'argent duodécimales a été terminée en 1834.

Le titre des pièces de 1 franc 50 centimes et de 75 centimes est de (8 deniers) 0,667 avec la tolérance de (2 grains de fin) ou 6$^{\text{mill.}}$,9444.

Le poids exact des pièces de 30 sous ou de 1 franc 50 centimes doit être (à la taille de 24 $\frac{8}{13}$ au marc) de 10$^{\text{gram.}}$,1366, avec la tolérance de (24 grains au marc) ou 5$^{\text{mill.}}$,2083.

Le poids exact des pièces de 15 sous ou de 75 centimes doit être (à la taille de 48 $\frac{14}{17}$ au marc) de $5^{gram.},0683$, avec la tolérance de (36 grains au marc) ou $7^{mill.},81245$.

Les pièces de 10 centimes en billon ont été créées par la loi du 15 septembre 1807. On n'en fabrique plus, à cause des inconvénients du *frai* et de la facilité de la contrefaçon.

La loi du 7 germinal an XI (28 mars 1803) ne porte pas création de pièces de cuivre de 10 centimes (un décime) ni de celles de 1 centime ; celles qui sont en circulation, ainsi que celles de 5 centimes, avaient été créées par les lois des 3 brumaire an V (24 octobre 1796) et 29 pluviôse an VII (17 février 1799), aux mêmes poids que ceux qui sont indiqués dans le tableau précédent ; mais la tolérance était de 40 grammes par kilogramme, dont moitié en dehors et moitié en dedans.

Les pièces de 3 centimes et de 2 centimes, décrétées par la loi du 7 germinal an XI (28 mars 1803), n'ont pas été émises.

Il a souvent été question de la nécessité de remplacer notre monnaie de cuivre et de billon qui, outre son imperfection sous le rapport de l'art, offre l'inconvénient d'être de toute espèce de diamètres, poids, type et alliage, par une monnaie de bronze qui fût uniforme, en harmonie avec le système métrique de nos poids et mesures, moins lourde et moins embarrassante, peu altérable, exécutée avec toute la perfection possible ; ce qui la rendrait beaucoup plus difficile à contrefaire. On s'occupe de nouveau de ce projet, qui vraisemblablement recevra prochainement son exécution.

Proportion de la valeur des métaux dans les monnaies.

On désigne par la proportion d'un métal à un autre, servant tous deux de métaux, le rapport de la valeur d'un kilogramme de monnaie du premier métal à celle d'un kilogramme de monnaie du second métal.

Nous avons déjà dit qu'en France la proportion de l'or à l'argent est de . . . . 15,5 à 1.

Celle de l'or au billon est de . . . . 62 à 1.

Celle de l'or au cuivre est de . . . . 620 à 1.

Celle de l'argent au billon est de . . . . 4 à 1.

Celle de l'argent au cuivre est de . . . . 40 à 1.

Prix du kilogramme d'or et du kilogramme d'argent.

La retenue au change des monnaies pour frais de fabrication, déchet compris, ou la différence entre la valeur intrinsèque et la valeur nominale, était, du 17 prairial an XI (6 juin 1808) au 1er juillet 1835, de 9 francs par kilogramme d'or et de 3 francs par kilogramme d'argent.

A compter du 1er juillet 1835, elle a été réduite à 6 francs pour l'or et à 2 francs pour l'argent.

Ancien tarif du 17 prairial an XI (6 juin 1803).

KILOGRAMME.		SANS RETENUE ou au pair.	AVEC RETENUE au change.
		fr. c.	fr. c.
Or. . . .	pur. . .	3444 44 4444	3434 44 4444
	à 900 m.	3100 » »	3091 » »
Argent. .	pur. . .	222 22 2222	218 » »
	à 900 m.	200 » »	197 » »

Tarif du 1er juillet 1835.

KILOGRAMME.		SANS RETENUE ou au pair.	AVEC RETENUE au change.
		fr. c.	fr. c.
Or. . . .	pur. . .	3444 44 4444	3437 77 7777
	à 900 m.	3100 » »	3094 » »
Argent. .	pur. . .	222 22 2222	220 » »
	à 900 m.	200 » »	198 » »

Extrait de l'*Annuaire du Bureau des longitudes*.

Valeur au pair des monnaies et au kilogramme.

88. *Valeur au pair*. Le pair des monnaies est ce qu'il y a de plus important dans les opérations de change ; il est la clef de tout système monétaire, et ce n'est que par lui qu'on peut résoudre toutes les difficultés de finance et de commerce qui ont pour objet l'appréciation des valeurs. Dès l'instant où ce pair est établi, il est aisé, par un calcul très-simple, de convertir en monnaie d'un pays une somme quelconque exprimée en monnaie étrangère, et réciproquement.

Cette conversion résulte de la comparaison exacte du titre, du poids légal et de la valeur intrinsèque de l'unité monétaire d'un pays, avec le titre, le poids légal et la valeur intrinsèque de l'unité monétaire d'un autre pays.

Nous rendrons ceci plus sensible par un exemple.

Supposons qu'on veuille savoir ce que le nouveau souverain d'or d'Angleterre, de la valeur de 20 shillings, vaut en nouvelle monnaie d'or de France. Le titre (1) légal de ce souverain est 0,917 ; le poids de $7^{g},980855$; cette pièce contient en matière pure $7^{g},31844035$.

La pièce de 20 francs de France est au titre légal (2) de 0,900 ; elle est du poids de $6^{g},45161$; elle contient donc $5^{g},806449$ d'or fin.

On fera la proportion suivante :

$$5^{g},806449 : 20^{f} :: 7,31844055 : x = 25^{f},2079.$$

Le souverain d'Angleterre vaut donc $25^{f},20^{c}\,\frac{79}{100}$ en argent de France.

Tel est le principe qui a servi à trouver le pair des monnaies d'or et d'argent du tableau publié chaque année dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes.*

Pour les pays étrangers, et surtout pour la France, on ne se borne pas, dans ce tableau que nous regrettons de ne pouvoir reproduire ici, aux monnaies nouvelles ou courantes ; on a pensé que la connaissance des monnaies anciennes, dont il est question dans une foule d'actes publics ou particuliers, ne serait pas sans utilité sous le rapport des intérêts privés, des finances, de l'histoire et des recherches numismatiques.

Il a paru surtout essentiel de donner le pair de la monnaie de compte de chaque pays ; car souvent cette monnaie n'est pas réelle, mais fictive.

Il n'a pas toujours été possible aux auteurs de ce tableau important d'établir, faute de renseignements suffisants, le poids légal et le titre légal de chaque espèce de monnaie ; ils y ont suppléé par le poids et le titre tirés des meilleurs ouvrages sur les monnaies, ou par le titre moyen résultant de plusieurs essais.

89. *Valeur par kilogramme au change des monnaies.* Les poids variant souvent par le plus ou moins d'exactitude de la fabrication, et chaque pièce ayant pu éprouver un affaiblissement de poids dans la circulation, on a l'habitude, dans le commerce et aux changes des monnaies, de ne les recevoir qu'au poids ; il a donc paru utile aux auteurs du tableau en question de donner aussi dans ce tableau la va-

---

(1) Loi de novembre 1818.

(2) Loi du 28 mars 1803 (7 germinal an XI).

leur du kilogramme de chaque espèce de monnaie, avec d'autant plus de raison que cette valeur a été modifiée par l'ordonnance du 30 juin 1835 et par les nouveaux tarifs du prix des matières et des espèces d'or et d'argent, publiés en exécution de cette ordonnance.

Si l'on remarque une différence avec le titre légal de chaque monnaie et le titre porté au tarif pour le kilogramme, cela tient à ce qu'il est d'usage de ne porter, dans les tarifs des monnaies, le titre de chaque nature d'espèce qu'avec la déduction de la tolérance et même de l'affaiblissement de titre qui a pu être reconnu par des essais répétés ; sans cette déduction, les entrepreneurs de la fabrication pourraient être exposés à une perte plus ou moins grande.

La différence entre les titres légaux et les titres du tarif est moins considérable, en général, pour l'argent que pour l'or, parce que le nouveau mode d'essai de l'argent par la voie humide, adopté en 1830, a fait reconnaître que l'ancien essai, à la coupelle, accusait un titre moins élevé que le titre réel.

On a ajouté, aux valeurs des espèces par kilogramme, celle des ouvrages d'or et d'argent.

Le tableau ne donne pas la valeur d'un kilogramme d'or et d'argent à toute espèce de titre ; mais rien n'est plus facile que d'obtenir la valeur à un titre quelconque, si l'on considère qu'en général les valeurs sont proportionnelles aux titres.

Ainsi, par exemple, le kilogramme d'argent à 900 valant, au tarif, 198 francs, comme on l'a déjà dit, si l'on veut reconnaître la valeur d'un kilogramme à 950, on fait la proportion suivante :

$$900 : 198 :: 950 : x = 209 \text{ fr. (1).}$$

---

90. *Densités de quelques gaz, celle de l'air étant prise pour unité.*

Air atmosphérique.	1,0000.
Gaz oxygène.	1,1026.
— azote.	0,9760.
— hydrogène.	0,0688.
— acide carbonique.	1,5245.
— acide sulfureux.	2,234.
— ammoniaque.	0,5967.

(1) Extrait de l'*Annuaire du Bureau des longitudes.*

91. *Densités de quelques vapeurs, celle de l'air étant prise pour unité.*

Vapeur	d'eau	0,6235.
—	d'alcool	1,6133.
—	d'éther sulfurique	2,586.
—	de soufre	6,617.

92. *Pesanteurs spécifiques de quelques liquides, celle de l'eau étant prise pour unité.*

Eau distillée	1,0000.
Acide sulfurique (huile de vitriol)	1,8409.
Eau de mer	1,2175.
Vin de Bordeaux	0,9939.
Vin de Bourgogne	0,9915.
Huile d'olive	0,9153.
Alcool absolu (esprit-de-vin)	0,792.
Éther sulfurique	0,7155.
Mercure (vif-argent)	13,598.

93. *Table des pesanteurs spécifiques de certains corps, celle de l'eau étant* 1.

Platine	laminé	22,0690.
	passé à la filière	21,0417.
	forgé	20,3366.
	purifié	19,5000.
Or	forgé	19,3617.
	fondu	19,2581.
Plomb fondu		11,3523.
Argent fondu		10,4743.
Cuivre en fil		8,8785.
Cuivre rouge fondu		8,7880.
Acier non écroui		7,8167.
Fer en barre		7,7880.
Étain fondu		7,2914.
Fer fondu		7,2070.
Zinc fondu		6,8610.
Rubis oriental		4,2833.
Saphir oriental		3,9941.
Saphir du Brésil		3,1307.

Topaze orientale	4,0106.
Topaze de Saxe	3,5640.
Béryl oriental	3,5489.
Diamants les plus lourds	3,5310.
— les plus légers	3,5010.
Marbre de Paros	2,8376.
Cristal de roche pur	2,6530.
Verre de Saint-Gobain	2,4882.
Porcelaine de Chine	2,3847.
Porcelaine de Sèvres	2,1457.
Soufre natif	2,0332.
Ivoire	1,9170.
Albâtre	1,8740.
Anthracite	1,8.
Houille compacte	1,3292.
Glace	0,930.
Bois de hêtre	0,852.
Frêne	0,845.
If	0,807.
Bois d'orme	0,800.
Pommier	0,733.
Bois d'oranger	0,705.
Sapin jaune	0,657.
Tilleul	0,604.
Bois de cyprès	0,598.
Bois de cèdre	0,561.
Peuplier blanc d'Espagne	0,529.
Peuplier ordinaire	0,383.
Liége	0,240.

94. Pour établir une liaison entre les tables qui précèdent, nous ajouterons que, d'après les recherches de MM. Biot et Arago, le poids de l'air atmosphérique sec, à la température de la glace fondante et sous la pression de $0^m,76$, est, à volume égal, $\frac{1}{770}$ de celui de l'eau distillée.

Par une moyenne entre un grand nombre de pesées, on a trouvé qu'à zéro de température et sous la pression de $0^m,76$, le rapport du poids de l'air à celui du mercure est de 1 à 10366.

Quelques problèmes relatifs aux monnaies.

95. *Premier problème.* L'or pur vaut, à poids égal, 15 fois et demie

quadruplant la longueur d'un pendule, il mettra deux fois plus de temps à achever chaque oscillation.

Problème. Déterminer le rapport de la durée des oscillations de trois pendules dont le premier a 784 millimètres de longueur, le second 1032 et le troisième 1296 ?

Les racines carrées de 784, 1032 et 1296 sont 28, 32 et 36.

1° Si l'on prend pour unité la durée d'une oscillation du 1er pendule, la durée d'une oscillation du 2e sera exprimée par le nombre fractionnaire $\frac{32}{28}=\frac{8}{7}$, et la durée d'une oscillation du 3e sera exprimée par le nombre fractionnaire $\frac{36}{28}=\frac{9}{7}$.

2° Si on prend pour unité la durée d'une oscillation du second pendule, la durée d'une oscillation du 1er sera marquée par la fraction $\frac{28}{32}=\frac{7}{8}$, et la durée d'une oscillation du 3e sera marquée par le nombre fractionnaire $\frac{36}{32}=\frac{9}{8}$.

3° Enfin, si l'on prend pour unité la durée d'une oscillation du 3e pendule, la durée des oscillations des deux autres sera exprimée par les fractions $\frac{28}{36}$ et $\frac{32}{36}$ qui égalent $\frac{7}{9}$ et $\frac{8}{9}$.

Que l'on sache maintenant combien d'oscillations l'un quelconque de ces trois pendules achève dans un temps donné, on calculera facilement le nombre des oscillations produites, pendant le même temps, par chacun des deux autres.

Problème. Un pendule, dont la longueur est connue produit, 86400 oscillations dans un temps donné (dans 24 heures par exemple); un autre produit, pendant le même temps, 100000 oscillations : on demande quelle est la longueur de ce second pendule ?

Autre problème. Un pendule, dont la longueur est connue, fait, dans un temps donné, un nombre donné d'oscillations : on demande combien feraient d'oscillations, dans le même temps, deux autres pendules, dont l'un aurait une longueur double de celle du premier, et le troisième une longueur égale à la somme des longueurs du premier et du second?

98. *Énoncés de questions à résoudre* (1).

1. *Trouver un nombre tel que, si on en retranche* 73, *le reste, multiplié par* 13, *égale* 117.

2. *Trouver un nombre dont les* $\frac{3}{5}$ *soient égaux aux* $\frac{3}{7}$ *de* 140.

3. *Partager le nombre* 501 *fr. entre deux personnes, de manière que la part de la seconde surpasse celle de la première de* 73 *fr.*

4. *Un célibataire laisse en mourant* $\frac{1}{4}$ *de sa fortune à son neveu, les* $\frac{2}{5}$ *aux hôpitaux,* $\frac{1}{7}$ *à ses domestiques, et le reste, qui forme la somme de* 56789 *fr., aux pauvres de sa commune : on demande quelle est la valeur de la succession entière, et quelles sont les sommes recueillies par son neveu, par les hôpitaux et par ses domestiques?*

5. 25 *ouvriers ont fait* 319 *mètres d'ouvrage : on demande combien* 48 *ouvriers feraient d'ouvrage dans le même temps?*

6. 70 *ouvriers ont fait un certain ouvrage en* 15 *jours : on demande en combien de temps* 87 *ouvriers feront le même ouvrage?*

7. *Des ouvriers ont fait* 945 *mètres d'ouvrage en* 25 *jours : combien faudra-t-il de jours à ces ouvriers pour en faire* 3318 *mètres?*

8. *Deux ouvriers ont fait* 24 *mètres d'ouvrage : combien* 15 *ouvriers feront-ils de mètres d'un autre ouvrage, en supposant que la difficulté du premier ouvrage est à celle du second comme* 5 *est à* 6?

9. *Les mises de* 4 *associés sont* 700 *fr.,* 1000 *fr.,* 1500 *fr.,* 1900 *fr. : le gain total est* 9600 *fr. Trouver le gain de chaque associé?*

10. *Les mises de* 3 *associés sont* 200 *fr.,* 500 *et* 1100 *fr. La première mise est restée* 5 *mois dans la société, la deuxième* 7 *mois, et la troisième* 18 *mois : le gain total est* 540 *fr. Quel est le gain relatif à chaque mise?*

11. *Combien la somme de* 7800 *fr., placée à intérêts simples pendant* 4 *ans, à raison de* 6 *pour* 100 *par an, a-t-elle produit d'intérêts pendant ces* 4 *ans?*

12. *Un capital de* 5830 *fr. a été placé à intérêt simple pendant* 45 *mois, à raison de* 5 *pour* 100 *par an : que vaudra-t-il au bout ces de* 45 *mois?*

---

(1) Nous engageons les élèves à se procurer les énoncés des problèmes de Saigey ou de Ferber.

13. *Combien 7518 fr. payables dans 40 mois, valent-ils en argent comptant? Le taux de l'intérêt est de 5 pour 100 par an.*

14. *Trouver dans combien d'années et de mois, le capital 6265 fr. placé à intérêt simple, à raison de 5 pour 100, vaudra 7518 fr.?*

15. *Combien doit-on payer d'escompte en dehors, à raison de 6 pour 100 par an, pour toucher sur-le-champ un billet de 6549 fr. payable dans 2 ans 9 mois ou dans 33 mois?*

16. *Combien 9600 fr. vaudront-ils dans 5 ans, ayant égard aux intérêts composés, à raison de 5 pour 100 par an?*

17. *Combien la même somme vaudrait-elle, au bout du même temps, si les intérêts composés étaient de 6 p. 100 par an au lieu de 5?*

18. *Que devient la somme de 5400 fr. placée pendant 10 ans à intérêts composés, à raison de 5 fr. 50 c. pour 100 par an?*

19. *Que devient la somme de 8520 fr., placée pendant 6 ans 11 mois à intérêts composés, à raison de 4 fr. 75 c. pour 100 par an?*

20. *La somme de 4800 fr., placée pendant 6 ans à intérêts composés, est devenue 5432 fr. 46 c.: on demande à quel taux elle était placée?*

21. *Quel est le temps pendant lequel le capital 4500 fr. est demeuré placé à intérêts composés à 6 pour 100 par an, pour devenir 8598 fr. 20 c.*

22. *Une personne place tous les ans une somme de 700 fr. dont elle laisse les intérêts s'accumuler. Le taux est 5 pour 100 par an: on demande ce que devient la somme totale des placements au bout de 8 ans?*

23. *On place chaque mois, pendant 9 mois, la somme de 2000 fr. au taux de 6 p. 100 par an ou de 0 fr. 50 c. par mois; que valent toutes ces sommes au bout des 9 mois?*

24. *On vend quatre espèces de café : la première à 3 fr. 75 c. le kilogr.; la deuxième à 3 fr. 71 c.; la troisième à 2 fr. 59 c., et la quatrième à 2 fr. 17 c.; quel est le prix moyen?*

25. *La distance entre deux objets a été mesurée trois fois, et l'on a successivement trouvé : d'abord, 1936^m,012, ensuite 1935^m,943, et enfin 1935^m,872; on demande quelle est la distance moyenne?*

26. *On a mêlé 28 hectol. de vin à 59 fr. l'hectolitre, 43 hectol. de 61 fr. l'hectolitre; on demande quel est, à un demi-centime près, le prix moyen de chaque décalitre du mélange?*

27. *On a deux espèces de froment; celui de la première qualité vaut 19 fr. l'hectolitre, et l'autre 17 fr. 60 c.; combien faut-il mêler*

d'hectolitres de chaque espèce pour que chaque hectolitre de mélange vaille 18 *fr.* 10 *c.*

28. *En admettant les mêmes prix que dans le problème précédent combien faudra-t-il prendre d'hectolitres de chaque espèce, pour obtenir un mélange de* 150 *hectolitres?*

29. *On a trois lingots d'argent : le premier est du poids de* 2509 *grammes, et au titre de* 0,867; *le second pèse* 1849 *grammes, et est au titre de* 0,914; *le troisième pèse* 2978 *grammes, et est au titre de* 0,896; *on demande combien il faut prendre de grammes dans chaque lingot pour en former un quatrième qui soit au titre de* 901?

30. *Dans les mêmes hypothèses, combien faudrait-il prendre de grammes dans chaque lingot, pour avoir un lingot de* 1200 *grammes qui soit au titre de* 901?

31. *Les âges de deux frères font ensemble* 25 *ans : celui de l'aîné est les* $\frac{13}{7}$ *de celui du jeune : quel est l'âge de chacun d'eux?*

32. *Une personne fait planter une file de* 120 *arbres éloignés les uns des autres de* 3 *mètres. L'ouvrier employé à cet ouvrage a mis au pied de chaque arbre, une brouettée de terreau, contenant les* $\frac{2}{5}$ *d'un mètre cube, qu'il a été chercher à* 25 *mètres du premier arbre; on demande* 1° *la quantité de terreau employée;* 2° *le temps mis à faire l'ouvrage, sachant que l'ouvrier a travaillé* 7 *heures par jour et que, l'un dans l'autre, il a fait* 4 *kilomètres par heure?*

33. *Trois personnes partagent entre elles la somme de* 743 *fr., de manière que la première en prend la moitié, la seconde le septième et la troisième le reste; combien revient-il à chacune?*

34. *Partager le nombre* 7346 *en trois parties, de manière que la première soit à la seconde comme* 13 *à* 17, *et que cette première partie soit à la troisième comme* 19 *à* 28?

35. *Un géomètre célèbre passa le sixième de sa vie dans l'enfance, le douzième dans l'adolescence, ensuite il se maria, et passa le septième de sa longue carrière, plus* 5 *ans, avec sa femme, avant d'avoir eu un fils, auquel il survécut de* 4 *ans, et qui, lorsqu'il mourut, avait la moitié de l'âge auquel son père parvint; combien d'années ce géomètre a-t-il vécu?*

36. *Un père, interrogé sur l'âge de son fils, répond : mon âge est le triple de celui de mon fils, et il y a dix ans qu'il en a été le quintuple : quel est l'âge du fils?*

37. *Plusieurs personnes ont gagné entre elles la somme de* 1521 *fr. Il y a autant de personnes que chacune d'elles a gagné de francs; combien y a-t-il de personnes?*

Quantités numériques incommensurables.

99. Dans les calculs où il entre des quantités incommensurables, ces quantités ne peuvent être réunies que par voie d'addition, de soustraction, de multiplication, d'élévation aux puissances, de division, d'extraction de racines; nous allons donc considérer, comme type, ce qui arrive quand on veut faire la division de deux nombres dont on ne peut avoir que les valeurs rapprochées.

Je supposerai qu'on peut avoir chaque quantité incommensurable isolée avec le degré d'approximation que l'on veut, et je vais chercher à déterminer une limite que ne pourra dépasser l'erreur commise sur chacune des quantités employées dans l'opération, pour que le résultat final obtenu, diffère du résultat vrai d'un nombre moindre que la fraction donnée $\frac{1}{\delta}$.

Je considérerai deux cas : 1° le diviseur seul est incommensurable; 2° les deux nombres donnés sont incommensurables.

Premier cas. Le diviseur étant incommensurable, soit à diviser m par B.

Le quotient exact est $\frac{m}{B}$ et si l'on prend B par excès, le quotient calculé est $\frac{m}{B+e'}$, on demande que l'erreur commise qui est $\frac{m}{B}-\frac{m}{B+e'}$ soit moindre que $\frac{1}{\delta}$; nous avons appelé e' l'erreur numérique commise sur la quantité incommensurable B. Or, soit e l'erreur cherchée qu'on doit commettre sur B pour qu'on ait $\frac{m}{B}-\frac{m}{B+e}$ moindre que $\frac{1}{\delta}$; or on a, puisque $\frac{m}{B+e'}$, est le quotient par excès, la relation $\frac{m}{B}-\frac{m}{B+e}>\frac{m}{B}-\frac{m}{B+e'}$.

Il suffit de prendre $\frac{m}{B}-\frac{m}{B+e}<\frac{1}{\delta}$ ou $\frac{me}{B(B+e)}<\frac{1}{\delta}$. Soit B'' un nombre inférieur à B, et par suite à $B+e$, on a évidemment $\frac{me}{B''\times B''}$ ou $\frac{me}{B''^2}>\frac{me}{B(B+e)}$; donc si on prend e tel que $\frac{me}{B''^2}<\frac{1}{\delta}$, *à fortiori* aura-t-on $\frac{me}{B(B+e)}<\frac{1}{\delta}$, on prendra donc pour limite $e<\frac{B''^2}{m\delta}$.

Prenons pour exemple $\frac{13}{\pi}$ dont on veut avoir la valeur à $\frac{1}{100}$ près; on demande combien il faudra prendre de décimales pour la valeur approchée de π; or, on prendra π à l'approximation $\frac{3^2}{1300}$ ou $\frac{9}{1300}$ ou $\frac{1}{\left(\frac{1300}{9}\right)}$, par conséquent il faudra prendre π à $\frac{1}{1000}$ près.

Deuxième cas. Soient A et B deux nombres incommensurables, on veut diviser A par B.

Je prends A par défaut et B par excès, on a $\frac{A}{B} > \frac{A-e'}{B+e''}$; soit e l'erreur qu'on doit commettre sur A et B pour que l'erreur commise sur le résultat soit $< \frac{1}{\delta}$; or, on a $\frac{A-e'}{B+e''} > \frac{A-e}{B-e}$, d'où on aura

$$\frac{A}{B} - \frac{A-e}{B+e} > \frac{A}{B} - \frac{A-e'}{B+e''}$$

qui est l'erreur commise. Il suffit de prendre e tel que

$$\frac{A}{B} - \frac{A-e}{B+e} < \frac{1}{\delta} \quad \text{ou bien} \quad \frac{e(A+B)}{B(B+e)} < \frac{1}{\delta}.$$

Soient A' et B' deux nombres plus grands que A et B, B'' un nombre inférieur à B, et par suite à $B+e$, on a $A'+B' > A+B$ et $B'' \times B''$ ou $B''^2 < B(B+e)$, donc on aura $\frac{e(A'+B')}{B''^2} > \frac{e(A+B)}{B(B+e)}$, donc si nous prenons e tel que $\frac{e(A'+B')}{B''^2} < \frac{1}{\delta}$, *à fortiori* $\frac{e(A+B)}{B(B+e)} < \frac{1}{\delta}$; on prend donc $e < \frac{B''^2}{(A'+B')\delta}$. C'est pour ce cas la limite de l'approximation avec laquelle on doit calculer séparément A et B. Soit comme application $\frac{\sqrt[3]{17}}{\pi}$ à $\frac{1}{100}$ près, on prendra $\sqrt[3]{17}$ et π, chacun à l'approximation $\frac{3^2}{(3+4)100} = \frac{9}{700} = \frac{1}{\left(\frac{700}{9}\right)}$.

On voit qu'il suffit de calculer $\sqrt[3]{17}$ et π, chacun à 0,01 près. Il résulte de là que dans la division $\frac{m}{B}$, quand le diviseur seul B est incommensurable, il faut prendre ce diviseur par excès à l'approximation $\frac{B''^2}{m\delta}$, en représentant B'' un nombre inférieur à B.

Dans la division $\frac{A}{B}$ si A et B sont incommensurables, on prendra A par défaut, B par excès chacun à l'approximation $\frac{B''^3}{(A'+B')\delta}$ (1).

Démonstration élémentaire du principe que $\left(1+n\frac{1}{d}\right)$ est moindre que $\left(1+\frac{1}{d}\right)^n$, au moyen duquel on prouve que si un nombre est plus grand que l'unité on peut trouver l'indice d'une puissance telle qu'en élevant ce nombre à cette puissance, le résultat soit plus grand que toute quantité donnée (2).

100. Soit l'identité

$$1+\frac{1}{K_1}=1+\frac{1}{K_1}$$

dans laquelle je suppose que $\frac{1}{K_1}$ est une fraction proprement dite.

Si $\frac{1}{K_2}$ est une nouvelle fraction proprement dite, il est clair que le produit $\left(1+\frac{1}{K_1}\right)\frac{1}{K_2}$ sera plus grand que $\frac{1}{K_2}$; donc, si l'on ajoute aux deux membres de l'identité ci-dessus ces deux quantités inégales, on obtiendra l'inégalité suivante :

$$1+\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}<1+\frac{1}{K_1}+\left(1+\frac{1}{K_1}\right)\frac{1}{K_2}<\left(1+\frac{1}{K_1}\right)\left(1+\frac{1}{K_2}\right).$$

Si $\frac{1}{K_3}$ est une troisième fraction proprement dite, on se convaincra de même que le produit $\left(1+\frac{1}{K_1}\right)\left(1+\frac{1}{K_2}\right)$ est plus grand que $\frac{1}{K_3}$. Ajoutant ces deux inégalités aux deux membres de la pré-

(1) Extrait des *Nouvelles Annales de mathématiques*, tome I^er^, page 249, par M. Guilmin.

(2) Extrait de l'ouvrage de M. Wallès.

cédente inégalité, et réduisant, on en conclura l'inégalité suivante :

$$1+\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}+\frac{1}{K_3}<\left(1+\frac{1}{K_1}\right)\left(1+\frac{1}{K_2}\right)\left(1+\frac{1}{K_3}\right).$$

En général, si cette propriété subsiste pour un nombre $n-1$ de fractions, de telle sorte qu'on ait

$$1+\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}+\ldots+\frac{1}{K_{n-2}}+\frac{1}{K_{n-1}}<\left(1+\frac{1}{K_1}\right)\left(1+\frac{1}{K_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{K_{n-1}}\right)$$

je dis qu'elle subsistera aussi pour un nombre n.

Il est évident, en effet, que la nouvelle fraction $\frac{1}{K_n}$ sera moindre que le produit

$$\left(1+\frac{1}{K_1}\right)\left(1+\frac{1}{K_2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{1}{K_{n-1}}\right)\frac{1}{K_n};$$

l'inégalité précédente subsistera donc toujours, si l'on ajoute $\frac{1}{K_n}$ à son premier membre et le produit ci-dessus au second : exécutant ces additions, et réduisant en seul les deux termes du second membre, il vient :

$$1+\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}+\ldots+\frac{1}{K_n}<\left(1+\frac{1}{K_1}\right)\left(1+\frac{1}{K_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{K_n}\right),$$

ce qui démontre qu'en effet la propriété ci-dessus sera vraie pour n fractions, si déjà elle l'est pour $n-1$. Or, nous en avons démontré la vérité pour deux et pour trois; il s'ensuit donc qu'elle est générale.

Cela posé, supposons que toutes les fractions ci-dessus sont égales entre elles, et représentons-les par $\frac{1}{d}$; dans ce cas, le premier membre de l'inégalité précédente deviendra $\left(1+n\frac{1}{d}\right)$, et le second membre prendra la forme $\left(1+\frac{1}{d}\right)^n$; on aura donc, comme nous l'avons annoncé,

$$1+n\frac{1}{d}<\left(1+\frac{1}{d}\right)^n$$

Il est facile de prouver que cette proposition est encore vraie lors que $\frac{1}{d}$ est négatif.

En effet, prenons l'identité suivante

$$1-\frac{1}{K_1}=1-\frac{1}{K_1};$$

la quantité $\frac{1}{K_2}$ est plus grande que le produit $\left(1-\frac{1}{K_1}\right)\frac{1}{K_2}$; donc en retranchant ces deux quantités dans les deux membres de l'identité ci-dessus, on obtiendra l'inégalité

$$1-\frac{1}{K_1}-\frac{1}{K_2}<\left(1-\frac{1}{K_1}\right)\left(1-\frac{1}{K_2}\right);$$

et en répétant le même raisonnement que ci-dessus, on arrivera au résultat suivant :

$$1-\frac{1}{K_1}-\frac{1}{K_2}\ldots\ldots+\frac{1}{K_n}<\left(1-\frac{1}{K_1}\right)\left(1-\frac{1}{K_2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{K_n}\right).$$

Supposant donc que toutes les fractions sont égales entre elles et qu'on les représente par $\frac{1}{d}$, cette inégalité se change en celle-ci :

$$\left(1-n\frac{1}{d}\right)<\left(1-\frac{1}{d}\right)^n.$$

C'est ce que voulions démontrer.

Compléments arithmétiques.

101. Dans les calculs logarithmiques, on est conduit souvent à retrancher un logarithme d'un autre ; or on peut remplacer la soustraction à effectuer, pour la détermination du résultat, par une simple addition, en employant les compléments arithmétiques. On appelle complément arithmétique d'un logarithme ce qui manque à ce logarithme pour faire 10 unités ; en d'autres termes, c'est le résultat qu'on obtient en soustrayant ce logarithme de 10, et cette opération se fait très-facilement, et, pour ainsi dire, d'après l'inspection des logarithmes. Le complément arithmétique se désigne par Ct. arit. qu'on place devant le nombre dont on veut chercher le logarithme, ainsi on a Ct. arit. 7,9308473 = 10 − 7,9308473, et, par conséquent, pour obtenir le résultat, il faut retrancher le dernier chiffre significatif à droite, de 10, et chacun des autres chiffres de 9 ; donc, dans l'exemple précédent, on aura Ct. arit. 7,9308473 = 2,0691527.

Dans le cas où le dernier chiffre à droite du logarithme est un 0, il faudrait retrancher le premier chiffre significatif à la gauche de ce zéro, de 10, et les autres chiffres à gauche, de 9 ; ainsi, Ct. arit. 8,3405700 = 1,6594300.

Supposons qu'on ait à soustraire de la somme des quatre logarithmes L, L', L'', L''' la somme des trois autres logarithmes l, l', l'', et désignons par D la différence, on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}\ldots\ldots \text{ ou } \mathrm{L}+\mathrm{L}'+\mathrm{L}''+\mathrm{L}'''-(l+l'+l'')= \\ &=\mathrm{L}+\mathrm{L}'+\mathrm{L}''+\mathrm{L}'''+10-l+10-l'+10-l''-30, \\ &\text{ou}\quad \mathrm{D}=\mathrm{L}+\mathrm{L}'+\mathrm{L}''+\mathrm{L}'''+\mathrm{Ct.}\,l+\mathrm{Ct.}\,l'+\mathrm{Ct.}\,l''-30. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit cette règle générale :

On prend les compléments arithmétiques des logarithmes à soustraire ; on fait la somme de ces compléments et des logarithmes dont il faut soustraire, puis on retranche de la caractéristique du résultat autant de fois 10, ou autant de dizaines qu'on a pris de compléments, et on a pour résultat la différence demandée.

Supposons maintenant qu'on demande de trouver le nombre correspondant à un logarithme affecté du signe — ; ainsi soit donné le logarithme — 0,82074, on demande le nombre correspondant. Soit N le nombre correspondant au logarithme 0,82074, l'on aura $\log \frac{1}{\mathrm{N}} = -0{,}82074$, or on sait trouver $\log \mathrm{N} = 0{,}82074$. Supposons que $\mathrm{N} = 6{,}6181$, d'où le nombre cherché $\frac{1}{\mathrm{N}}$ a pour valeur $\frac{1}{6{,}6181} = 0{,}1511$.

D'où, pour trouver à quel nombre correspond un logarithme affecté du signe —, on cherche d'abord à quel nombre appartient le logarithme, abstraction faite de son signe, puis on divise l'unité par le nombre obtenu, le quotient est le nombre demandé. On peut encore avoir recours à l'artifice suivant : on met le logarithme $-0{,}82074$ sous la forme $4-0{,}82074-4$, ce qui revient à augmenter et diminuer à la fois le logarithme proposé, de 4 unités ; il vient $4-0{,}82074=3{,}17926-4$.

Or on a, d'après les tables, $3{,}17926 = \log 1511$, d'où

$$3{,}17926 - 4 = \log 1511 - \log 10000,$$

et, par conséquent,

$$0{,}82074 = \log \frac{1511}{10000} = \log 0{,}1511.$$

Soit encore à déterminer le nombre correspondant au logarithme — 2,35478.

D'abord ce logarithme étant compris entre -2 et -3, le nombre correspondant est compris entre $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{1000}$. Mais pour en obtenir la valeur d'après le second moyen, on met le logarithme sous la forme $6-2{,}35478-6=3{,}64522-6$;

or on a $3{,}64522=\log 4417{,}9$;

donc $6-2{,}35478-6$ ou $-2{,}35478=\log\frac{4417{,}9}{1000000}$;

ou bien $-2{,}35478=\log 0{,}0044179$.

Le second moyen consiste donc à retrancher le logarithme proposé d'autant d'unités, plus 4, que la caractéristique en renferme ; à déterminer le nombre correspondant au résultat ainsi obtenu ; puis à diviser ce nombre par l'unité suivie d'autant de zéros qu'on a été obligé de prendre d'unités pour effectuer la soustraction.

Logarithmes négatifs ou logarithmes des fractions.

102. Dans les logarithmes des nombres, nous n'avons considéré que la progression par quotient croissante à l'infini

$$\div\!\!\div 1 : 10 : 100 : 1000,$$

et la progression par différence correspondante

$$\div\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.$$

Or, si maintenant on suppose que les deux progressions vont en décroissant, on aura la progression par quotient décroissante

$$\div\!\!\div 1 : \frac{1}{10} : \frac{1}{100} : \frac{1}{1000},$$

et la progression par différence correspondante

$$\div\ 0.-1.-2.-3.$$

L'ensemble des deux premières progressions est composé de termes qui comprennent tous les nombres plus grands que l'unité et leurs logarithmes.

L'ensemble des deux autres progressions est composé de termes qui comprennent tous les nombres plus petits que l'unité, ainsi que leurs logarithmes, ceux-ci n'étant autre chose que les logarithmes de la première partie, précédés du signe —, lequel sert à distinguer les logarithmes des nombres plus grands que l'unité, des logarithmes correspondant aux nombres plus petits que l'unité.

Les nombres précédés du signe — sont appelés, en algèbre, nombres négatifs par opposition aux nombres ordinaires qu'on appelle nombres positifs ou absolus.

La considération des nombres négatifs dans la théorie des logarithmes est aussi indispensable que celle des nombres positifs, puisque c'est par eux seuls qu'on peut exprimer les logarithmes des fractions. Cela est si vrai, que dans l'hypothèse, très-admissible, où l'on aurait d'abord établi le système des deux progressions

$$\div\!\div 1 : \frac{1}{10} : \frac{1}{100} : \frac{1}{1000} :$$
$$\div 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.$$

(auquel cas toutes les fractions auraient eu des logarithmes positifs et d'autant plus grands, que les fractions eussent été plus petites). Les logarithmes des nombres de plus en plus grands que l'unité, savoir 1, 10, 100, 1000, et tous les nombres compris entre eux auraient été nécessairement représentés par la série des nombres négatifs

$$0, -1, -2, -3,$$

et tous les nombres compris entre ceux-ci.

Nous allons maintenant indiquer comment on peut obtenir le logarithme d'une fraction proprement dite, et comment un logarithme négatif étant donné, on peut obtenir le nombre auquel il correspond.

Je dis d'abord que le logarithme d'une fraction est égal au logarithme de la fraction renversée, pris avec le signe —, soit $\frac{a}{b}$ une fraction, on a $a < b$, je dis qu'on a $\log \frac{a}{b} = -\log \frac{b}{a}$; en effet, on a évidemment $\frac{a}{b} = 1 : \frac{b}{a}$, d'où $\log \frac{a}{b} = \log 1 - \log \frac{b}{a}$, or $\log 1 = 0$, donc $\log \frac{a}{b} = -\log \frac{b}{a}$.

D'où l'on peut établir cette règle :

Pour obtenir le logarithme d'une fraction on soustrait le logarithme du numérateur de celui du dénominateur, et on prend le résultat avec le signe —.

APPENDICE.

103. *Complément numérique.* On peut, dans un grand nombre de cas, tirer parti de la propriété du complément numérique, pour abréger les calculs de l'arithmétique (1).

Le complément numérique est ce qu'il faut ajouter à un nombre pour que ce nombre devienne égal à 10, ou à 100, ou à 1000, ou à 10000 ou à....

On obtient le complément d'un nombre, en prenant, à partir de la gauche, la différence de chacun des chiffres de ce nombre avec le nombre 9. Toutefois, la différence de son dernier chiffre significatif de la droite se prend avec le nombre 10.

Tout chiffre significatif pouvant se trouver à la dernière place de la droite, a deux compléments, l'un à 9 et l'autre à 10.

Si le nombre dont on forme le complément est terminé par un, par plusieurs zéros, ces zéros doivent être mis à la droite de la série de différences partielles que l'on a obtenues.

Exemples. Le complément de 8 est 2; celui de 56 est 44; celui de 347 est de 653; celui de 8965 est 1035; celui de 7086400 est 2913600.

104. *Multiplication par les compléments.* Règle à suivre. 1° Placez les deux facteurs l'un au-dessous de l'autre, de manière que leurs unités de l'ordre le plus élevé se correspondent; 2° après les avoir ainsi disposés, écrivez, à la suite du multiplicateur, autant de zéros qu'il y a de chiffres au multiplicande; 3° formez à côté les compléments des deux facteurs; 4° multipliez ensuite le complément du

(*) Ce qui est compris entre le n° 103 et le n° 107 appartient tout entier à M. Merpaut, ancien professeur de mathématiques des colléges de Saint-Brieuc et de Vannes. M. Merpaut est un arithméticien profond, à qui l'on doit beaucoup de travaux utiles.

A. B.

multiplicande par celui du multiplicateur, et portez les produits partiels, à mesure que vous les formez, au-dessous des zéros qui font les têtes de colonnes, en ordonnant ces produits entre eux comme à l'ordinaire ; 5° additionnez le tout. La somme que vous obtiendrez sera le produit que vous cherchiez, en y supprimant l'unité qui s'avance à droite. Cette unité se reproduira dans toutes les multiplications faites de cette manière ; mais elle devra toujours être supprimée, comme ne devant pas faire partie du résultat.

1er *Exemple.* Soit à multiplier 9867 par 987.

Disposition du calcul.

9867.......... 0133, complément du multiplicande.
9870000..... 013, complément du multiplicateur.
399
133
Produit.... $^{1}9738729$

2e *Exemple.* Soit à multiplier 7965 par 68976?

Disposition du calcul.

7865.......... 2135, complément du multiplicande.
689760000... 31024, complément du multiplicateur.
:8540
4270
2135
6405
Produit.... $^{1}542496240$

3e *Exemple.* Soit à former le carré de 8994?

Disposition du calcul.

8994......... 1006 } compléments.
89940000... 1006 }
6036
1006
Carré.... $^{1}80892036$

Remarque. Le procédé indiqué procurera toujours le produit cherché; mais ce procédé n'est avantageux qu'autant que les compléments des facteurs sont exprimés par des chiffres moins forts que ceux qui représentent les facteurs proposés.

Preuve très-commode de la multiplication. Multipliez celui des deux facteurs que vous voudrez par le complément de l'autre; et ajoutez le produit que vous obtiendrez au produit que vous a donné la multiplication que vous voulez vérifier.

Si cette première multiplication est bonne, et que vous n'ayez pas commis d'erreurs dans la seconde, la somme sera égale au facteur ainsi multiplié, suivi d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans l'autre facteur.

Vérifions par ce procédé le produit de 6743 par 867.

Disposition du calcul.

```
              6743
               867...133, complément de 867
             -----
             47201
            40458
           53944
          --------
Produit.... 5846181
             20229
            20229
            6743
          --------
Preuve .. 6743000
```

105. *Division par les compléments.* Toutes les fois que le diviseur sera composé de chiffres forts ou de moyenne grandeur, le calculateur trouvera un double avantage à suivre le procédé qui va être indiqué.

1er *Exemple.* Soit 70619835 à diviser par 8979.

Disposition du calcul.

```
7 0 6 1 9 8 3 5  | 8979..... 1021
  7 1 4 7        |------------
-----------      | 7865
7,7 7 6 6 8
    8 1 6 8
  -----------
  8,5 8 3 6 3
      6 1 2 6
    -----------
    6,4 4 8 9 5
        6 1 0 5
      -----------
      5,0 0 0 0
```

Règle à suivre. 1° après avoir posé les termes de la division comme on le fait ordinairement, formez le complément du diviseur, et portez ce complément à côté ; 2° après avoir mis un premier chiffre au quotient, vous le vérifierez en ajoutant au premier dividende partiel le produit du complément du diviseur par ce chiffre. Cette addition faite, séparez par une virgule le premier chiffre de la gauche de la somme obtenue.

Si ce chiffre que vous avez ainsi séparé est le même que celui que vous avez mis au quotient, et si, en même temps, les chiffres qui restent à la droite de la virgule composent un reste moins grand que le diviseur, vous pouvez être sûr que le chiffre que vous avez posé au quotient est celui qu'il y fallait mettre. Mais si le chiffre mis au quotient est plus fort que celui qui se trouve à la gauche de la virgule, il est trop fort. Diminuez-le d'une unité et faites de nouveau l'addition et la multiplication prescrites. Si ces opérations amènent les mêmes circonstances, diminuez d'une nouvelle unité le chiffre mis au quotient; continuez à le diminuer ainsi, d'une unité à chaque fois, jusqu'à ce qu'il soit égal au chiffre qui est à la gauche de la virgule, et que les chiffres à la droite de cette virgule restent, en même temps, moins grands que le diviseur.

Si, au contraire, le chiffre mis au quotient est moins fort que celui qui est à la gauche de la virgule, ce chiffre est trop faible : augmentez-le d'une unité, et employez les mêmes moyens de vérification. Ces moyens amènent-ils les mêmes circonstances, c'est-à-dire le chiffre mis au quotient, en second lieu, est-il encore plus faible que celui qui est à la gauche de la virgule, augmentez-le encore d'une unité, et ne discontinuez de l'augmenter (d'une unité à chaque fois) que lorsqu'il sera égal à celui qui est à la gauche de la virgule.

Une fois que le chiffre mis au quotient est bien vérifié, les chiffres qui se trouvent à la droite de la virgule composent le reste qu'aurait procuré la division ordinaire. On descend à côté de ce reste le chiffre du dividende total, ce qui procure un second dividende partiel, sur lequel, ainsi que sur tout les suivants, on se comporte de la même manière que sur le premier.

Observation. On a porté, au-dessous de chaque dividende partiel, le produit provenu de la multiplication du complément du diviseur par le chiffre mis au quotient; mais, de même que, quand on opère par l'ancien procédé, on peut faire en même temps la multiplication et la soustraction requises, on peut aussi, dans la nouvelle méthode, faire simultanément et commodément la multiplication et l'addition prescrites.

Exemple. Trouver, à un cent-millionième d'unité près, le quotient de 8783659 par 9786?

Disposition du calcul.

```
8 7 8 3 6 5 9                       | 9786...... 0214
8,9 5 4 8 5                         |-----------------
  9,7 4 1 1 9                       | 897, 57398324
    7;5 6 1 7 0
      5,7 2 4 0 0
        7,3 8 9 8 0
          3,9 6 2 2 0
            9,8 1 4 6 0
              8,3 1 7 2 0
                3,2 3 6 2 0
                  2,4 0 4 8 0
                    4,1 3 3 6
```

Remarque. Les chiffres séparés sur la gauche de la somme donnée par les additions qui servent à vérifier le quotient étant la répétition exacte des chiffres du quotient, on pourrait *rigoureusement* garder dans la pensée, au lieu de l'écrire réellement à la place destinée au quotient, le chiffre qu'on soumet à l'essai; et, alors, l'appareil de la division en serait d'autant simplifié.

Si l'on adoptait ce mode, qui est tout à fait rationnel, on aurait soin, quand la division des entiers serait terminée, d'indiquer cette circonstance par un signe de ponctuation plus fort; par exemple au moyen d'un point et une virgule, comme on l'a fait ci-dessus. Cette ponctuation ferait connaitre où finit la partie entière et où commence la partie fractionnaire.

Preuve de la division par complément. 1° multipliez le quotient que vous avez obtenu par le complément du diviseur; 2° ajoutez le dividende au produit que vous obtiendrez.

La somme contiendra toujours, quand la division aura été faite exactement, un nombre de chiffres marqué par le nombre des chiffres du dividende, augmenté du nombre des zéros mis à la suite des restes pour avoir des décimales.

Quand la division n'aura point donné de reste, la somme sera égale au quotient suivi d'autant de zéros qu'il y a de chiffres au diviseur. Lorsque la division aura procuré un reste, la somme obtenue présentera deux séries de chiffres à la suite l'une de l'autre. La première, celle du côté gauche, sera le quotient lui-même. La seconde, celle de droite, sera le reste de la dernière division partielle. Quelquefois ces deux séries sont séparées par un zéro et quelquefois par plusieurs; mais toujours de telle sorte que la première offre le développement de tout le quotient, et la seconde celui de tout le reste.

Preuve de la première division.

Produit de 7865 par 1021.....	803 0165
Dividende..............	7061 9835
	7865.0000

Preuve de la seconde division.

Produit de 89757398324 par 0214.....	1920808324 1336
Dividende suivi de 8 zéros.....	87836590000 0000
	89757398324.1336

106. *Complément de complément.* Le complément de complément est le complément numérique d'un résultat obtenu en opérant par compléments, d'une certaine manière.

La propriété du complément de complément permet de combiner l'addition et la soustraction.

Règle à suivre. 1° écrivez d'abord les uns sous les autres, tous les nombres à soustraire. Soulignez le dernier ; 2° écrivez ensuite au-dessous de ce trait tous les nombres dont les premiers nombres doivent être soustraits ; 3° au-dessous de ces derniers nombres, écrivez, en l'avançant d'une place vers la droite, un nombre composé de chiffres qui indiquent respectivement combien il y a de nombres d'un, de deux, de trois, de quatre... chiffres parmi ceux dont les autres doivent être retranchés : Soulignez ; 4° cela fait, additionnez les nombres qui sont au-dessus du premier trait avec les compléments de tous ceux qui sont au-dessus du second trait.

La somme que vous obtiendrez sera le complément du reste que vous cherchiez.

1^{er} *Exemple.* Retrancher la somme des trois nombres 451, 732 et 245 de la somme des deux nombres 986 et 789.

Disposition du calcul.

	451
	732
	245
	986
	789
	2 (*)
Complément du reste.....	9653
Reste réel....................	0347

(*) Le chiffre 2 indique que les nombres desquels les autres doivent être soustraits sont au nombre de 2.

2e *Exemple.* Un négociant a vendu à diverses reprises 7343, 1256, 873, 517, 119, 615 kilogrammes de marchandise : il avait emmagasiné 9749, 7768, 5895, 697, 975 kilogrammes : combien reste-t-il en magasin ?

Disposition du calcul.

Quantités vendues.	7343 kilo.
	1256
	873
	517
	119
	615
Quantités emmagasinées.	9749
	7768
	5895
	.697
	.975
	32(*)
Complément de ce qui reste.....	85639
Reste réel...........................	14361 kilo.

Remarque. On peut proposer comme exercices la recherche de la démonstration des différents procédés de calcul qui viennent d'être indiqués.

Fractions continues.

107. Pour avoir une idée plus précise d'une fraction, on cherche à la comparer à une fraction dont le numérateur est l'unité, soit, par exemple, $\frac{7}{28}$, en divisant les deux termes par 7, on trouve $\frac{1}{4}$.

N'est-il pas naturel de chercher à effectuer une semblable opération sur toute fraction ordinaire ?

Prenons la fraction $\frac{7}{19}$; en divisant les deux termes de $\frac{7}{19}$ par 7, nous trouvons $\frac{1}{\frac{19}{7}}$, ou en effectuant la division autant que possible, nous trouvons $\frac{1}{2+\frac{5}{7}}$ en négligeant $\frac{5}{7}$ nous avons la fraction $\frac{1}{2}$; ainsi $\frac{1}{2}$ dif-

(*) Le nombre 32 indique qu'il y a trois nombres de quatre chiffres et deux de trois, parmi ceux qui désignent les quantités emmagasinées.

fère peu de $\frac{7}{19}$. Au lieu de prendre 2 pour quotient, nous pouvions prendre 3, la fraction fût devenue $\frac{1}{3}$; ainsi $\frac{7}{19}$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

Mais prenons la fraction elle-même $\dfrac{1}{2+\frac{5}{7}}$, nous pouvons opérer sur $\frac{5}{7}$ comme nous l'avons fait sur $\frac{7}{19}$, nous obtiendrons $\dfrac{1}{\frac{7}{5}}$, ou bien $\dfrac{1}{1+\frac{2}{5}}$; remplaçant $\frac{5}{7}$ par sa valeur, nous trouvons pour $\frac{7}{19}$, $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\frac{2}{5}}}$, puis opérant sur $\frac{2}{5}$ comme sur les fractions $\frac{7}{19}$ et $\frac{5}{7}$, nous trouvons $\frac{2}{5}$ égal à $\dfrac{1}{\frac{5}{2}}=\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}$, donc enfin $\dfrac{7}{19}=\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$

Cette fraction est dite une *fraction continue*.

Il est évident qu'en prenant une fraction continue on peut revenir de cette fraction continue à une fraction ordinaire ; soit, pour exemple, la fraction continue $\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{6+\frac{1}{5}}}}$, c'est en remontant que nous trouverons la fraction ordinaire, et d'abord $6+\frac{1}{5}$ est égal à $\frac{30+1}{5}$, c'est-à-dire $\frac{31}{5}$; ainsi on a déjà $\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{4+\frac{31}{5}}}$.

$4+\frac{31}{5}$ est égal à $\frac{20+31}{5}=\frac{51}{5}$, on a donc $\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{\frac{51}{5}}}$, mais 1 divisé par $\frac{51}{1}$ est égal à $\frac{5}{51}$, on a donc pour la fraction $\dfrac{1}{7+\frac{5}{51}}$, or $7+\frac{5}{51}$ est égal à $\frac{357+5}{51}$ ou $\frac{362}{51}$; on a donc encore $\frac{1}{\frac{362}{51}}$, ou bien $\frac{51}{362}$ pour la valeur de la fraction continue $\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{5}}}}$.

Donnons les définitions; les fractions $\frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}$ se nomment *fractions intégrantes;* les dénominateurs 7, 4, 6, 5 sont les *quotients incomplets*, et si, en se bornant à une approximation, on prend $\frac{1}{7}$ ou bien $\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}$, ou bien $\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6}}}$, ou enfin $\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{5}}}}$ les fractions ordinaires égales à ces fractions continues se nomment des *réduites* (1).

Formation et propriétés des réduites.

Prenons la fraction générale continue

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f.\ddots+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q}.}}}}}}$$

Loi de formation des réduites. On a pour les deux premières réduites $a=\frac{a}{1}$, $a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}$. Il est évident que pour avoir la troisième, il suf-

(1) Les fractions continues ont une très-grande importance dans les mathématiques élevées; et, d'ailleurs, comme elles doivent être comprises pour la théorie des logarithmes considérés d'une manière algébrique, nous les plaçons à la suite de l'arithmétique, parce que les élèves de l'école centrale des arts et manufactures auront, en un seul volume, toutes les parties de l'arithmétique.

fit de mettre dans la seconde $b+\frac{1}{c}$ au lieu de b, et il vient : $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=$

$\dfrac{a\left(b+\frac{1}{c}\right)+1}{b+\frac{1}{c}}=\dfrac{(ab+1)c+a}{bc+1}$, on obtiendra la quatrième en changeant c

en $c+\frac{1}{d}$, et ainsi on pourra les obtenir toutes.

Il est facile d'apercevoir la loi de la formation de ces réduites; car la troisième peut se former en multipliant par c, les deux termes de la seconde, et en ajoutant au numérateur, le numérateur de la première; et au dénominateur, le dénominateur de cette première. Il s'agit de savoir si cette loi est générale. Elle est vraie pour trois réduites consécutives. Nous allons démontrer qu'elle est vraie pour la quatrième.

Soient $\frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}, \frac{R}{R'}$, trois réduites consécutives pour lesquelles la loi est vraie; soit m le quotient incomplet correspondant à $\frac{R}{R'}$, on a $R=Qm+P$, $R'=Q'm+P'$. Soit $\frac{1}{n}$ la fraction intégrante qui vient après m, on aura la réduite qui suit $\frac{R}{R'}$, en remplaçant m par $m+\frac{1}{n}$ dans l'expression de $\frac{R}{R'}$; on aura $\dfrac{Q\left(m+\frac{1}{n}\right)+P}{Q'\left(m+\frac{1}{n}\right)+P'}=\dfrac{n(Qm+P)+Q}{n(Q'm+P')+Q'}=\dfrac{Rn+Q}{R'n+Q'}$. Cette réduite est formée d'après la loi indiquée, et ainsi généralement : *chaque réduite, à partir de la troisième, se forme en multipliant par le nouveau quotient, chaque terme de la précédente, et en ajoutant à ces produits les termes respectifs de l'autre précédente.*

Les réduites sont alternativement plus petites et plus grandes que la fraction continue.

La première a est plus petite que la fraction, puisque l'on néglige toute la partie fractionnaire qui suit. La seconde $a+\frac{1}{b}$ est plus grande, puisque le dénominateur b est plus petit que dans la fraction continue. Le même raisonnement s'applique aux réduites suivantes.

La différence entre deux réduites consécutives, est égale à l'unité divisée par le produit des dénominateurs de ces réduites. — La différence entre les deux premières est $a+\frac{1}{b}-\frac{a}{1}=\frac{1}{1\times b}$. Or, je vais démontrer que la différence entre deux réduites consécutives, est égale, abstraction faite du signe, à un nombre constant divisé par le produit du dénominateur de ces réduites. Ce nombre constant sera évidemment l'unité.

Prenons trois réduites consécutives $\frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}, \frac{R}{R'}$, on a par la loi de formation :

$\frac{R}{R'}=\frac{Qm+P}{Q'm+P'}$. Les différences entre ces réduites, sont : $\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\frac{P'Q-PQ'}{P'Q'}$, $\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qm+P}{Q'm+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{PQ'-P'Q}{Q'R'}$. Le dénominateur est toujours le produit des dénominateurs des réduites, et le numérateur, qui est le même au signe près, sera :

$$PQ'-P'Q=\pm 1;$$

on prendra le signe + si la réduite retranchée est de rang impair, et le signe — dans le cas contraire.

La différence $\frac{1}{R'Q'}$ est plus grande que l'erreur commise, en prenant l'une des deux réduites pour la valeur de la fraction continue; mais les dénominateurs augmentent jusqu'à l'infini ; donc, on pourra prendre des réduites qui donnent la valeur de la fraction avec une approximation déterminée.

Les réduites formées suivant la loi indiquée, sont des fractions irréductibles.

Soit $\frac{P}{P'}$ une réduite. Supposons qu'il y ait un facteur p commun aux deux termes; mais alors p devrait diviser $PQ'-P'$, ce qui est impossible puisque $PQ'-P'Q=\pm 1$.

Chaque réduite est plus approchée de la vraie valeur, que la réduite précédente.

Nous avons trouvé $\frac{R}{R'}=\frac{Qm+P}{Q'm+P'}$; pour avoir la valeur x de la fraction continue, il suffit de remplacer m par $m+1$, etc..... Je représente cette partie par y, et j'aurai :

$$x=\frac{Qy+P}{Q'y+P'};$$

je cherche la différence entre x et deux réduites $\frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}$, consécutives, et j'ai :

$$x-\frac{P}{P'}=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}-\frac{P}{P'}=\frac{y(P'Q-PQ')}{P'(Q'y+P')}$$
$$x-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{(PQ'-P'Q)}{Q'(Q'y+P')}$$

Mais on a $PQ'-P'Q=\pm 1$; et ainsi ces différences viennent à

$$x-\frac{P}{P'}=\frac{\pm y}{P'(Q'y+P')}$$
$$x-\frac{Q}{Q'}=\frac{\pm 1}{Q'(Q'y+P')}$$

Or y est plus grand que 1, puisque c'est un quotient complet ; et Q' est plus grand que P' ; donc la deuxième différence, abstraction faite du signe, est moindre que l'autre. C'est pour cela que les réduites sont appelées *fractions convergentes.*

Lorsqu'on prend une réduite pour la valeur de la fraction continue, l'erreur est moindre que l'unité divisée par le produit du dénominateur de cette réduite et de la suivante, et elle est plus grande que l'unité divisée par le produit du premier dénominateur, multiplié par la somme de ce dénominateur et du suivant.

Prenant la différence $x-\frac{Q}{Q'}=\frac{1}{Q'(Q'y+P')}$, il est évident que y est plus grand que m, et moindre que $m+1$, donc :

$$x-\frac{Q}{Q'}<\frac{1}{Q'(Q'm+P')}$$
$$x-\frac{Q}{Q'}>\frac{1}{Q'(Q'(m+1)+P')}>\frac{1}{Q'(Q'm+P'+Q')}$$

Or $Q'm+P'=R'$, donc $x-\frac{Q}{Q'}<\frac{1}{Q'R'}>\frac{1}{Q'(R'+Q')}$.

Chaque réduite donne la valeur de la fraction continue, avec plus d'approximation que toute fraction qui aurait un dénominateur moindre.

Reprenons deux réduites consécutives $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ soit $\frac{p}{p'}$ une fraction irréductible, qui donne x plus exactement que $\frac{Q}{Q'}$; comme x est entre $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$, il faut que $\frac{p}{p'}$ soit elle-même entre $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$, et plus près de la seconde que de la première. On aura donc, abstraction faite des signes des différences $\frac{p}{p'}-\frac{P}{P'}<\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}$ ou $\frac{pP'-p'P}{p'P'}<\frac{1}{P'Q'}$; mais $pP'-p'P$ est au moins égal à 1 ; il faut donc que $p'P'$ soit plus grand que $P'Q'$, ou $p'>Q'$, et ainsi pour qu'une fraction $\frac{p}{p'}$ approche plus de la valeur que $\frac{Q}{Q'}$ il faut que $p'>Q'$.

Équations exponentielles.

108. On appelle équation exponentielle, celle dans laquelle l'inconnue est en exposant.

Avant d'indiquer les propriétés de ces équations, nous allons démontrer que les puissances d'un nombre positif différent de l'unité, peuvent reproduire tous les nombres.

Soit d'abord un nombre A plus grand que l'unité. Représentons par x et y deux variables, et posons

$$y = A^x.$$

En donnant à x les valeurs 0, 1, 2, 3..... y prend successivement les valeurs 1, A, A^2, qui croissent indéfiniment; et si x augmente d'une manière continue entre 0 et 1, 1 et 2, y prendra toutes les valeurs possibles entre 1 et A, entre A et A^2.

En faisant x négatif et le changeant en $-x'$, on aura $y = A^{-x'} = \frac{1}{A^{x'}}$ et si x' augmente d'une manière continue, à partir de 0, le dénominateur augmentera d'une manière continue jusqu'à ∞, et la fraction diminuera d'une manière continue, depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{\infty}$ ou 0.

Soit $\frac{1}{A}$ un nombre positif moindre que l'unité, posons $y = \left(\frac{1}{A}\right)^x = \frac{1}{A^x}$. Si x augmente de 0 à l'infini, $\frac{1}{A^x}$ prendra tous les états de grandeur depuis 1 jusqu'à 0, et si x diminue depuis 0 jusqu'à $-\infty$, la fraction prendra tous les états de grandeur depuis 1 jusqu'à l'infini positif.

Lorsque dans l'équation $A = B^x$ *A est donné, on peut trouver* x *avec tout le degré d'approximation qu'on veut.*

Supposons d'abord A et B plus grands que l'unité; si on prend pour x les valeurs 0, 1, 2, on parviendra à deux nombres consécutifs m, $m+1$, qui seront tels que $A^m < B$, $A^{m+1} > B$. On pourra poser $x = m + \frac{1}{y}$; y étant plus grand que l'unité, on aura :

$$A^{m+\frac{1}{y}} = B \text{ d'où } A^m \times A^{\frac{1}{y}} = B, \text{ d'où } A^{\frac{1}{y}} = \frac{B}{A^m}$$

Enfin, $A = \left(\frac{B}{A^m}\right)^y$; le quotient de B par A^m étant compris entre 1 et A, on pourra donner à y toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à A, et en continuant ainsi, la valeur de x sera exprimée par une fraction continue.

Soit $A^x = B'$, B' étant inférieur à l'unité, x devra être négatif, et on posera $x = -y$, d'où :

$$A^{-y} = B' \text{ ou } \frac{1}{A^y} = B', \text{ d'où } A^y = \frac{1}{B'}$$

et cette équation rentre dans le cas de la première, puisque $\frac{1}{B'}$ est plus grand que l'unité

Soit $A'^x = B$, A' étant moindre que 1, et B plus grand que 1. La valeur de x devra être négative: nous poserons $x = -y$, et il viendra :

$$A'^{-x} = B,\text{ ou } \frac{1}{A'^x} = B,\text{ d'où } \left(\frac{1}{A'}\right)^y = B,$$

et comme $\frac{1}{A'}$ est plus grand que 1, on retombe dans le premier cas.

Soit enfin $A'^x = B'$, A', B', étant moindres que l'unité. Si l'on divise l'unité par chaque membre, il vient : $\frac{1}{A'^x} = \frac{1}{B'}$, et on est ramené au premier cas.

Nous allons chercher les conditions nécessaires pour que l'équation $A^x = B$ puisse être vérifiée par une valeur commensurable de x, A étant entier, et B commensurable ; représentons par $\frac{p}{q}$ la valeur de x, on aura :

$$A^{\frac{p}{q}} = B,\text{ d'où } A^p = B^q.$$

Pour que cette égalité existe, il faut que B soit entier ; il faut de plus que A et B soient composés des mêmes facteurs premiers, puisque tout facteur qui divise A^p, doit diviser B_q. Or, tout facteur qui divise A^p, divise A, et doit diviser B. Cela posé, si a et b sont les facteurs premiers de A, on devra avoir $A = a^m b^n$, $B = a^{m'} b^{n'}$, et ainsi l'égalité $A^p = B^q$ devient $a^{mp} b^{nq} = a^{m'q} b^{n'q}$; et pour que cette dernière ait lieu, il faut que $mp = m'q$, $np = n'q$, et pour que cette dernière ait lieu, il faut que $mp = m'q$, $np = n'q$, d'où $\frac{p}{q} = \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n}$.

Ces conditions suffisent ; car on a $A = a^m b^n$, $B = a^{m'} b^{n'}$, $\frac{m'}{m} = \frac{n'}{n}$, d'où $A^{\frac{m'}{m}} = a^{m'} b^{\frac{m'n}{m}} = a^{m'} b^{n'} = B$.

Si la valeur de x était négative, on poserait $x = -\frac{p}{q}$; d'où $A^{\frac{p}{q}} = B$, $B_q = \frac{1}{A^p}$, et il faut que B soit une fraction telle que, réduite à ses moindres termes, le numérateur soit l'unité, et le dénominateur un nombre dont la puissance q soit égale à A^n; et si $A = a^m b^n$, il faudra que $B = \frac{1}{a^{m'} b^{n'}}$, et $\frac{m'}{n} = \frac{n'}{n}$.

Logarithmes.

109. Les valeurs de x dans l'équation $A^x = y$, A étant positif, sont appelées les logarithmes des valeurs correspondantes de y ; A est *la base du système de logarithme* fourni par cette équation.

Soit y, y', y'', des nombres; x, x', x'', leurs logarithmes, on aura :

$$y' = A^{x'},\ y'' = A^{x''};$$

d'où $yy'y'' = A^{x+x'+x''}$; donc $\log. yy'y'' = x + x' + x'' = \log. y + \log. y' + \log. y''$.

1. On conclut de là, *que le log. d'un produit est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.*

On a aussi de $y = A^x,\ y' = A^{x'}$,

$$\frac{y}{y'} = \frac{A^x}{A^{x'}} = A^{x-x'}$$

Donc $\log. \frac{y}{y'} = x - x' = \log. y - \log. y'$.

2. *Le log. d'un quotient est égal au logarithme du dividende, moins celui du diviseur.*

de $y^m = A^{mx}$, on tire $\log. y^m = mx = m \times \log. y$.

3. *Le log. d'une puissance est égal au log. du nombre multiplié par l'exposant de la puissance.*

On a $\sqrt[m]{y} = A^{\frac{x}{m}}$ d'où $\log. \sqrt[m]{y} = \frac{x}{m} = \frac{\log. y}{m}$

4. *Le log. d'une racine d'un nombre est égal au log. du nombre divisé par l'indice.*

Module. On peut passer d'une base A à une autre base B, lorsque l'on connait les logarithmes des nombres pour la première.

Soit N un nombre, soit x le logarithme de ce nombre dans la base B, on aura :

$$B^x = N.$$

Prenant les log. des deux membres dans la base A, on a : $x \log. B = \log. N$, d'où $x = \frac{\log. N}{\log. B} = \frac{1}{\log. B} \times \log. N$; $\frac{1}{\log. B}$ est ce qu'on appelle le *module* de la nouvelle base B, par rapport à l'autre A.

FIN DE L'ARITHMÉTIQUE.

ALGÈBRE.

ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES. — DÉFINITIONS.

1. L'ALGÈBRE a pour but de donner des règles générales pour résoudre les questions relatives aux quantités.

Pour parvenir à ces règles générales, *on représente par des* LETTRES *de l'alphabet les nombres que l'on considère.* Au moyen de cette convention, les *caractères* qui représentent les nombres, en algèbre, ne désignent par eux-mêmes aucune valeur particulière.

Les signes des *opérations à effectuer* sur les quantités proposées, et les signes qui expriment la relation de grandeur de deux quantités, sont les mêmes en algèbre qu'en arithmétique.

Ainsi, deux nombres étant désignés par les lettres a et b, les expressions

$$a+b,\ a-b,\ a\times b \text{ ou } a.b,\ \frac{a}{b} \text{ ou } a:b,\ a^2,\ \sqrt[3]{a}$$

indiquent que l'on aura à effectuer la *somme* de ces deux nombres, ou leur *différence*, ou leur *produit*, ou le *quotient* du premier divisé par le second, ou la deuxième *puissance* du nombre a, ou l'extraction de la *racine* cubique du nombre a.

Si le nombre a doit être plus grand que b, ou égal à b, ou moindre que b, on l'indiquera en écrivant :

$$a>b,\ a=b,\ a<b.$$

La représentation des nombres par les lettres, et l'indication des opérations à effectuer et des relations de grandeur, par les signes que nous venons de rappeler, constituent ce qu'on appelle la NOTATION *algébrique.*

La *notation algébrique* a l'avantage d'exprimer très-brièvement et avec beaucoup de clarté, les relations qui existent entre les quantités comprises dans l'énoncé d'une question, et l'ensemble des opérations à l'aide desquelles on peut déterminer le résultat qu'il s'agit d'obtenir.

Une quantité exprimée au moyen de la notation algébrique, prend le nom de *quantité algébrique* ou *quantité littérale.*

2. Donnons un exemple de l'application de la notation algébrique à la résolution d'un problème.

Qu'un BÉNÉFICE *connu ait été fait par trois associés, dont les* MISES *sont données*, on propose de *partager ce bénéfice entre les associés, proportionnellement à leurs mises.*

Nous désignerons par n, le nombre des francs que l'association a gagnés; a, b, c, les nombres de francs composant les mises partielles; par s, la mise totale, ou la valeur de la somme $a+b+c$; enfin, par x, y, z, les nombres de francs qui doivent revenir à chacun des associés pour sa part de bénéfice.

De ce que les trois associés, avec s francs, ont gagné ensemble n francs, il est facile de conclure que chacun des francs de la mise totale a fait gagner un nombre de francs exprimé par $\frac{n}{s}$ ou $\frac{n}{a+b+c}$.

Par conséquent, le nombre a de francs de la première mise, doit faire gagner au premier associé un nombre de francs x, qui est exprimé par

$$\frac{n}{a+b+c}\times a.$$

On voit de même que le gain y du deuxième associé, est exprimé par $\frac{n}{a+b+c}\times b$ francs;

qu'enfin, le gain z du troisième associé, est de $\frac{n}{a+b+c}\times c$ francs.

Ainsi, le problème est résolu; et, sans avoir eu égard aux *valeurs numériques particulières* que l'on peut attribuer aux *mises* des associés et à leur *bénéfice* total, nous avons découvert *les opérations qu'il faut effectuer sur les nombres donnés a, b, c, n, pour obtenir les gains partiels x, y, z*, qui étaient liés aux nombres donnés par les conditions du partage.

Si l'on énonce, en langage ordinaire, l'une des *formules algébriques*

$$x=\frac{n}{a+b+c}\times a;\ y=\frac{n}{a+b+c}\times b;\ z=\frac{n}{a+b+c}\times c,$$

on retrouvera la *règle* donnée en arithmétique sous le nom de *règle de compagnie*, ou *règle de société*.

3. On peut maintenant apprécier la différence qui existe entre l'algèbre et l'arithmétique proprement dite.

L'arithmétique établit des règles certaines pour EFFECTUER *les opérations* sur les nombres donnés; elle fait connaître des procédés à l'aide desquels on découvre le NOM *du nombre* qui exprime la valeur du résultat.

Le *résultat algébrique*, au contraire, ne présente encore que l'*indication* des calculs qui devront ensuite être effectués à l'aide des procédés arithmétiques.

Dans l'exemple précédent, il faudra, pour utiliser les *formules* que nous avons obtenues, passer des LETTRES a, b, c, n, aux *valeurs numériques* qu'il conviendra de leur attribuer dans chaque cas particulier.

Si l'on suppose un *bénéfice* de 15 000 fr., et des *mises* de 2,000 3,000 et 5,000 fr., on trouvera par l'*addition arithmétique*, que la mise totale $a+b+c$, est de 10,000 fr. L'expression $\frac{n}{a+b+c}$ prendra la valeur particulière $\frac{15000}{10000}$, qui se réduit à 1, 5; et, en achevant les calculs arithmétiques, on obtiendra les gains partiels

$$x=1,5\times 2000=3000$$
$$y=1,5\times 3000=4500$$
$$z=1,5\times 5000=7500.$$

4. Un ensemble de quantités algébriques réunies par les signes $+$ et $-$, forme un *polynôme*. Chacune de ces quantités, considérée avec le signe qui la précède, est un *terme* du polynôme.

Ainsi, les expressions $a+b+c$, $a-b+c$, sont des polynômes. Les quantités a, $-b$, $+c$, sont les *termes* du second polynôme.

Il est évident que les expressions $a+b$, $b+a$, représentent une seule et même quantité. Par cette raison, le terme a, qui n'est précédé ni du signe $+$, ni du signe $-$, est considéré comme s'il était affecté du signe $+$.

Un terme qui a le signe $+$ est appelé terme *additif;* un terme qui a le signe $-$ est appelé terme *soustractif*.

Si une quantité algébrique a, par exemple, ou $-b$, n'est réunie à aucune autre par les signes $+$ et $-$, on l'appelle *monôme*, ou simplement *terme*.

On nomme *binôme*, un polynôme à deux termes, tel que $a+b$, ou $a-b$.

On nomme *trinôme*, un polynôme à trois termes, tel que $a+b+c$, $a-b+c$, $a-b-c$.

Au lieu d'écrire $a+a+a$, on écrit $3a$, et l'on dit que le nombre 3 est le *coefficient* de a.

En général on nomme *coefficient*, un nombre placé comme facteur devant une quantité. Ainsi, les nombres 2. $\frac{2}{3}$ sont des *coefficients* dans les expressions $2a$, $\frac{2}{3}a$. Un terme devant lequel on n'a pas écrit de coefficient, est considéré comme s'il avait le coefficient 1.

Le terme b, par exemple, représente la même quantité que $1 \times b$.

Le coefficient est écrit à côté du facteur suivant, sans qu'aucun signe soit interposé, de sorte que le signe de la multiplication est sous-entendu.

La même convention s'applique à un produit indiqué de facteurs représentés par des lettres. Ainsi, l'on écrit abc, au lieu de $a \times b \times c$.

On entend par *valeur numérique* d'un terme, ou *valeur absolue* d'un terme, le *nombre* que l'on obtient, abstraction faite du signe $+$ ou $-$, lorsqu'ayant remplacé chaque lettre par un nombre, on a effectué, selon les règles de l'arithmétique, la totalité des opérations indiquées.

Ainsi, l'on trouve que la valeur numérique absolue du terme $5a^2b$, ou du terme $-5a^2b$, est 60, lorsqu'on suppose $a=2$, $b=3$.

On entend par VALEUR NUMÉRIQUE ou VALEUR ABSOLUE *d'un polynôme, le* NOMBRE *que l'on obtient en remplaçant chaque lettre par un nombre ; en faisant d'une part la somme des valeurs des termes additifs ; en faisant d'autre part la somme des valeurs absolues des termes soustractifs ; et enfin, en retranchant la plus petite de ces deux sommes de la plus grande* (1).

(1) Dans ce qui va suivre nous admettrons d'abord que la somme des valeurs des termes soustractifs d'un polynôme ne surpasse pas la somme des valeurs des termes additifs. (*Voy.* no 58.)

Ainsi, l'on trouve que la valeur numérique du polynôme $a-\frac{2}{3}b+c$, est 12, lorsqu'on a supposé que $a=11, b=9, c=7$.

Il est évident que *la* VALEUR NUMÉRIQUE *d'un polynôme ne change pas, lorsqu'on intervertit l'ordre des termes.*

Ainsi, les polynômes $a-\frac{2}{3}b+c, a+c-\frac{2}{3}b$, prendront la même valeur numérique, 12, lorsqu'on supposera $a=11$, $b=9$, $c=7$.

On dit que deux termes sont SEMBLABLES, *lorsqu'ils ne diffèrent que par la valeur du coefficient, ou par le signe* $+$ ou $-$, *dont ils sont affectés.*

Ainsi, les termes $3a$ ou $+3a$, $5a$, $-3a$, $-2a$, sont des termes *semblables.*

Lorsqu'un polynôme renferme des *termes semblables*, on peut le RÉDUIRE *à un moindre nombre de termes*, c'est-à-dire le remplacer par un polynôme dans lequel le nombre des termes est moindre, sans que la valeur du polynôme soit changée.

Par exemple, le polynôme $4a-2b+3a+c-5a$, ou $4a+3a-5a-2b+c$, est évidemment égal au polynôme $7a-5a-2b+c$, et au polynôme $2a-2b+c$.

De même, le polynôme $3a+5b-5a+4c-2a$, ou $5b+4c+3a-4a-2a$, est égal au polynôme $5b+4c+3a-7a$, et au polynôme $5b+4c+3a-3a-4a$, qui se réduit à $5b+4c-4a$, parce que la quantité $+3a-3a$ est nulle ; ce qu'on exprime en disant que *les termes* $+3a$, $-3a$, *se détruisent.*

Pour réduire en un seul terme plusieurs termes semblables DE MÊME SIGNE, calculez la somme de leurs coefficients, et affectez cette somme du signe commun.

Pour réduire en un seul terme plusieurs termes semblables et DE SIGNES DIFFÉRENTS, calculez la somme des coefficients des termes additifs ; calculez la somme des coefficients des termes soustractifs ; retranchez la plus petite somme de la plus grande ; et affectez le reste du signe de la plus grande somme.

En général, pour *opérer la* RÉDUCTION *d'un polynôme au plus petit nombre de termes*, réduisez chaque système de termes semblables en un seul terme, au moyen de la règle précédente.

CHAPITRE DEUXIÈME.

OPÉRATIONS OU TRANSFORMATIONS ALGÉBRIQUES.

5. Soient les deux polynômes $P=a-b$, $Q=c-d$.

Supposons qu'on ait à considérer la somme, la différence, le produit ou le quotient des quantités algébriques P, Q.

On *indique*, en algèbre, de la manière suivante, l'opération *à effectuer* :

$$P+Q=(a-b)+(c-d);$$
$$P-Q=(a-b)-(c-d);$$
$$P\times Q=(a-b)\times(c-d)=(a-b)(c-d);$$
$$P:Q \text{ ou } \frac{P}{Q}=(a-b):(c-d)=\frac{a-b}{c-d}.$$

Nous nous proposerons, dans ces différents cas, de *déterminer une suite de monômes* liés par les signes $+$, $-$, *formant un polynôme dont la valeur soit égale à celle du résultat de l'opération indiquée.*

Lorsque ce polynôme sera obtenu, nous dirons que l'*opération algébrique est effectuée.*

L'ensemble des procédés au moyen desquels on parvient à *effectuer* les opérations, constitue le *calcul algébrique.*

L'opération algébrique *étant effectuée* dans le sens que nous venons d'expliquer, on a un *résultat algébrique*, indiquant une série d'opérations *arithmétiques*, qu'il faudrait faire encore, en remplaçant les lettres par des nombres, pour parvenir au *résultat numérique* de l'opération proposée.

Ainsi, les *opérations* en ALGÈBRE diffèrent des *opérations* de l'ARITHMÉTIQUE, en ce que « *leurs* RÉSULTATS, *qui ne sont encore que* » *des indications de calculs à effectuer, ne présentent réellement que*

» *des* TRANSFORMATIONS *des opérations primitivement indiquées, en*
» *d'autres qui produisent le même effet.*» (Algèbre de M. LACROIX.)

ADDITION.

6. *Pour faire la* SOMME *de plusieurs polynômes, écrivez les termes de ces polynômes, à la suite les uns des autres, en conservant les signes de tous les termes.*

Ainsi, P et $a-b$ étant les quantités qu'il faut *additionner*, vous aurez :

$$P+(a-b)=P+a-b.$$

En effet, la somme des quantités P, a, serait évidemment $P+a$. Mais ce n'est pas a tout entier qu'il faut ajouter à P ; c'est la quantité a diminuée d'abord de b. Par conséquent, la quantité a, que nous avons ajoutée à P, étant trop grande de b, la somme $P+a$ est trop grande de b. La véritable somme des quantités P, $a-b$, est donc $(P+a)-b$, ou $P+a-b$.

SOUSTRACTION.

7. *Pour faire la* DIFFÉRENCE *de deux polynômes, changez les signes de tous les termes du polynôme à soustraire ; puis, après le changement de signe, écrivez ces termes à la suite de l'autre polynôme.*

Ainsi, ayant à *soustraire* de la quantité P le polynôme $Q=c-d$ vous aurez

$$P-Q=P-(+c-d)=P-c+d.$$

En effet, la *somme* des polynômes $P-c+d$, et Q,

est
$$P-c+d+c-d,$$

et elle se réduit à la valeur P.

Donc $P-c+d$ est la *différence* ou le *reste*, en vertu de la définition de la soustraction.

MULTIPLICATION.

8. *Pour faire le* PRODUIT *de plusieurs* MONÔMES, *faites le produit des coefficients, placez comme facteurs, à la suite de ce produit, les lettres communes à ces monômes, en donnant à chaque lettre un exposant égal à la somme des exposants dont elle est affectée ;*

écrivez enfin les lettres qui n'entrent que dans un facteur, en leur conservant les exposants qu'elles ont.

Ainsi, les monômes qu'il faut *multiplier* entre eux étant $2a^4b^3c^2$ et $5a^2b^2d$, vous aurez $2a^4b^3c^2 \times 5a^2b^2d = 10a^6b^5c^2d$. Cette règle se fonde sur ces deux principes :

1° Un produit ne change pas, dans quelque ordre qu'on indique les multiplications ; 2° pour multiplier une quantité par un produit de plusieurs facteurs, il suffit de multiplier cette quantité par chacun des facteurs du produit.

On en conclut que $a^4 \times a^2 = aaaa \times aa = aaaaaa = a^6$,
$b^3 \times b^2 = bbb \times bb = bbbbb = b^5$;

et $2a^4b^3c^2 \times 5a^2b^2d = 2a^4b^3c^2 \times 5 \times a^2 \times b^2 \times d$
$= 2 \times 5 \times a^4 \times a^2 \times b^3 \times b^2 \times c^2 \times d = 10a^{4+2} \times b^{3+2} \times c^2 \times d = 10a^6b^5c^2d$.

9. *Pour faire le* PRODUIT *de deux* POLYNÔMES, *multipliez successivement tous les termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, en affectant du signe + chaque produit partiel dont les facteurs sont de* MÊME SIGNE, *et en affectant du signe — chaque produit partiel dont les facteurs sont de signes contraires.*

Ainsi, les polynômes qu'il faut *multiplier* entre eux étant $P = a - b$, $Q = c - d$, vous aurez

$$P \times Q = (a - b) \times (c - d) = ac - bc - ad + bd.$$

En effet, d'après la définition de la multiplication (*Arithm.*, page 7), multiplier P par $c - d$ revient à prendre la quantité P autant de fois qu'il y a d'unités dans c, et à *retrancher* du résultat autant de fois la quantité P, qu'il y a d'unités dans d. On a donc

$$P \times Q = P \times (c - d) = P \times c - P \times d.$$

Or, on sait que $P \times c = c \times P = c \times (a - b)$; donc $P \times c = c \times a - c \times b$.
De même $P \times d = d \times P = d \times (a - b)$; donc $P \times d = d \times a - d \times b$.
Par conséquent,

$$P \times Q = P \times c - P \times d = ac - bc - (ad - bd);$$

donc, en vertu de la règle de *soustraction* (n° 7),

$$P \times Q = ac - bc - ad + bd.$$

Le *produit* des polynômes P, Q, étant ainsi obtenu, nous remarquons 1° que les termes *additifs* a, c, multipliés entre eux, ont donné un terme *additif* ac dans le produit ;

2° Que les termes *soustractifs*, dont les valeurs absolues sont b, d, ont donné encore dans le produit un terme *additif* bd :

Par où l'on voit que *les deux facteurs d'un produit partiel ayant le* MÊME SIGNE, soit le signe $+$, soit le signe $-$, *ce produit partiel est* ADDITIF ;

3° Que les termes dont les valeurs absolues sont b et c, l'un *soustractif*, dans le multiplicande, l'autre *additif*, dans le multiplicateur, ont donné dans le produit un terme *soustractif* $-bc$;

4° Enfin, que les termes dont les valeurs absolues sont a et d, l'un *additif*, dans le multiplicande, l'autre *soustractif*, dans le multiplicateur, ont donné dans le produit un terme *soustractif* $-ad$;

Par où l'on voit que *les deux facteurs d'un produit partiel ayant des* SIGNES CONTRAIRES, *ce produit partiel est un terme soustractif dans le produit cherché.*

Ces remarques conduisent à la *règle des signes* que nous avons énoncée.

On est convenu d'exprimer, de la manière suivante, les quatre cas compris dans la règle des signes :

$+\times+$ donne $+$	$-\times+$ donne $-$
$-\times-$ donne $+$	$+\times-$ donne $-$

10. Si les facteurs polynômes

$$P=g-m+h+k-n$$
$$Q=g'-m'-n'+h'+k'$$

ont plus de deux termes, on peut intervertir l'ordre des termes dans P, en écrivant d'abord tous les termes *additifs*, et ensuite tous les termes *soustractifs*.

Si nous représentons par a la *somme* des termes additifs g, h, k, et par b la *somme* des valeurs absolues m, n, des termes soustractifs, nous aurons

$$P=g+h+k-m-n=(g+h+k)-(m+n)=a-b.$$

De même, en désignant par c la *somme* des termes additifs dans le polynôme Q, et par d la *somme* des valeurs absolues des termes soustractifs du polynôme Q, nous aurons :

$$Q=g'+h'+k'-m'-n'=(g'+h'+k')-(m'-n')=c-d.$$

De là, $\quad P\times Q=ac-bc-ad+bd.$

Or, il est clair que pour former le produit

$$ac=(g+h+k)\times(g'+h'+k'),$$

il suffira de multiplier successivement tous les termes de la somme a, par chacun des termes de la somme c, et d'écrire la somme des produits partiels, qui seront tous additifs.

De même, pour former le produit

$$+bd=(m+n)\times(m'+n'),$$

on multipliera les valeurs absolues de tous les termes soustractifs du multiplicande P, par la valeur absolue de chacun des termes soustractifs du multiplicateur Q, et l'on écrira la somme de tous les produits partiels affectés du signe $+$.

Il arrivera donc encore que *chaque produit partiel dont les facteurs sont des termes de* MÊME SIGNE dans P et Q, *devra être affecté du signe* $+$.

Pour former le produit $bc=(m+n)\times(g'+h'+k')$, on multiplierait les valeurs absolues de tous les termes soustractifs de P par chacun des termes additifs de Q, et l'on aurait

$$bc=mg'+ng'+mh'+nh'+mk'+nk';$$

or, la valeur absolue bc doit être *soustraite* de $ac+bd$, puisque dans le résultat $P\times Q$ le terme $-bc$ est soustractif. On retranchera donc tous les termes qui composent la valeur bc, c'est-à-dire qu'on les écrira précédés du signe $-$.

De même, on aura

$$ad=gm'+hm'+km'+gn'+hn'+kn';$$

et parce que le terme $-ad$ est soustractif dans le produit $P\times Q$, on écrira tous les termes qui composent la valeur ad, en les affectant chacun du signe $-$.

Il arrivera donc encore que *chaque produit partiel dont les facteurs sont des termes de* SIGNES CONTRAIRES dans P et Q, *devra être affecté du signe* $-$.

La *règle des signes* subsiste donc dans la multiplication de polynômes qui renferment un nombre quelconque de termes.

11. Lorsqu'on connaît le *nombre des termes* qui composent chacun des facteurs d'un produit, *on peut déterminer, sans faire la multiplication, le* NOMBRE DES TERMES *qui composeraient le produit effectué.* Il suffit pour cela de MULTIPLIER ENTRE EUX LES NOMBRES DE TERMES qui sont donnés.

Que, par exemple, les facteurs P, Q, R, renferment respectivement, n, n' et n'' termes. Le produit, avant la *réduction* des termes semblables, s'il y en a, se composera d'un nombre de termes marqué par $n\times n'\times n''$.

En effet, supposons que le multiplicande P renferme 6 termes, et que le multiplicateur Q ait 4 termes.

La multiplication de chacun des 6 termes de P par le premier terme de Q donnera 6 produits partiels qui seront des termes du produit cherché.

On obtiendra encore 6 termes du produit, en multipliant chacun des 6 termes de P par le second terme de Q ; et enfin, lorsqu'on aura successivement multiplié les 6 termes de P par chacun des 4 termes de Q, on aura obtenu 4 fois 6 termes ou produits partiels, qui composeront le produit $P \times Q$.

Maintenant, si l'on prend pour multiplicande, dans une nouvelle multiplication, le résultat $P \times Q$ composé de 6×4 ou 24 termes, et pour multiplicateur le polynôme R, qui renferme, par exemple, 5 termes, on obtiendra 24 produits partiels chaque fois qu'on aura multiplié les 24 termes du résultat $P \times Q$ par l'un des termes de R. Et puisqu'il faut, en vertu de la règle de multiplication, multiplier successivement les 24 termes de $P \times Q$ par *chacun* des 5 termes de R, on obtiendra, en tout, 5 fois 24 termes ou produits partiels qui composeront le résultat $P \times Q \times R$. Ce produit renfermera donc $6 \times 4 \times 5$ termes, ou 120 termes.

Si, parmi les $n \times n' \times n''$... termes du produit $P \times Q \times R$..., il se trouve des termes semblables, on pourra opérer une *réduction* (n° 4) qui diminuera le nombre des termes, sans que la valeur du *produit* $P \times Q \times R$... soit changée.

Nous verrons (n° 16) qu'après cette réduction, le nombre des termes du produit des facteurs polynômes P, Q, R,... ne pourra pas être inférieur à *deux*.

12. Le nombre des *facteurs littéraux* qui concourent à former la valeur d'un monôme, abstraction faite du coefficient numérique, constitue ce qu'on appelle le DEGRÉ de ce monome.

Ainsi, les monomes abc, $3abc$, $\frac{2}{3}abc$; a^2b ou $a \times a \times b$, ab^2 ou $a \times b \times b$; $4a^2b$, $\frac{7}{5}ab^2$, sont des monômes du *troisième degré*.

Il est clair qu'on obtient le degré d'un terme ou d'un monome, en faisant la somme des exposants de toutes les lettres contenues dans ce monôme ; chaque lettre qui n'est affectée d'aucun exposant étant regardée comme si elle était affectée de l'exposant 1, parce qu'elle exprime une première puissance.

13. Lorsque tous les termes d'un polynôme sont du *même degré*, on dit que *le polynôme est* HOMOGÈNE.

Ainsi, le polynôme $5abc - 4d^2e + 2fg^2 - h^3$, est un *polynôme* HOMOGÈNE *du troisième degré.*

Le *degré* d'un polynôme homogène est le même que le degré des termes qui le composent.

14. *Lorsque les facteurs d'un produit sont des polynômes* HOMOGÈNES, *le produit est* HOMOGÈNE; *et son degré est la* SOMME *des degrés des facteurs.*

En effet, tous les termes du produit $P \times Q$ sont des produits partiels provenant de la multiplication d'un terme de P par un terme de Q.

Supposons que P soit un polynôme homogène du septième degré, et que Q soit un polynôme homogène du deuxième degré. Le produit de chaque terme de P par chaque terme de Q contiendra comme facteurs les 7 facteurs littéraux qui entrent dans la composition du multiplicande partiel, et en outre les 2 facteurs littéraux qui entrent dans la composition du multiplicateur partiel.

Ce produit partiel contiendra donc $7 + 2$ facteurs en lettres.

Par exemple, le produit du terme $4a^6b$, qui est du septième degré, par le terme $3c^2$, qui est du deuxième degré, sera $12a^6bc^2$, c'est-à-dire un terme du neuvième degré.

15. Lorsque plusieurs termes d'un polynôme renferment une même lettre affectée d'exposants différents, on peut intervertir l'ordre des termes, de manière que les exposants dont cette lettre est affectée soient constamment *décroissants*, à partir du premier terme, ou de manière que les exposants de cette lettre *croissent* constamment, à partir du premier terme.

Dans les deux cas, si l'on adopte l'une ou l'autre de ces deux dispositions des termes, on dit que *le polynôme est* ORDONNÉ *par rapport à la lettre dont il s'agit.*

Alors, cette lettre reçoit la dénomination de *lettre* PRINCIPALE, ou *lettre* ORDONNATRICE.

Si, par exemple, on ORDONNE le polynôme

$$3ab + 8a^4 - 6b^2 - 5a^3 - 4a^2b,$$

par rapport à la lettre a, il deviendra

$$8a^4 - 5a^3 - 4a^2b + 3ab - 6b^2,$$

les puissances de a étant décroissantes;

ou bien

$$-6b^2 + 3ab - 4a^2b - 5a^3 + 8a^4,$$

les puissances de a étant croissantes.

Le terme $-6b^2$, qui ne renferme pas la lettre principale, est appelé terme *indépendant* de cette lettre.

Si l'on *ordonne* le même polynôme par rapport aux puissances décroissantes de b, il deviendra

$$-6b^2+3ab-4a^2b+8a^4-5a^3.$$

Alors, le polynôme renfermant *plusieurs termes dans lesquels la puissance de la lettre principale* b *est la même*, on réunira tous ces termes en un seul, et l'on donnera au polynôme l'une des formes suivantes :

$$-6b^2+(3a-4a^2)\,b+(8a^4-5a^3)\,;$$

ou

$$-6b^2-(4a^2-3a)\,b+(8a^4-5a^3)\,;$$

ou enfin $-6b^2\begin{array}{l}-4a^2\\+3a\end{array}\Bigg|\,b\ \begin{array}{l}+8a^4\\-5a^3.\end{array}$

Dans les deux dernières formes, les multiplicateurs polynômes des puissances de b *sont eux-mêmes ordonnés* par rapport à une autre lettre, a.

Si nous convenons de représenter par les lettres A, B, C, les expressions -6, $(-4a^2+3a)$, $(8a^4-5a^3)$, le polynôme proposé sera ramené à la forme

$$Ab^2+Bb+C\,,$$

dans laquelle il n'a plus que trois termes, qui sont dissemblables.

L'avantage qu'il y a, dans la multiplication, à *ordonner* d'abord les facteurs par rapport à une même lettre, puis à ordonner de même tous les produits partiels, à mesure qu'on les obtient, consiste en ce qu'on reconnaît sans peine, dans le produit effectué, quels termes sont semblables ; ce qui facilite la RÉDUCTION *du résultat au moindre nombre de termes*.

16. *Il y a toujours dans un produit de deux polynômes, pour une même lettre, deux termes dissemblables qui ne peuvent se réduire avec aucun autre.*

En effet, lorsqu'on multiplie entre eux un terme M du multiplicande et un terme M′ du multiplicateur, renfermant une même lettre a, l'exposant de a dans le produit partiel $M\times M'$ se compose de la somme des exposants de cette lettre dans les deux facteurs M, M′.

Si donc l'exposant de a dans le terme M est *plus grand* que dans aucan autre du multiplicande, et si en même temps l'exposant de a dans le terme M′ est plus *plus grand* que dans aucun autre terme du multiplicateur, la somme des exposants de a dans les deux facteurs, c'est-à-dire l'exposant de a dans le produit $M \times M'$, aura une *plus grande* valeur que dans aucun autre produit partiel.

Le terme $M \times M'$ du produit ne se réduira donc avec aucun autre.

Si au contraire l'exposant de a dans le terme N est *moindre* que dans aucun autre terme du multiplicande, et si en même temps l'exposant de a dans le terme N' est *moindre* que dans aucun autre terme du multiplicateur, l'exposant de a dans le produit $N + N'$ aura une *moindre* valeur que dans aucun autre produit partiel.

Le terme $N \times N'$ du produit ne se réduira donc avec aucun autre.

COROLLAIRES. 1° *Un produit de facteurs polynômes ne peut pas être* MONÔME.

2° *Si les facteurs et le produit sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes, ou par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre, le premier terme du produit est le produit des premiers termes respectifs des facteurs; et le dernier terme du produit est le produit des derniers termes respectifs des facteurs.*

17. *Le carré de la* SOMME *de deux quantités se compose de la somme de leurs carrés, augmentée du double produit des deux quantités proposées.*

En effet $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ba + ab + b^2$.

donc $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Exemple: on aura

$$\begin{aligned}(3m^2n + 4mn^2)^2 &= (3m^2n)^2 + 2 \times 3m^2n \times 4mn^2 + (4mn^2)^2 \\ &= 9m^4n^2 + 24m^3n^3 + 16m^2n^4.\end{aligned}$$

Réciproquement, on aura

$$\begin{aligned}25a^4b^2 + 4a^6b^4 + 20a^5b^3 &= (5a^2b)^2 + (2a^3b^2)^2 + 2 \times 5a^2b \times 2a^3b^2 \\ &= (5a^2b + 2a^3b^2)^2.\end{aligned}$$

18. *Le carré de la* DIFFÉRENCE *de deux quantités se compose de la somme de leurs carrés, diminuée du double produit des deux quantités proposées.*

En effet, $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ba - ab + b^2$.

donc $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

19. Pour *le cube de la* SOMME *de deux quantités*, on a

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} a^3+2a^2b+\ ab^2 \\ \quad +\ a^2b+2ab^2+b^3 \end{array} \right\},$$

d'où $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Pour le *cube de la* DIFFÉRENCE *de deux quantités*, on obtient

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

20. ***Le produit de la*** **SOMME** ***de deux quantités par leur*** **DIFFÉRENCE** ***est égal à la différence des carrés des quantités proposées.***

En effet, $(a+b)(a-b) = a^2+ba-ab-b^2$,

donc $(a+b)(a-b) \qquad = a^2-b^2$.

Exemples. On aura

$$(7m^2n+3mn^2)(7m^2n-3mn^2) = 49m^4n^2-9m^2n^4.$$

Réciproquement, on aura

$$81\,a^4b^2-36a^2b^4 = (9a^2b)^2-(6ab^2)^2 = (9a^2b+6ab^2)(9a^2b-6ab^2).$$

Soit encore le polynôme $3c^2+b^2-2ab+2a^2$
à multiplier par $3c^2-b^2-2ab-2a^2$.

Il y aurait à déterminer 16 produits partiels (n° 11); mais remarquons 1° que le multiplicande est la *somme* des binômes

$$3c^2-2ab \quad \text{et} \quad b^2+2a^2;$$

2° Que le multiplicateur $3c^2-2ab-b^2-2a^2$,

ou $\qquad (3c^2-2ab)-(b^2+2a^2)$,

est égal à la *différence* des mêmes binômes.

Il en résulte que le produit demandé est égal à la différence

$$(3c^2-2ab)^2-(b^2+2a^2)^2.$$

Or, on a (n° 18)

$$(3c^2-2ab)^2 = 9c^4+4a^2b^2-12abc^2.$$

et (n° 17) $\qquad (b^2+2a^2)^2 = b^4+4a^4+4a^2b^2.$

Retranchant donc le second carré du premier, on obtient

$$9c^4-12abc^2-b^4-4a^4;$$

c'est le produit cherché, réduit au plus petit nombre de termes.

21. Plus généralement, si l'on prend pour multiplicande la suite de termes additifs homogènes

$$a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \ldots\ldots + a^2b^{m-2} + ab^{m-1} + b^m,$$

tels que le premier et le dernier soient des puissances de même degré des quantités a et b, et que dans l'intervalle les exposants de a diminuent constamment d'une unité, tandis que les exposants de b augmentent d'une unité, ce polynôme multiplié par la *différence* $a-b$ des mêmes quantités, donnera un produit égal à la différence $a^{m+1}-b^{m+1}$ des puissances de a et b dont le degré est supérieur d'une unité au degré du multiplicande.

Si, par exemple, nous multiplions

$$a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$$

par $a-b$, nous obtenons le produit

$$\left\{\begin{array}{l} a^7 + a^6b + a^5b^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + ab^6 \\ \quad - a^6b - a^5b^2 - a^4b^3 - a^3b^4 - a^2b^5 - ab^6 - b^7 \end{array}\right\},$$

qui se réduit à $a^7 - b^7$.

22. On vient de voir que $(a^1 - b^1)(a+b) = a^2 - b^2$.

Plus généralement, si l'on prend pour multiplicande la suite de termes homogènes, alternativement additifs et soustractifs,

$$a^{2m-1} - a^{2m-2}\times b + a^{2m-3}\times b^2 - \ldots\ldots - a^2b^{2m-3} + ab^{2m-2} - b^{2m-1},$$

tels que le premier et le dernier, qui sont de signes contraires, expriment, abstraction faite du signe, des puissances semblables de **degré impair** des deux quantités a et b, et que dans l'intervalle les exposants de a diminuent constamment d'une unité, tandis que les exposants de b augmentent d'une unité; ce polynôme multiplié par la *somme* $a+b$ des mêmes quantités, donnera un produit égal à la *différence* $a^{2m} - b^{2m}$ des puissances **paires** de a et b dont le degré est supérieur d'une unité au degré du multiplicande.

Ainsi, l'on a $(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)(a+b)$

$$= \left\{\begin{array}{l} a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 \\ \quad + a^3b - a^2b^2 + ab^3 - b^4 \end{array}\right\} = a^4 - b^4.$$

De même, $(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)(a+b)$

$$= \left\{\begin{array}{l} a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 \\ \quad + a^5b - a^4b^2 + a^3b^3 - a^2b^4 + ab^5 - b^6 \end{array}\right\} = a^6 - b^6$$

23. Enfin, si l'on prend pour multiplicande la suite de termes homogènes, alternativement additifs et soustractifs,

$$a^{2m} - a^{2m-1}\times b + a^{2m-2}\times b^2 - \ldots + a^2b^{2m-2} - ab^{2m-1} + b^{2m},$$

tels que le premier et le dernier, qui sont de même signe, expriment des puissances semblables de *degré* PAIR des deux quantités a et b, et que dans l'intervalle les exposants de a diminuent constamment d'une unité, tandis que les exposants de b augmentent d'une unité ; ce polynôme multiplié par la *somme* $a+b$ des mêmes quantités, donnera un produit égal à la *somme* $a^{2m+1}+b^{2m+1}$ des puissances IMPAIRES de a et b dont le degré est supérieur d'une unité au degré du multiplicande.

Ainsi l'on a

$$(a^2-ab+b^2)(a+b)=\left\{\begin{array}{l} a^3-a^2b+ab^2 \\ \quad +a^2b-ab^2+b^3 \end{array}\right\}=a^3+b^3.$$

De même, $(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)(a+b)$.

$$=\left\{\begin{array}{l} a^7-a^6b+a^5b^2-a^4b^3+a^3b^4-a^2b^5+ab^6 \\ \quad +a^6b-a^5b^2+a^4b^3-a^3b^4+a^2b^5-ab^6+b^7 \end{array}\right\}=a^7+b^7.$$

24. Quelque grand que soit le nombre des termes d'un produit de facteurs polynômes, avant la *réduction* des termes semblables, il peut arriver que le produit se réduise à un *binôme*. C'est ce qui a lieu dans les trois cas remarquables de multiplication qui viennent d'être exposés (nº 21 et suiv.)

25. Si, prenant à volonté deux nombres m, n, on forme leur double produit $2mn=a$, la différence $m^2-n^2=b$ de leurs carrés, et la somme $m^2+n^2=c$ des mêmes carrés, *on aura trois nombres* a, b, c, *tels que la somme des carrés des deux premiers sera égale au carré du troisième.*

En effet,
$$a^2=4m^2n^2$$
$$b^2=m^4+n^4-2m^2n^2$$
$$c^2=m^4+n^4+2m^2n^2$$

Donc $a^2+b^2=c^2$.

Ayant trois carrés, $A=a^2$, $B=b^2$, $C=a^2+b^2$, tels que la somme des deux premiers soit égale au troisième, si l'on forme les produits deux à deux des nombres A, B, C, savoir : $AB=A'$, $AC=B'$, $BC=C'$, et la différence $C^2-AB=D$ du carré du troisième nombre donné au produit des deux autres ;

On aura quatre nombres A′, B′, C′, D, *tels que la somme des carrés des trois premiers sera égale au carré du quatrième.*

En effet,

$$D=C^2-AB=(A+B)^2-AB=A^2+B^2+AB=a^4+a^2b^2+b^4$$
$$A'=AB=a^2b^2,\ B'=AC=a^4+a^2b^2,\ C'=BC=a^2b^2+b^4.$$

Donc

$$
\begin{array}{|lllll}
a^4 & + a^2b^2 & + b^4 & & \text{Multiplicande} \\
a^4 & + a^2b^2 & + b^4 & & \text{Multiplicateur} \\
\hline
a^8 & + a^6b^2 & + a^4b^4 & & \\
 & + a^6b^2 & + a^4b^4 & + a^2b^6 & \\
 & & + a^4b^4 & + a^2b^6 & + b^8 \\
\hline
\end{array}
$$

$$D^2 = a^8 + 2a^6b^2 + 3a^4b^4 + 2a^2b^6 + b^8$$

Et

$$
\begin{array}{ll}
A'^2 = & a^4b^4 \\
B'^2 = a^8 + 2a^6b^2 + & a^4b^4 \\
C'^2 = & a^4b^4 + 2a^2b^6 + b^8 ;
\end{array}
$$

d'où $A'^2 + B'^2 + C'^2 = a^8 + 2a^6b^2 + 3a^4b^4 + 2a^2b^6 + b^8 = D^2$.

Prenons, par exemple, $n=1$, $m=2$; d'où $a=4$, $b=3$, $c=5$. On aura $a^2+b^2=16+9=25=c^2$.

Maintenant, posons $A=16$, $B=9$, $C=25$;

d'où $A'=A\times C=400$, $B'=B\times C=225$, $C'=A\times B=144$.

On aura $C^2=625$, $D=C^2-AB=481$,

et $A'^2+B'^2+C'^2=400^2+225^2+144^2=231361=481^2=D^2$.

26. Si les facteurs P, Q, d'un produit renferment *deux lettres*, a, b, et s'ils ont été ordonnés par rapport à une lettre a, les multiplicateurs des puissances de a et le terme indépendant (n° 15) peuvent être des *polynômes* renfermant l'autre lettre b.

Qu'on ait, par exemple, les facteurs P, Q, ramenés à la forme

$P=Aa^2+Ba+C$, $\quad Q=A'a+B'$; le produit sera

$$P\times Q = \left\{ \begin{array}{l|l|l} A\times A'\,a^3 + B\times A' & a^2 + CA' & a \\ + A\times B' & + B\times B' & + C\times B' \end{array} \right\}.$$

On considérera ici le multiplicande P comme composé de trois termes seulement (n° 15), et le multiplicateur Q comme composé de deux termes. Les lettres A, B, C, A', B', peuvent désigner des polynômes renfermant b.

Dans ce cas, pour former les multiplicateurs polynômes des puissances de a dans le produit $P\times Q$, et le terme indépendant $C\times B'$, on aura d'abord à effectuer des multiplications partielles entre des polynômes A, B, C, A', B', qui ne renferment qu'*une seule* lettre b. Pour cela, on ordonne A, B, C, A', B', par rapport à la lettre b : les coefficients des puissances de b, ainsi que les termes indépendants de b, sont des *nombres* connus. Les calculs ne présentent alors aucune difficulté.

Si les facteurs P, Q, contiennent *trois lettres*, les polynômes A, B, C, A′, B′, renferment seulement deux lettres b, c, par exemple. Dans ce cas, pour former les multiplicateurs polynômes des puissances de a et le terme indépendant de a, dans le produit $P \times Q$, on aura d'abord à effectuer des multiplications partielles entre des polynômes qui ne renferment que *deux lettres*; et nous venons de montrer comment on peut obtenir les résultats de ces opérations.

De même, la multiplication de facteurs P, Q, renfermant *quatre lettres*, dépendrait d'une série de multiplications partielles entre des polynômes ne renfermant pas plus de *trois lettres*; et ainsi de suite.

On pourra donc calculer le produit de facteurs P, Q, renfermant un nombre quelconque de lettres, à l'aide de multiplications partielles entre des polynômes qui renfermeront une lettre de moins que les facteurs proposés.

Nous allons appliquer cette méthode générale à un exemple.

Soient le multiplicande

$$P=(2b-3c)\,a^2+(4b^2-12bc+9c^2)\,a+(8b^3-12b^2c+18bc^2-27c^3),$$

et le multiplicateur

$$Q=(2b+3c)\,a-4b^2+9c^2.$$

On a $A=2b-3c,\ B=4b^2-12bc+9c^2,\ C=8b^3-12b^2c+18bc^2-27c^3$
$A'=2b+3c,\ B'=-4b^2+9c^2.$

Faisons d'abord à part les multiplications des polynômes A, B, C, par chacun des polynômes A′, B′.

1re Multiplication partielle.

$$\begin{array}{rl} A = & 2b - 3c \\ A' = & 2b + 3c \\ \hline & \left\{\begin{array}{l} 4b^2 - 6bc \\ \qquad\ + 6bc - 9c^2 \end{array}\right. \\ \hline A \times A' = & 4b^2 - 9c^2 \quad (\text{n}^\circ\ 20). \end{array}$$

2e Multiplication partielle.

$$\begin{array}{rl} B = & 4b^2 - 12bc + 9c^2 \\ A' = & 2b + 3c \\ \hline & \left\{\begin{array}{l} 8b^3 - 24b^2c + 18bc^2 \\ \qquad\quad + 12b^2c - 36bc^2 + 27c^3 \end{array}\right. \\ \hline B \times A' = & 8b^3 - 12b^2c - 18bc^2 + 27c^3 \end{array}$$

3e Multiplication partielle.

$$\begin{array}{rl} C = & 8b^3 - 12b^2c + 18bc^2 - 27c^3 \\ A' = & 2b + 3c \\ \hline & 16b^4 - 24b^3c + 36b^2c^2 - 54bc^3 \\ & \quad + 24b^3c - 36b^2c^2 + 54bc^3 - 81c^4 \\ \hline C \times A' = & 16b^4 - 81c^4 \end{array}$$

4e Multiplication partielle.

$$\begin{array}{rl} A = & 2b - 3c \\ B' = & -4b^2 + 9c^2 \\ \hline A \times B' = & \left\{ \begin{array}{l} -8b^3 + 12b^2c \\ \qquad + 18bc^2 - 27c^3 \end{array} \right. \end{array}$$

5e Multiplication partielle.

$$\begin{array}{rl} B = & 4b^2 - 12bc + 9c^2 \\ B' = & -4b^2 + 9c^2 \\ \hline & -16b^4 + 48b^3c - 36b^2c^2 \\ & \qquad + 36b^2c^2 - 108bc^3 + 81c^4 \\ \hline B \times B' = & -16b^4 + 48b^3c - 108bc^3 + 81c^4 \end{array}$$

6e Multiplication partielle.

$$\begin{array}{rl} C = & 8b^3 - 12b^2c + 18bc^2 - 27c^3 \\ B' = & -4b^2 + 9c^2 \\ \hline & -32b^5 + 48b^4c - 72b^3c^2 + 108b^2c^3 \\ & \qquad + 72b^3c^2 - 108b^2c^3 + 162bc^4 - 243c^5 \\ \hline C \times B' = & -35b^5 + 48b^4c + 162bc^4 - 243c^5 \end{array}$$

On voit, par les résultats de ces calculs, que la somme des produits $B \times A'$, $A \times B'$, est nulle, de sorte que le produit $P \times Q$ ne renfermera pas la deuxième puissance de a. D'ailleurs la somme $C \times A' + B \times B'$ se réduit à $48b^3c - 108bc^3$. On aura donc enfin

$$\begin{aligned} P \times Q &= (4b^2 - 9c^2)\, a^3 + (48b^3c - 108bc^3)a \\ &\qquad -32b^5 + 48b^4c + 162bc^4 - 243c^5 \\ &= (4b^2 - 9c^2)\, a^3 + 12bc\,(4b^2 - 9c^2)\, a \\ &\qquad + 6bc\,[(2b)^3 + (3c)^3] - [(2b)^5 + (3c)^5]. \end{aligned}$$

Mais l'on peut se dispenser d'effectuer à part les multiplications partielles, et l'on abrége ordinairement les calculs, en adoptant la disposition suivante :

Multiplicande.	$2b$ $-3c$	$a^2 + 4b^2$ $-12bc$ $+ 9c^2$	$a + 8b^3$ $- 12^2c$ $+ 18bc^2$ $- 27c^3$		
Multiplicateur.	$2b$ $+3c$	$a - 4b^2$ $+ 9c^2$			
Produit du multiplicande par $(2b + 3c)a$.	$4b^2$ $-6bc$ $+6bc$ $-9c^2$	$a^3 + 8b^3$ $-24b^2c$ $+18bc^2$ $+12b^2c$ $-36bc^2$ $+27c^3$	$a^2 + 16b^4$ $- 24b^3c$ $+ 36b^2c^2$ $- 54bc^3$ $+ 24b^3c$ $- 36b^2c^2$ $+ 54bc^3$ $- 81c^4$	a	
Produit du multiplicande par $- 4b^2 + 9c^2$.		$- 8b^3$ $+12b^2c$ $+18bc^2$ $-27c^3$	$- 16b^4$ $+ 48b^3c$ $- 36b^2c^2$ $+ 36b^2c^2$ $-108bc^3$ $+ 81c^4$		$- 32b^5$ $+ 48b^4c$ $- 72b^3c^2$ $+108b^2c^3$ $+ 72b^3c^2$ $-108b^2c^3$ $+162bc^4$ $-243c^5$
Produit total simplifié.	$4b^2$ $-9c^2$	a^3.	$+ 48b^3c$ $-108bc^3$	a	$- 32b^5$ $+ 48b^4c$ $+162bc^4$ $-243c^5$

DIVISION.

27. Lorsqu'un terme algébrique ne renferme aucun diviseur, ni en nombre, ni en lettres, on dit que ce terme est *entier*.

Le monôme $5a^3b^2c$ est *entier*. Les expressions $\frac{2}{5}a^3b^2c$ ou $\frac{2a^3b^2c}{5}$, $\frac{3a^2b}{2c}$, ne sont pas entières; ce sont des *fractions algébriques*.

On dit qu'*un polynôme est* ENTIER, lorsque tous les termes de ce polynôme sont *entiers*.

Dans la division des monômes et des polynômes, nous nous proposerons d'abord de trouver, lorsque cela est possible, un monôme *entier*, ou un polynôme *entier* et composé d'un *nombre limité* de termes, qui soit tel que le produit de ce monôme ou de ce polynôme par le diviseur proposé, soit égal au dividende. Lorsque cette condition pourra être remplie, nous dirons que la division proposée *s'est faite exactement*, ou que le dividende est *divisible* par le diviseur proposé.

28. Division des monômes. *Un monôme entier est* DIVISIBLE *par un*

autre monôme entier, si le coefficient du dividende est divisible par le coefficient du diviseur; si, de plus, toutes les lettres du diviseur entrent dans le dividende, et si enfin l'exposant d'aucune lettre n'est plus fort dans le diviseur que dans le dividende.

Pour former le quotient, *divisez le coefficient du dividende par le coefficient du diviseur: à la suite du quotient numérique obtenu, placez comme facteurs les lettres communes aux deux monômes proposés et affectées d'exposants inégaux, en donnant à chacune de ces lettres un exposant égal à la* DIFFÉRENCE *des exposants dont elle était affectée; enfin écrivez les lettres qui n'entrent que dans le dividende, en conservant les exposants qu'elles ont.*

Quant aux lettres communes affectées d'exposants égaux dans les deux termes proposés, elles ne paraitront pas dans le quotient.

Soit, par exemple, le monôme $65a^6b^4c^2d$ à diviser par $5a^4bc^2$. Le coefficient 65 est divisible par 5, et l'on a $\frac{65}{5}=13$; $65=13\times 5$.

Nous disons que le monôme entier $\frac{65}{5}\,a^{6-4}\times b^{4-1}\times d$, ou $13a^2b^3d$, sera le quotient cherché.

En effet, on a (nº 8)

$$13a^2b^3d\times 5a^4bc^2=13\times 5a^{2+4}\times b^{3+1}\times c^2d=65a^6b^4c^2d.$$

29. Pour que le quotient de monômes entiers, soit *entier*, IL FAUT 1º *que le coefficient du dividende soit divisible par le coefficient du diviseur*; car le coefficient n du dividende ou produit donné, devant être (nº 8) le produit du coefficient n' du diviseur ou facteur donné, par le coefficient n'' du quotient ou facteur cherché, il faudra qu'on ait $n'\times n''=n$, d'où $n''=\frac{n}{n'}$. Le coefficient n'' du quotient ne pourra donc pas être un nombre entier, à moins que n ne soit divisible par n'.

Il faut 2º *que toutes les lettres du diviseur entrent dans le dividende.* Car, si l'on suppose le quotient *entier*, toutes les lettres qui entrent dans le diviseur se retrouvent nécessairement dans le *produit du diviseur par le quotient*; c'est-à-dire qu'elles se retrouvent toutes dans le dividende.

Il faut 3º *que l'exposant d'aucune lettre ne soit plus fort dans le diviseur que dans le dividende.* Car si l'on suppose le quotient *entier*, et que l'on considère dans le diviseur un facteur de la forme a^n, ce facteur se retrouve nécessairement dans le *produit du diviseur par* *le quotient*, c'est-à-dire dans le *dividende*. Le dividende renfermera donc la lettre a affectée d'un exposant tout au moins égal à n.

Si l'une de ces trois conditions nécessaires, et d'ailleurs suffisantes (n° 28), n'est pas remplie, le quotient sera exprimé par une *fraction algébrique*. On aura, par exemple, $2a^3b^2c : 3a^2b = \frac{2}{3}abc = \frac{2abc}{3}$.

30. DIVISION DES POLYNÔMES. Pour former le quotient, *ordonnez le dividende et le diviseur par rapport aux puissances décroissantes, ou aux puissances croissantes d'une même lettre. Divisez le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; vous obtiendrez un quotient partiel, qui sera le premier terme du quotient cherché. Multipliez le diviseur par ce terme du quotient, et retranchez le produit du dividende proposé. Considérez le reste de cette soustraction comme un nouveau dividende, dont vous diviserez le premier terme par le premier terme du diviseur pour avoir un quotient partiel qui sera le second terme du quotient. Multipliez le diviseur par ce second terme et retranchez le produit du dividende correspondant. Considérez le reste de cette seconde soustraction comme un nouveau dividende.*

En continuant ainsi, vous obtiendrez successivement les termes du quotient ordonné de la même manière que le dividende et le diviseur.

Polynômes où il n'entre qu'une lettre.

31. Pour justifier cette règle, considérons d'abord un dividende A et un diviseur B qui ne renferment qu'*une seule lettre x*.

Il s'agit de déterminer, s'il est possible, un polynôme Q tel qu'on ait $A = B \times Q$.

Concevons les trois polynômes A, B, Q, ordonnés par rapport aux *puissances décroissantes* de x.

On connait les polynômes,

$$A = a + b + c + \ldots. + z, \quad B = a' + b' + \ldots. + z'$$

dans lesquels les coefficients de tous les termes sont des *nombres* connus, puisque A et B ne renferment pas d'autre lettre que x.

Le polynôme $Q = a'' + b'' + c'' + \ldots. + z''$ est inconnu.

Je dis en premier lieu que, *S'il existe un polynôme Q, entier et formé d'un nombre limité de termes, tel que le produit $B \times Q$ soit égal à A, la règle énoncée* (n° 30) *fera trouver les termes a'', b'', c'',... z'' de ce polynôme Q.*

En effet, puisqu'on suppose les trois polynômes, A, B, Q, ordonnés par rapport à x, *le premier terme* a *du produit* A *est le produit des premiers termes*, a', a'' *de* B *et de* Q (nº 16). On a donc $a=a'\times a''$, et $a''=\frac{a}{a'}$ Par conséquent, le quotient a'' obtenu en effectuant la première division partielle entre les monômes a, a', est bien le premier terme du quotient exact Q.

D'ailleurs, on a

$$A=B\times Q=B\,(a''+b''+c''+\ldots+z'')=Ba''+B\,(b''+c''+\ldots+z''),$$

d'où $A-Ba''=B\,(b''+c''+\ldots+z'')$.

Donc, le *premier reste* $A'=A-Ba''$ est le produit du diviseur B par la somme de tous les termes encore inconnus du quotient.

Si le reste A' était nul, on aurait $A=Ba''$, donc $Q=a''$, et l'opération serait terminée. Mais supposons que A' ne soit pas nul, et qu'on ait ordonné A' par rapport aux puissances décroissantes de x. *Le premier terme de* A' *sera le produit du premier terme de* B *par le premier terme* b'' *du polynôme* $b''+c''+z''$. Donc, lorsqu'on divise le premier terme de A' par le premier terme a' du diviseur, le quotient monôme qu'on obtient est le second terme b'' du quotient cherché Q.

Or on a $A'=Bb''+B\,(c''+\ldots.+z'')$. Donc $A'-Bb''=B\,(c''+\ldots+z'')$. Par conséquent, lorsqu'on a formé le produit Bb'' et qu'on l'a retranché du premier reste A', le second reste $A''=A'-Bb''$ est le produit du diviseur B par la somme $c''+\ldots+z''$ des termes encore inconnus du quotient.

On fera pour le nouveau dividende partiel A'', les mêmes raisonnements que pour les dividendes précédents A, A', et ainsi de suite. Il en résulte qu'*en divisant constamment le premier terme de chacun des dividendes partiels successifs par le premier terme* a' *du diviseur* B, *l'on obtient une suite de quotients monômes*, a'', b'', c'',.... z'', *qui sont les termes du quotient exact* Q. Enfin, lorsque par les soustractions successives on a retranché du polynôme A, tous les produits partiels Ba'', Bb'', Bc'',..., Bz'', dont il était composé, on parvient à un *dernier reste* qui est nul; et l'opération est terminée.

Réciproquement, *Si l'opération se termine*, c'est-à-dire, *si, après avoir obtenu un certain nombre de termes* a'', b'', c''...z'' *au quotient, et après avoir soustrait les produits* Ba'', Bb''.... Bz'', *on parvient à un reste nul*, il est clair que le polynôme entier $a''+b''+c''\ldots+z''=Q$ est la vraie valeur du quotient $\frac{A}{B}$. Car on a

$$A=Ba''+A'=Ba''+(Bb''+A'')=Ba''+Bb''+(Bc''+A''')=\text{etc};$$

d'où $$A = B(a'' + b'' + c'' + \ldots + z'') = B \times Q.$$

32. Les termes du dividende et du diviseur n'étant pas, en général, tous positifs, il est nécessaire, pour pouvoir appliquer la règle de division, de savoir lequel des signes $+$, $-$, doit être placé au devant de chaque quotient monôme partiel.

Voici la règle à suivre :

1° *Le quotient de deux monômes de* MÊME SIGNE *est toujours affecté du signe* $+$, quel que soit le signe commun au dividende et au diviseur ;

2° *Le quotient de deux monômes de* SIGNES CONTRAIRES *est toujours affecté du signe* $-$.

Telle est la *règle des signes* dans la division. On est convenu de l'exprimer encore de la manière suivante :

$$\begin{array}{c|c} + : + \text{ donne } + & + : - \text{ donne } - \\ - : - \text{ donne } + & - : + \text{ donne } - \end{array}$$

Considérons en effet un quotient partiel $a'' = \frac{a}{a'}$; on connaît les monômes a, a' et les *signes* dont ils sont affectés. Ainsi l'on connaît le signe d'un produit a, et le signe de l'un des facteurs a'. On découvrira le signe de l'autre facteur a'', au moyen de la *règle des signes* établie dans la multiplication.

Or, si a et a' sont *positifs*, le produit positif a résulte de la multiplication de deux facteurs de *même signe*. Mais le facteur a' est affecté du signe $+$; donc le facteur a'' doit être affecté du signe $+$.

Si a et a' sont *négatifs*, le produit négatif a résulte de la multiplication de deux facteurs de *signes contraires*. Mais le facteur a' est affecté du signe $-$; donc le facteur a'' doit être affecté du signe $+$.

Si a étant positif, a' est négatif, le facteur a'' aura le signe $-$, parce qu'il doit être affecté du *même signe* que le facteur a'.

Enfin, si a étant négatif, a' est positif, le facteur a'' aura le signe $-$; car il doit être affecté d'un *signe contraire* à celui du facteur a', puisque le produit est affecté du signe $-$.

33. Pour donner un exemple de la *division qui se fait exactement*, formons le produit A dont les facteurs sont

$$\begin{array}{l} B = 8x^3 - 4x^2 + 2x - 1 \\ Q = 9x^2 + 3x + 1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 72x^5 & -36 \,x^4 & +18 \,x^3 & -9\,x^2 & \\ & +24 & -12 & +6 & -3 \,x \\ & & +8 & -4 & +2 \quad -1 \end{array}\right.$$

Nous trouvons $A = 72x^5 - 12\,x^4 + 14\,x^3 - 7\,x^2 - x - 1.$

Si donc nous donnons pour dividende le produit A et pour diviseur le facteur B, on devra obtenir un quotient *entier* exact.

	Dividende A.	Diviseur B.
	$72x^5-12x^4+14x^3-7x^2-x-1$	$8x^3-4x^2+2x-1$
	$-72x^5+36x^4-18x^3+9x^2$	$9x^2+3x+1$
1er reste. $A'=$	$24x^4-4x^3+2x^2-x-1$	
	$-24x^4+12x^3-6x^2+3x$	
2e reste. $A''=$	$8x^3-4x^2+2x-1$	
	$-8x^3+4x^2-2x+1$	
3e reste. $A'''=$	0	

Le dividende et le diviseur étant ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, on divise d'abord le premier terme $a=72x^5$ du dividende, par le premier terme $a'=8x^3$ du diviseur.

On a $\frac{+72x^5}{+8x^3}=+9x^2$. Ainsi, le premier terme du quotient est $9x^2=a''$.

Pour former plus rapidement le *reste* qu'on obtiendrait en retranchant du dividende A le produit du diviseur B par le terme $9x^2$, on change les signes des produits partiels à mesure qu'on forme ces produits, et l'on écrit, par ordre, au-dessous du dividende, ces produits ainsi modifiés. Il est clair, en effet, qu'on arrive au même résultat que si, après avoir effectué à part le produit $B\times 9x^2$, on transcrivait à côté de A les termes de $B\times 9x^2$ *changés de signe* en vertu de la règle de la soustraction.

On dit $(+8x^3)\times(+9x^2)$ donne $72x^5$, et pour *soustraire*, $-72x^5$. On écrit $-72x^5$ au-dessous du terme qui lui est semblable dans A.

De même, $(-4x^2)\times(9x^2)$ donne $-36x^4$, et pour *soustraire*, $+36x^4$. On écrit $+36x^4$ au-dessous du terme qui lui est semblable dans A.

De même encore, $+2x\times+9x^2$ donne $+18x^3$, et pour *soustraire*, $-18x^3$.

Enfin, $-1\times 9x^2$ donne $-9x^2$, et pour *soustraire*, $+9x^2$. Alors, le *premier reste* $A'=A-Ba''$ est formé.

Mais, parce qu'il renferme des termes semblables, on procède à la *réduction*, et l'on trouve

$$A'=24x^4-4x^3+2x^2-x-1.$$

On opère d'une manière analogue sur le dividende A'. On obtient un second terme $+3x$ au quotient, et un second reste

$$A''=8x^3-4x^2+2x-1,$$

qu'on prend encore pour dividende; ce qui conduit à la valeur d'un troisième terme $+1$ du quotient. Enfin, le troisième reste A''' est nul, de sorte que l'opération est terminée.

34. Dans la pratique, on abrége, en remarquant que le produit du premier terme du diviseur par le terme du quotient actuellement employé comme multiplicateur, est identique avec le premier terme du dividende partiel correspondant; de sorte que, par la soustraction, ce premier terme de dividende est nécessairement détruit. En conséquence, il suffit de *barrer* le premier terme du dividende partiel, au moment de la soustraction.

De plus, on *barre* les termes semblables, après la réduction, et l'on se dispense de transcrire les termes du dividende pour lesquels il n'y a pas de réduction.

35. Je dis maintenant que *s'il n'existe pas de polynôme entier qui, multiplié par* B, *puisse reproduire le dividende* A, *et qu'on applique aux polynômes* A, B, *les règles de la division, l'impossibilité de la division exacte sera mise en évidence parce qu'on parviendra toujours à un reste ou dividende partiel dont le premier terme ne sera pas divisible par le premier terme du diviseur.*

En effet, accordons d'abord que, dans la suite des dividendes dont le degré par rapport à x n'est pas inférieur à celui du diviseur, le premier terme de chaque dividende soit divisible par le premier terme du diviseur; sans quoi l'impossibilité de la division proposée serait déjà évidente.

En continuant les calculs, on parviendra à un reste de degré moindre que B, par rapport à x. Car, après chaque soustraction, le premier terme de chaque dividende partiel est détruit (n° 34). Donc les degrés des dividendes successifs ou des restes, vont en diminuant au moins d'une unité, tandis que le degré du diviseur B est invariable.

Dès qu'un reste est de degré moindre que le diviseur, si ce reste est nul, on a un quotient entier exact, ce qui est contraire à l'hypothèse actuelle. On arrivera donc à un reste différent de zéro, et d'un degré moindre que celui du diviseur. On en conclura que la division exacte est impossible, c'est-à-dire, qu'il n'existe pas de quotient *entier*. Car autrement, le premier terme de ce reste, divisé par le premier terme du diviseur, qui est d'un degré plus élevé, devrait donner un terme *entier* du quotient exact, ce qui est impossible (n° 29.)

La proposition réciproque est évidente. *Si le premier terme d'un dividende partiel n'est pas divisible par le premier terme du diviseur*, soit parce que l'un des coefficients n'est pas divisible par l'autre, soit parce que le degré du dividende partiel est inférieur au degré du diviseur, *la division exacte de* A *par* B *est impossible.* Car autrement, la division partielle que nous supposons impossible, devrait donner un terme *entier* du quotient (n° 31), ce qui est absurde.

Voici un exemple d'une division qui ne peut se faire exactement.

$$\begin{array}{l|l}
\text{Dividende A.} & \text{Dividende B.} \\
x^6 + 2x^5 \ldots\ldots + 3x^2 + 4x + 6 & x^3 - x + 2 \\
\hline
\quad + x^4 - 2x^3 & x^3 + 2x^2 + x \\
\qquad + 2x^3 - 4x^2 & \\
\qquad\quad + x^2 - 2x & \\
\hline
\text{Reste} \qquad 2x + 6 &
\end{array}$$

Le polynôme $Q = x^3 + 2x^2 + x$ n'est pas égal au quotient $\frac{A}{B}$.

Mais en désignant par R le reste de degré moindre que B, on a

$$A = B \times Q + R; \quad \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

Ainsi, pour *compléter* la vraie valeur du quotient, il faudra ajouter à la partie entière Q, une fraction algébrique $\frac{R}{B}$, dont le dividende ou numérateur R est égal au dernier reste de la division, et dont le diviseur ou dénominateur B est le diviseur proposé.

36. Dans ce qui précède, nous avons supposé les termes A, B, ordonnés par rapport aux *puissances* DÉCROISSANTES de la lettre x qu'ils renferment.

Si l'on ordonne A, B, par rapport aux *puissances* CROISSANTES de x, et que, par hypothèse, *il existe un quotient exact* Q, on obtiendra, en suivant la règle de la division, tous les termes de Q, ordonnés de même que A et B.

La démonstration est absolument la même qu'au n° 31, et se fonde sur ce que *deux facteurs et leur produit étant ordonnés, le premier terme du produit est égal au produit des premiers termes des facteurs.*

RÉCIPROQUEMENT, *Si, lorsqu'on a ordonné par rapport aux puissances croissantes de* x, *les polynômes*

$$\begin{aligned} A &= a + b + c + \ldots\ldots + z, \\ B &= a' + b' + c' + \ldots\ldots + z'; \end{aligned}$$

il arrive que l'opération se termine, c'est-à-dire, si, après avoir obtenu un certain nombre de quotients partiels a'', b'', c'',..., z'', *et après avoir soustrait les produits* Ba$''$, Bb$''$,..., Bz$''$, *on parvient à un* RESTE NUL, il est clair que le polynôme entier

$$a''+b''+c''...\ z''=\mathrm{Q},$$

dont le nombre de termes est limité, est la vraie valeur du quotient $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$. Car on a

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}a''+\mathrm{A}'=\mathrm{B}a''+(\mathrm{B}b''+\mathrm{A}'')=\mathrm{B}a''+\mathrm{B}b''+\mathrm{B}c''+\mathrm{A}'''=\text{etc.};$$

d'où $$\mathrm{A}=\mathrm{B}(a''+b''+c''+...+z'')=\mathrm{B}\times\mathrm{Q}.$$

Mais, SI LA DIVISION DE A PAR B EST IMPOSSIBLE, nous ne pouvons plus affirmer, comme au n° 35, que l'on doive parvenir à un dividende partiel dont le premier terme ne soit pas divisible par le premier terme du diviseur ; car, au contraire, *il peut arriver que les divisions partielles se fassent toujours exactement et donnent une série illimitée de termes entiers.*

Cela aura lieu, par exemple, si B renferme un terme indépendant de x, et égal à l'unité.

Qu'on ait $\mathrm{A}=x^2+4x+1$, $\mathrm{B}=x^2-2x+1$.

Dividende.	Diviseur.
x^2+4x+1	x^2-2x+1
$-x^2+2x-1$	1
reste $6x$	

	Dividende.	Diviseur.
	$1+4x+x^2$	$1-2x+x^2$
	$-1+2x-x^2$	$1+6x+12x^2$
1er reste	$6x$	$+\text{etc.}$
	$-6x+12x^2-6x^3$	
2e reste	$12x^2-6x^3$	
	$-12x^2+24x^3-12x^4$	
3e reste	$18x^3-12x^4$	
	....	

Si l'on ordonne A et B en décroissant, on obtient pour premier terme du quotient le nombre 1, indépendant de x, et pour reste le monôme $6x$, dont le degré est inférieur au diviseur. La division de A par B ne peut donc pas donner un quotient *entier* exact. Le vrai quotent est $1+\frac{6x}{x^2-2x+1}$.

Mais si l'on ordonne A et B en croissant, il est clair que la division du premier terme de chaque dividende partiel par le premier terme 1 du diviseur, sera toujours possible, et l'on pourra obtenir autant de termes entiers du quotient qu'on le voudra, sans que la division soit jamais terminée. Car, si l'on parvenait à un reste nul, il y aurait un polynôme entier Q, formé d'un *nombre limité* de termes, qui donnerait $B \times Q = A$. Donc, en ordonnant A et B, par rapport aux puissances décroissantes de x, on aurait obtenu par la division, ce polynôme Q ordonné aussi en décroissant; ce qui n'est pas.

Il faut donc établir un autre caractère auquel on puisse reconnaître l'impossibilité de la division, lorsque les polynômes A et B ont été ordonnés en croissant.

37. *S'il n'existe pas de polynôme qui, multiplié par le diviseur* B, *reproduise le dividende* A, *et qu'ayant ordonné* A *et* B *par rapport aux puissances* CROISSANTES *de la lettre* x, *on applique les règles de la division, l'impossibilité de la division deviendra évidente lorsqu'on aura été conduit à poser au quotient un terme dans lequel l'exposant de* x *surpasse la différence des exposants de cette lettre dans le dernier terme de* A *et dans le dernier terme de* B.

En effet, accordons d'abord que, dans les premières divisions partielles, le premier terme du dividende ait été divisible par le premier terme du diviseur, sans quoi l'impossibilité de la division exacte serait déjà évidente.

Après chacune des soustractions dans lesquelles on retranche du dividende le produit du diviseur par le quotient partiel obtenu, le premier terme du dividende partiel est détruit. Donc les degrés des dividendes successifs ou des restes vont en augmentant au moins d'une unité, tandis que le degré du diviseur est invariable; et aucun des restes n'est nul, car autrement la division serait possible (nº 36), ce qui est contraire à l'hypothèse actuelle.

Il suit de là que les quotients partiels successifs sont d'un degré de plus en plus élevé, par rapport à x. On sera donc conduit, après un nombre limité de divisions, à un *quotient partiel dans lequel l'exposant de* x *sera plus grand que la différence des exposants de* x *dans le dernier terme du dividende* A *et dans le dernier terme du diviseur* B.

Or, toutes les fois qu'on parvient à un quotient partiel qui présente ce caractère, *l'impossibilité de la division proposée devient évidente;* car la puissance de x, dans le produit de ce quotient partiel par le dernier terme z' du diviseur B, sera plus élevée que la puissance de x dans le dernier terme z du dividende A; donc, à plus forte raison, la puissance de x dans les produits de z' par chacun des quotients partiels qu'on obtiendrait ultérieurement, serait *plus élevée que la puissance de* x *dans le dernier terme* z *du dividende.*

On reconnaît donc alors que la vraie valeur du quotient $\frac{A}{B}$ *ne* *pourra pas être exprimée par un nombre limité de termes entiers;* car, si cela se pouvait, en désignant par z'' le dernier quotient partiel, on aurait nécessairement $z' \times z'' = z$ (n° 16); ce qui n'est pas.

Dans l'exemple précédent, l'impossibilité de la division de $1 + 4x + x^2$ par $1 - 2x + x^2$, devient évidente après la deuxième division qui a donné le quotient partiel $6x$; car le produit $6x \times z' = 6x \times x^2$ est déjà d'un *degré supérieur à celui du dernier terme* x^2 *du dividende.* Il en serait de même, à plus forte raison, des produits de z' ou x^2 par les quotients partiels ultérieurs $12x^2$, etc.

On ne pourra donc pas avoir au quotient un *dernier terme* z'' dont le produit par z' ou x^2 soit égal au dernier terme x^2 du dividende.

Lorsque la division ne se termine pas, si l'on désigne par Q l'ensemble des termes entiers obtenus au quotient, et par R le reste correspondant, on aura

$$A = B \times Q + R; \quad \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

Ainsi on *complétera* la vraie valeur du quotient $\frac{A}{B}$, en ajoutant à la partie entière Q, une fraction algébrique $\frac{R}{B}$, dont le dividende ou numérateur est égal au dernier reste obtenu, et dont le diviseur ou dénominateur est le diviseur proposé B. On trouve ainsi que

$$\frac{1+4x+x^2}{1-2x+x^2} = 1 + \frac{6x}{1-2x+x^2} = 1 + 6x + \frac{12x^2-6x^3}{1-2x+x^2}$$
$$= 1 + 6x + 12x^2 + \frac{18x^3-12x^4}{1-2x+x^2} \text{ etc.}$$

Polynômes qui renferment plus d'une lettre.

38. Le cas où le dividende A et le diviseur B ne renferment pas plus d'*une lettre*, va servir à démontrer la *règle de la division* (n° 30) dans le cas où A et B peuvent renfermer *deux lettres*. On en déduira que la règle est applicable au cas où A et B peuvent renfermer *trois lettres*, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des lettres. La règle sera donc générale.

Les termes A et B pouvant renfermer deux lettres, x, x', concevons ces polynômes ordonnés par rapport aux puissances *décroissantes* de x. On aura $A = a + b + c + ... + z$, $B = a' + b' + c' + ... + z'$; les lettres $a, b, .. z, a', b', ... z'$ représentant des termes dans lesquels les multiplicateurs monômes ou polynômes des puissances de x ne pourront renfermer que la lettre x' et des *nombres* connus.

Nous avons vu comment on obtient le quotient $a''=\frac{a}{a'}$, lorsque les multiplicateurs des puissances de x, dans les termes a, a', renferment une lettre au plus.

Raisonnant comme au n° 31, on conclura que a'' est le *premier terme* du quotient, c'est-à-dire le terme du quotient qui renferme *la plus haute puissance de x*; le multiplicateur de cette puissance de x pouvant d'ailleurs être monôme ou polynôme.

Formant le produit $\mathrm{B}a''$, et le retranchant de A, on aura un reste $\mathrm{A}'=\mathrm{A}-\mathrm{B}a''$, qui sera le produit du diviseur B par la somme des termes encore inconnus du quotient. On sera conduit à diviser le premier terme de A′ par le premier terme de B, pour obtenir le *second terme* du quotient. Or, on saura effectuer cette division, puisque, dans ces premiers termes, les multiplicateurs monômes ou polynômes des puissances de x ne peuvent renfermer au plus, que la lettre x'.

On déterminera ainsi successivement tous les termes du quotient, et la division *sera effectuée exactement* si l'on parvient à un *reste nul*.

Mais si l'on parvient à un dividende partiel dont le premier terme ne soit pas divisible par le premier terme du diviseur, soit parce que le multiplicateur de la puissance de x dans le dividende n'est pas divisible par le multiplicateur de la puissance de x dans le diviseur, soit parce que le degré du dividende partiel est inférieur au degré du diviseur, on saura que la *division exacte de* A *par* B *est impossible* (n° 35), et l'on aura $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\mathrm{Q}+\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}}$.

Si l'on ordonne A et B par rapport aux puissances *croissantes* de x, on déterminera, de même qu'au n° 36, les termes du quotient ordonné en croissant par rapport à x.

Si l'on obtient un *reste nul*, la division sera terminée. On reconnaîtra au contraire que *la division est impossible*, si la suite des calculs amène au quotient un terme dans lequel l'exposant de x soit plus fort que la différence des exposants de x dans le dernier terme de A et dans le dernier terme de B (n° 37).

39. Dans le cas où A et B peuvent renfermer *trois lettres*, les multiplicateurs des puissances de x dans les termes a, a', etc., ne peuvent renfermer au plus que *deux lettres*. On saura donc effectuer les *divisions partielles* qui servent à déterminer les termes du quotient. On obtiendra donc le quotient $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, lorsque la division sera possible,

ou bien, l'on s'assurera de l'impossibilité de la division exacte.

Dans le cas où A et B peuvent renfermer *quatre lettres*, on sera conduit, pour obtenir successivement les termes du quotient, à effectuer des divisions auxiliaires sur des monômes ou des polynômes renfermant *trois lettres* au plus, ce qu'on sait faire.

En résumé, la détermination du quotient de A par B, quel que soit le nombre des lettres, est ramenée à la détermination du quotient de deux quantités algébriques entières M et N, qui renferment une lettre de moins. On sait donc faire la division dans tous les cas, parce qu'on sait la faire quand les deux termes ne renferment pas plus d'une lettre.

40. Dans l'exemple suivant, les termes A, B, renfermeront *trois lettres*, x, y, z. Nous ordonnerons par rapport aux puissances décroissantes de x; et, parce que les *coefficients* ou *multiplicateurs* des puissances de x sont *polynômes* et renferment plus d'une lettre, nous ordonnerons ces coefficients eux-mêmes par rapport à une lettre, y.

Nous aurons

$$A=(4y^2-9z^2)x^3+(48y^3z-108yz^3)x+(-32y^5+48y^4z+162yz^4-243z^5);$$
$$B=(2y-3z)\,x^2+(4y^2-12yz+9z^2)x+(8y^3-12y^2z+18yz-27z^3).$$

Le dividende A est considéré, dans cette forme, comme ayant *trois* termes, a, b, c, savoir, un terme en x^3, un terme en x à la première puissance, et UN TERME *indépendant de* x.

Le diviseur B est de même considéré comme ayant *trois* termes, a', b', c', savoir, un terme en x^2, un terme en x à la première puissance, et UN TERME *indépendant de* x.

1re Division partielle.

$$\begin{array}{r|l} 4y^2 \qquad -9z^2 & 2y-3z \\ \cline{2-2} -4y^2+6yz \qquad\quad & 2y+3z \\ \cline{1-1} \text{1}^{\text{er}}\text{ reste} \quad 6yz-9z^2 & \\ -6yz+9z^2 & \\ \cline{1-1} \text{2}^{\text{e}}\text{ reste} \qquad 0 & \end{array}$$

Pour avoir le premier terme a'' du quotient, on effectue à part la division de a par a'. On a

$$\frac{a}{a'}=\frac{(4y^2-9z^2)x^3}{(2y-3z)x^2}=\left(\frac{4y^2-9z^2}{2y-3z}\right)\times x^{3-2};$$

et l'on obtient $\quad a''=(2y+3z)x.$

Il faut multiplier tout le diviseur par a'', et retrancher le produit du dividende A ; ou bien (nº 33), changer les signes des *produits partiels*, à mesure qu'on les obtient, et écrire, par ordre, au-dessous du dividende, ces produits ainsi modifiés.

Nous nous dispensons de rien écrire au-dessous du *premier terme* a du dividende ; il suffira d'omettre, dans le reste *réduit*, ce premier terme a, qui sera nécessairement détruit (nº 34).

Ayant réduit *au moindre nombre de termes* le reste $A'=A-Ba''$, on trouve que le premier terme du nouveau dividende A' est la quantité $m=(-8y^3+12y^2z+18yz^2-27z^3)x^2$.

2e Division partielle.

$$\begin{array}{lr|l} & -8y^3+12y^2z+18yz^2-27z^3 & 2y-3z \\ \cline{3-3} & +8y^3-12y^2z & -4y^2+9z^2 \\ \cline{2-2} 1^{er} \text{ reste} & 18yz^2-27z^3 & \\ & -18yz^2+27z^3 & \\ \cline{2-2} 2^e \text{ reste} & 0 & \end{array}$$

Alors, on effectue à part la division de m par a'. On a

$$\frac{m}{a'}=\frac{(-8y^3+12y^2z+18yz^2-27z^3)x^2}{(2y-3z)x^2};$$

et l'on obtient $\qquad b''=-4y^2+9z^2.$

Il faut multiplier chaque terme de B par b'', changer le signe de chaque produit partiel, et écrire, par ordre au-dessous du dividende A', ces produits ainsi modifiés.

Nous nous dispensons de rien écrire au-dessous du premier terme m du dividende A' ; il suffira d'omettre, dans le reste réduit A'', ce premier terme m.

On trouve, réduction faite, $A''=0$. L'opération est terminée.

Voici comment on dispose ordinairement les calculs.

	Dividende A.			Diviseur B.
	$4y^2$ $-9z^2$	$x^3 \ldots\ldots\ldots + 48y^3z$ $-108yz^3$	$x - 32y^5$ $+ 48y^4z$ $+162yz^4$ $-243z^5$	$2y$ $-3z$ | $x^2 + 4y^2$ $-12yz$ $+ 9z^2$ | $x + 8y^3$ $-12y^2z$ $+18yz^2$ $-27z^3$
Produit soustrait.	$- 8y^3$ $+24y^2z$ $-18yz^2$ $-12y^2z$ $+36yz^2$ $-27z^3$	$x^2 - 16y^4$ $+ 24y^3z$ $- 36y^2z^2$ $+ 54yz^3$ $- 24y^3z$ $+ 36y^2z^2$ $- 54yz^3$ $+ 81z^4$	x	$2y$ $+3z$ | $x - 4y^3$ $+ 9z^3$ } Quotient.
1er reste A′	$- 8y^3$ $+12y^2z$ $+18yz^2$ $-27z^3$	$x^2 - 16y^4$ $+ 48y^3z$ $-108yz^3$ $+ 81z^4$	$x - 32y^5$ $+ 48y^4z$ $+162yz^4$ $-243z^5$	
Produit soustrait.		$+ 16y^4$ $- 48y^3z$ $+ 36y^2z^2$ $- 36y^2z^2$ $+108yz^3$ $- 81z^4$	$x + 32y^5$ $- 48y^4z$ $+ 72y^3z^2$ $-108y^2z^3$ $- 72y^3z^2$ $+108y^2z^3$ $-162yz^4$ $+243z^5$	
2e reste A″.		0		

41. *Pour qu'un polynôme* A *soit divisible par un monôme* **B**, *il suffit et* IL FAUT *que chacun des monômes dont le dividende* **A** *est composé, soit divisible par le monôme diviseur* **B**.

En effet, 1° soit $A = a + b + c + \ldots + z$.

Si les quantités $a'' = \dfrac{a}{B}$, $b'' = \dfrac{b}{B}, \ldots\ z'' = \dfrac{z}{B}$, *sont* ENTIÈRES, on a

$a = Ba'', b = Bb'', \ldots\ z = Bz''$, $A = B(a'' + b'' + \ldots + z'')$, $\dfrac{A}{B} = a'' + b'' + \ldots + z''$.

Le quotient $\dfrac{A}{B}$ *est donc entier.*

2° Soit le polynôme $A = B \times Q$, le facteur B étant monôme, et les deux facteurs B, Q, étant entiers. Concevons les polynômes A et Q, ordonnés par rapport à une même lettre x. Supposons qu'on ait

$$A = a + b + c + \ldots + z \text{ et } Q = a'' + b'' + c'' + \ldots + z''.$$

De là $\quad A = B(a'' + b'' + \ldots + z'') = Ba'' + Bb'' + \ldots + Bz''$.

Considérons d'abord le cas où a'', b'', … z'' sont des monômes. Le produit partiel Ba'' ne peut se réduire avec aucun autre ; il est donc égal au premier terme a du produit A ordonné. Ce terme a est par conséquent un monôme, et l'on a $a''=\frac{a}{B}$. Donc le premier terme monôme a du dividende A est divisible par B, lorsque A est divisible par B.

Retranchant de A le produit partiel Ba'' ou a, on a un reste $A'=b+c+\ldots+z=Bb''+Bc''+\ldots+Bz''$, et l'on prouve comme précédemment que le terme b est un monôme égal à Bb''. Donc $b''=\frac{b}{B}$. Par conséquent, le second terme monôme b du dividende A est divisible par B, lorsque A est divisible par B ; et ainsi de suite.

Admettons maintenant que a'', b'', c'',... z'' puissent être des polynômes. Le produit partiel Ba'' ne peut se réduire avec aucun des produits partiels suivants, parce que dans aucun de ces produits, la lettre x ne se trouve à la même puissance que dans Ba''. Donc on a encore $a=Ba''$, et $a''=\frac{a}{B}$. Le terme a du dividende A est donc un polynôme divisible par le monôme B.

Par conséquent, chacun des termes monômes dont a se compose est divisible par B. On verra de même que b est un polynôme égal à Bb'', et que B divise chacun des termes monômes de b, et ainsi de suite.

On voit par là que, si la division de l'un des termes monômes de A par le monôme B ne se faisait pas exactement, il ne serait pas possible que A fût divisible par B

42. *Pour qu'un polynôme* A, *ordonné par rapport à une lettre* x, *soit divisible par un autre polynôme* B *qui ne contient pas cette lettre* x, *il suffit et* IL FAUT *que chacun des* COEFFICIENTS *des puissances de* x *dans* A, *et le terme indépendant de* x, *s'il y en a un, soient divisibles par le polynôme* B.

En effet, 1° soit $A=a+b+c+\ldots+z$.

Si les quantités $a''=\frac{a}{B}$, $b''=\frac{b}{B}$,... $z''=\frac{z}{B}$, *sont* ENTIÈRES, on a

$$a=Ba'',\ b=Bb'',\ldots z=Bz'',\ A=B(a''+b''+\ldots+z''),\ \frac{A}{B}=a''+b''+\ldots+z''.$$

Le quotient $\frac{A}{B}$ *est donc entier.*

2° Supposons que le polynôme A soit le produit du polynôme B par un polynôme entier Q.

Puisque le produit A contient x, et que le facteur B ne contient pas cette lettre, il faudra nécessairement que la lettre x se trouve dans le facteur Q.

Concevons que A et Q soient ordonnés par rapport à x, et qu'on ait alors $Q = a'' + b'' + c'' + \ldots + z''$, $A = a + b + c + \ldots + z$;

d'où $$A = B \times Q = Ba'' + Bb'' + Bc'' + \ldots + Bz''.$$

Le produit partiel Ba'' ne peut se réduire avec aucun autre. De là $Ba'' = a$, $a'' = \frac{a}{B}$. Donc le *premier terme* de A est divisible par B.

Retranchant de A le produit partiel Ba'' ou a, on a un reste $A' = b + c + \ldots + z = Bb'' + Bc'' + \ldots + Bz''$; et l'on prouve comme précédemment que le terme b est égal au produit partiel Bb''. Donc $b'' = \frac{b}{B}$. Par conséquent, le *second terme* de A est divisible par B. En continuant à raisonner de la même manière, on reconnaît que *tous les* TERMES *de* A *sont divisibles par* B.

Or, si l'on considère dans le facteur Q un *terme* de la forme $M''x^n$, qui représente la somme de tous les termes monômes du quotient dans lesquels la lettre x est affectée d'un même exposant n, le produit partiel $B \times M''x^n$ ne se réduit avec aucun autre. Il est donc égal au terme Mx^n du dividende A, dans lequel la lettre x a le même exposant n. Par conséquent $Mx^n = BM''x^n$, d'où $M = BM''$, $M'' = \frac{M}{B}$.

On voit donc que chacun des *coefficients* des puissances de x dans A est divisible par B.

De même, s'il y a dans le quotient un *terme* M'' qui représente la somme de tous les termes monômes indépendants de x, le produit partiel BM'', indépendant de x, ne se réduira avec aucun autre. Le dividende ou produit A contiendra donc un terme M indépendant de x, et qui sera égal à BM''. On aura donc encore $M'' = \frac{M}{B}$; de sorte que le terme indépendant de x dans le dividende sera aussi divisible par B.

Donc, s'il arrive que l'une des divisions partielles, telles que $\frac{M}{B}$, ne se fasse pas exactement, on en doit conclure que A n'est pas divisible par B.

43. *Un monôme n'est jamais divisible par un polynôme.* Car le polynôme diviseur B ayant au moins deux termes dissemblables, le produit de B par une quantité entière Q contiendra toujours au moins

deux termes dissemblables (n° 16) et ne pourra pas être égal au monôme dividende A.

44. *Pour obtenir le quotient d'une division proposée, il n'est pas* NÉCESSAIRE *d'ordonner d'abord le dividende et le diviseur par rapport à une lettre.*

Soit, par exemple,

$$A=32a^3b^3c^4-35a^8bc+15a^5b^2c^3+16ab^4c^5-28a^6b^2c^2,$$
$$B=3a^3b^2c^3+4ab^3c^4-7a^6bc.$$

Le dividende et le diviseur proposés ne sont ordonnés, ni l'un ni l'autre, par rapport à aucune des lettres a, b, c, qu'ils renferment.

Mais, si je recherche dans le dividende et dans le diviseur les termes qui renferment respectivement *la puissance la moins élevée* d'une des lettres, a, par exemple, ou au contraire *la puissance la plus élevée* de cette lettre, le quotient cherché ne pourra être exact qu'autant que ce terme du dividende soit divisible par le terme correspondant du diviseur (n° 16), et si la division partielle se fait exactement, elle donnera le terme du quotient qui renferme la puissance la moins élevée de la lettre a, ou au contraire la puissance la plus élevée de cette lettre.

Je remarque que, dans le quatrième terme du dividende et dans le second terme du diviseur, la puissance de a est plus faible que dans les autres termes. J'effectue la division partielle $\dfrac{16ab^4c^5}{4ab^3c^4}=4bc$. J'obtiens un quotient exact, qui est certainement un terme du quotient cherché, si la division proposée doit se faire exactement.

Je retranche du dividende A le produit du diviseur B par le quotient partiel $4bc$, et j'obtiens, après réduction, un reste

$$A'=20a^3b^3c^4-35a^8bc+15a^5b^2c^3,$$

que je n'ai besoin d'ordonner par rapport à aucune lettre.

Considérant A' comme un nouveau dividende, je remarque que, dans le second terme de A' et dans le dernier terme du diviseur B, la puissance de la lettre b est plus faible que dans les autres termes. J'effectue la division partielle; $\dfrac{-35a^8bc}{-7a^6bc}=+5a^2$. J'obtiens un quotient exact qui est certainement un terme du quotient cherché, si la division de A par B doit se faire exactement.

Je retranche du dividende A' le produit du diviseur B par le quotient partiel $5a^2$, et je trouve que le *second reste* A'' est nul. Par conséquent l'opération est terminée. On a, deux termes dissemblables (nº 16) et ne pourra pas être égal au monôme dividende A.

44. *Pour obtenir le quotient d'une division proposée, il n'est pas* NÉCESSAIRE *d'ordonner d'abord le dividende et le diviseur par rapport à une lettre.*

Soit, par exemple,

$$A=32a^3b^3c^4-35a^8bc+15a^5b^8c^3+16ab^4c^5-28a^6b^2c^2,$$
$$B=3a^3b^8c^3+4ab^3c^4-7a^6bc.$$

Le dividende et le diviseur proposés ne sont ordonnés, ni l'un ni l'autre, par rapport à aucune des lettres a, b, c, qu'ils renferment.

Mais, si je recherche dans le dividende et dans le diviseur les termes qui renferment respectivement *la puissance la moins élevée* d'une des lettres, a, par exemple, ou au contraire *la puissance la plus élevée* de cette lettre, le quotient cherché ne pourra être exact qu'autant que ce terme du dividende soit divisible par le terme correspondant du diviseur (nº 16), et si la division partielle se fait exactement, elle donnera le terme du quotient qui renferme la puissance la moins élevée de la lettre a, ou au contraire la puissance la plus élevée de cette lettre.

Je remarque que, dans le quatrième terme du dividende et dans le second terme du diviseur, la puissance de a est plus faible que dans les autres termes. J'effectue la division partielle $\frac{16ab^4c^5}{4ab^3c^4}=4bc$. J'obtiens un quotient exact, qui est certainement un terme du quotient cherché, si la division proposée doit se faire exactement.

Je retranche du dividende A le produit du diviseur B par le quotient partiel $4bc$, et j'obtiens, après réduction, un reste

$$A'=20a^3b^3c^4-35a^8bc+15a^5b^8c^3,$$

que je n'ai besoin d'ordonner par rapport à aucune lettre.

Considérant A' comme un nouveau dividende, je remarque que, dans le second terme de A' et dans le dernier terme du diviseur B, la puissance de la lettre b est plus faible que dans les autres termes. J'effectue la division partielle; $\frac{-35a^8bc}{-7a^6bc}=+5a^2$. J'obtiens un quotient exact qui est certainement un terme du quotient cherché, si la division de A par B doit se faire exactement.

Je retranche du dividende A' le produit du diviseur B par le quotient partiel $5a^2$, et je trouve que le *second reste* A'' est nul. Par conséquent l'opération est terminée. On a,

$$A = B \times 4bc + A'; \quad A' = B \times 5a^2; \quad A = B(4bc + 5a^2).$$

Le binôme $4bc+5a^2$ exprime exactement le quotient cherché.

Voici le tableau des calculs.

$$\begin{array}{l l|l}
 & 32a^3b^3c^4 - 35a^8bc + 15a^5b^2c^3 + 16ab^4c^5 - 28a^6b^2c^2 & 3a^3b^2c^3 + 4ab^3c^4 - 7a^6bc \\
\cline{3-3}
 & -12a^3b^3c^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 16ab^4c^5 + 28a^6b^2c^2 & 4bc + 5a^2 \\
\cline{2-2}
\text{1}^{\text{er}}\text{ reste A}' \ldots & 20a^3b^3c^4 - 35a^8bc + 15a^5b^2c^3 & \\
 & -20a^3b^3c^4 + 35a^8bc - 15a^5b^2c^3 & \\
\cline{2-2}
\text{2}^{\text{e}}\text{ reste A}'' \ldots & 0 &
\end{array}$$

Mais *on a soin d'*ORDONNER *le dividende, le diviseur et les dividendes partiels successifs* (n° 30), *parce qu'on est ainsi dispensé de rechercher, dans le cours des opérations, un terme du dividende et un terme du diviseur dans lesquels une même lettre soit affectée d'un exposant plus fort ou plus faible que dans tous les autres; et parce qu'il devient plus facile de reconnaître les termes semblables et d'opérer les* RÉDUCTIONS.

45. *La* DIFFÉRENCE *des puissances de même degré de deux quantités est toujours divisible par la* DIFFÉRENCE *de ces deux quantités.*

Je dis que $x^m - a^m$ est divisible par $x-a$, et que le quotient exact est

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots\ldots + a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x + a^{m-1} = Q.$$

En effet, nous avons vu (n° 21) qu'on a $Q(x-a) = x^m - a^m$. Donc $\dfrac{x^m - a^m}{x-a} = Q = x^{m-1} + \text{etc.}$

Mais on peut établir le même principe, et découvrir la loi de composition du quotient, au moyen de quelques divisions partielles.

$$\begin{array}{l c|l}
 & x^m \ldots\ldots - a^m & x - a \\
\cline{3-3}
 & -x^m + a\,x^{m-1} & x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots\ldots \\
\cline{2-2}
\text{1}^{\text{er}}\text{ reste} & ax^{m-1} - a^m & \\
 & -ax^{m-1} + a^2\,x^{m-2} & \\
\cline{2-2}
\text{2}^{\text{e}}\text{ reste} & a^2x^{m-2} - a^m &
\end{array}$$

Lorsqu'on effectue la première division partielle, on a pour quotient partiel x^{m-1}, et pour premier reste $ax^{m-1} - a^m$ ou $ax^{m-1} - a \times a^{m-1}$. Par conséquent $x^m - a^m = (x-a)x^{m-1} + a(x^{m-1} - a^{m-1})$. Donc $x^m - a^m$ serait divisible par $x-a$, si $x^{m-1} - a^{m-1}$ était divisible par $x-a$; c'est à-dire qu'en général, *la différence des puissances de même degré de deux quantités* x *et* a *serait divisible par la différence* x—a, *si la différence des puissances immédiatement inférieures était divisible par* $x - a$.

Or, $x^1 - a^1$ est divisible par $x - a$; le quotient est 1. Donc $x^2 - a^2$ est divisible par $x - a$; d'où l'on conclut que $x - a$ divise $x^3 - a^3$, puis $x^4 - a^4$, et ainsi de suite. Donc, en augmentant ainsi constamment d'une unité les exposants de x et de a, on peut s'élever jusqu'au degré m, et l'on conclut que $x^m - a^m$ est divisible par $x - a$.

En continuant la division, on voit que, dans le premier terme de chaque reste, l'exposant de a augmente constamment d'une unité, tandis que l'exposant de x diminue d'une unité, de sorte que ce premier terme est constamment un monôme positif du degré m. Il en résulte que les premiers termes du quotient $x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} +$ etc. sont soumis à la loi précédemment énoncée (n° 21). On s'assure alors que cette loi est vraie pour la totalité des termes du quotient, en effectuant la multiplication du polynôme Q par $x - a$ (n° 21) ; l'on trouve en effet un produit égal à $x^m - a^m$.

46. *La* DIFFÉRENCE *des puissances* PAIRES *de même degré de deux quantités est divisible par la* SOMME *de ces quantités.*

Je dis que $x^{2m} - a^{2m}$ est divisible par $x + a$, et que le quotient exact est

$$x^{2m-1} - ax^{2m-2} + a^2x^{2m-3} - \ldots - a^{2m-3}x^2 + a^{2m-2}x - a^{2m-1} = Q.$$

En effet, nous avons vu (n° 22) qu'on a $Q(x + a) = x^{2m} - a^{2m}$. Donc $\dfrac{x^{2m} - a^{2m}}{x + a} = Q$.

Mais on peut établir le même principe au moyen de quelques divisions partielles.

$$\begin{array}{lrr|l}
 & x^{2m} \ldots\ldots\ldots\ldots & -a^{2m} & x + a \\
\cline{4-4}
 & -x^{2m} - ax^{2m-1} & & x^{2m-1} - ax^{2m-2} + a^2x^{2m-3} \ldots \\
\cline{2-3}
\text{1}^{\text{er}} \text{ reste} & -ax^{2m-1} & -a^{2m} & \\
 & +ax^{2m-1} + a^2x^{2m-2} & & \\
\cline{2-3}
\text{2}^{\text{e}} \text{ reste} & & a^2x^{2m-2} - a^{2m} &
\end{array}$$

Lorsqu'on a effectué les deux premières divisions, on a pour les deux premiers termes du quotient $x^{2m-1} - ax^{2m-2}$, et pour deuxième reste $a^2x^{2m-2} - a^{2m}$ ou $a^2(x^{2m-2} - a^{2m-2})$. Par conséquent,

$$x^{2m} - a^{2m} = (x + a)(x^{2m-1} - ax^{2m-2}) + a^2(x^{2m-2} - a^{2m-2}).$$

Donc, $x^{2m} - a^{2m}$ serait divisible par $x + a$, si $x^{2m-2} - a^{2m-2}$ était divisible par $x + a$; c'est-à-dire qu'en général, *la différence* *des puissances* PAIRES *de même degré de deux quantités* x *et* a *serait divisible par la somme* x + a, *si la différence des puissances inférieures de deux unités était divisible par* x + a.

Or, $x^2 - a^2$ est divisible par $x + a$; le quotient est $x - a$. Donc $x^4 - a^4$ est divisible par $x + a$; donc $x + a$ divise aussi $x^6 - a^6$, et ainsi de suite. Donc, en augmentant constamment de deux unités les exposants de x et de a, on peut s'élever jusqu'au degré $2m$. La divisibilité de $x^{2m} - a^{2m}$ par $x + a$ est donc démontrée.

Le premier terme de chaque reste est alternativement négatif et positif. L'exposant de a augmente et l'exposant de x diminue constamment d'une unité dans ce premier terme ; de sorte que tous les restes obtenus sont du degré $2m$. Il en résulte que les premiers termes du quotient sont soumis à la loi précédemment énoncée (n° 22).

On s'assure alors, par la multiplication, que la même loi s'étend à la totalité des termes du quotient.

47. *La* SOMME *des puissances* IMPAIRES *de même degré de deux quantités est divisible par la* SOMME *de ces quantités.*

Je dis que $x^{2m+1} + a^{2m+1}$ est divisible par $x + a$, et que le quotient exact est

$$x^{2m} - ax^{2m-1} + a^2x^{2m-2} - \ldots\ldots + a^{2m-2}x^2 - a^{2m-1}x + a^{2m} = Q.$$

En effet, on a vu (n° 23) que $Q(x + a) = x^{2m+1} + a^{2m+1}$. Donc $\dfrac{x^{2m+1} + a^{2m+1}}{x + a} = Q$.

Autrement, après deux divisions partielles, on a au quotient $x^{2m} - ax^{2m-1}$, et le reste correspondant est $a^2x^{2m-1} + a^{2m+1}$, ou $a^2(x^{2m-1} + a^{2m-1})$. Par conséquent,

$$x^{2m+1} + a^{2m+1} = (x + a)(x^{2m} - ax^{2m-1}) + a^2(x^{2m-1} + a^{2m-1}) ;$$

$$\begin{array}{l|l}
x^{2m+1} \ldots\ldots\ldots\ldots + a^{2m+1} & x + a \\ \cline{2-2}
-x^{2m+1} - ax^{2m} & x^{2m} - ax^{2m-1} + a^2x^{2m-2} \ldots \\ \cline{1-1}
\quad -ax^{2m} \qquad\qquad + a^{2m+1} & \\
\quad +ax^{2m} + a^2x^{2m-1} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad + a^2x^{2m-1} + a^{2m+1} &
\end{array}$$

ce qui fait dépendre la divisibilité pour un certain degré impair, de la divisibilité pour le degré qui est inférieur de deux unités.

Or $x + a$ est divisible par $x + a$. Donc $x^3 + a^3$ est divisible par $x + a$, donc $x + a$ divise exactement $x^5 + a^5$, et ainsi de suite.

La loi du quotient se manifeste dans les premiers termes et se vérifie par la multiplication pour le quotient total.

48. *La* SOMME *des puissances* PAIRES *de même degré de deux quantités n'est pas divisible par la* SOMME *de ces quantités.*

Je dis que $x^{2m}+a^{2m}$ n'est pas divisible par $x+a$; que la partie entière du quotient est $x^{2m-1}-ax^{2m-2}+\ldots+a^{2m-2}x-a^{2m-1}$ (nº 46), et que le *dernier reste*, indépendant de x, est $2a^{2m}$.

En effet $\quad x^{2m}+a^{2m}=(x^{2m}-a^{2m})+2a^{2m}=$
$$=(x+a)(x^{2m-1}-ax^{2m-2}+\ldots+a^{2m-2}x-a^{2m-1})+2a^{2m}.$$

49. *La* DIFFÉRENCE *des puissances* IMPAIRES *de même degré de deux quantités n'est pas divisible par la* SOMME *de ces quantités.*

Je dis que $x^{2m+1}-a^{2m+1}$ n'est pas divisible par $x+a$, que la partie entière du quotient est $x^{2m}-ax^{2m-1}+\ldots-a^{2m-1}x+a^{2m}$ (nº 47), et que le *dernier reste*, indépendant de x, est $-2a^{2m+1}$.

En effet $\quad x^{2m+1}-a^{2m+1}=(x^{2m+1}+a^{2m+1})-2a^{2m+1}$
$$=(x+a)(x^{2m}-ax^{2m-1}+\ldots+a^{2m})-2a^{2m+1}.$$

50. *La* SOMME *des puissances de même degré de deux quantités, n'est jamais divisible par la* DIFFÉRENCE *de ces quantités.*

Je dis que x^m+a^m n'est pas divisible par $x-a$; que la partie entière du quotient est $x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}$ (nº 45), et que le *dernier reste*, indépendant de x, est $2a^m$.

En effet $\quad x^m+a^m=(x^m-a^m)+2a^m=$
$$=(x-a)(x^{m-1}+ax^{m-2}+\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1})+2a^m.$$

Calcul des fractions algébriques.

51. Les fractions algébriques, telles que $\frac{a}{b}$, et les fractions arithmétiques ordinaires, telles que $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{9}{10}$, ont ce caractère commun, qu'elles indiquent le *quotient* d'une division à effectuer. Mais dans les fractions algébriques, les *termes a, b,* ne représentent pas toujours des nombres entiers et positifs; c'est en cela qu'elles diffèrent des fractions arithmétiques. Néanmoins, par analogie, le dividende a s'appelle encore *numérateur*, et le diviseur b s'appelle *dénominateur* de la fraction algébrique.

Or, quelles que soient les expressions numériques ou algébriques que l'on conçoive mises à la place des lettres a, b, c, d, etc. dans les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$,...., nous allons prouver que *toutes les règles du calcul des fractions arithmétiques sont applicables au calcul des frac-*

tions algébriques sous la seule condition que a, b, c, d, etc., représentent des expressions auxquelles on peut appliquer ce principe : *Un produit ne change pas, dans quelque ordre que les multiplications soient indiquées.*

Nous représenterons par q le quotient de la division de a par b. De là $\frac{a}{b}=q$, et $a=b\times q$.

52. *On ne change pas la valeur d'une fraction algébrique lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise les deux termes par une même quantité.*

Soit en effet $\frac{a}{b}=q$, d'où $a=b\times q$, et par suite $a\times n=b\times q\times n$.

En admettant que le produit $b\times q\times n$ ne change pas, dans quelque ordre que les multiplications soient indiquées, on aura

$$b\times q\times n=b\times n\times q=(bn)\times q.$$

Donc $$an=bn\times q,\ \text{et enfin}\ \frac{an}{bn}=q=\frac{a}{b}.$$

53. *On réduit les fractions algébriques au même* DÉNOMINATEUR, *sans en changer la valeur, en multipliant les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres.*

En effet, on a $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$, $\frac{c}{d}=\frac{cb}{db}$ (nº 52). Donc, en admettant que $db=bd$, les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, peuvent être exprimées par $\frac{ad}{bd}$, $\frac{cb}{bd}$, et sont réduites au même dénominateur.

De même pour les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, on aurait

$$\frac{a}{b}=\frac{a(df)}{b(df)}=\frac{(df)a}{(df)b}=\frac{adf}{bdf};\quad \frac{c}{d}=\frac{cbf}{dbf}=\frac{cbf}{bdf};\quad \frac{e}{f}=\frac{ebd}{bdf}.$$

54. ADDITION. *Après avoir réduit au même dénominateur les fractions à additionner, on obtiendra la* SOMME *en divisant la somme des numérateurs par le dénominateur commun.*

En effet, soient à ajouter les fractions $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$.

Si nous posons $\frac{a}{d}=q$, $\frac{b}{d}=q'$, $\frac{c}{d}=q''$, nous aurons

$a=dq$, $b=dq'$, $c=dq''$; d'où $a+b+c=dq+dq'+dq''=d(q+q'+q'')$.

$$\text{Donc}\ \frac{a+b+c}{d}=q+q'+q''=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}.$$

55. SOUSTRACTION. *Pour soustraire d'une fraction une autre fraction, réduisez les deux fractions au même dénominateur. Vous obtiendrez le* RESTE *en retranchant le numérateur de la seconde du numérateur de la première, et en divisant le résultat par le dénominateur commun.*

En effet, soient $\frac{a}{d}=q$, $\frac{b}{d}=q'$, d'où $a=dq$, $b=dq'$. On aura $a-b=dq-dq'=d(q-q')$; par conséquent $\frac{a-b}{d}=q-q'=\frac{a}{d}-\frac{b}{d}$.

56. MULTIPLICATION. *Vous obtiendrez le* PRODUIT *de plusieurs fractions en divisant le produit des numérateurs par le produit des dénominateurs.*

En effet, soient $\frac{a}{b}=q$, $\frac{c}{d}=q'$, d'où $a=bq$, $c=dq'$. Par conséquent, $ac=(bq)\times(dq')$.

Or, en admettant que l'ordre des facteurs n'influe pas sur la valeur d'un produit, on en conclut, comme en arithmétique, que pour multiplier une quantité par un produit, il suffit de la multiplier successivement par chacun des facteurs, et réciproquement; de sorte que

$$(bq)\times(dq')=b\times q\times d\times q'=(bd)\times q\times q'=(bd)\times(qq').$$

Donc $ac=(bd)\times(qq')$, et $\frac{ac}{bd}=qq'=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$.

57. DIVISION. *Vous obtiendrez le* QUOTIENT *de la division d'une fraction par une autre fraction en multipliant la fraction* DIVIDENDE *par la fraction* DIVISEUR RENVERSÉE.

En effet, soient le dividende $\frac{a}{b}$, et le diviseur $\frac{c}{d}$.

La quantité $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$, ou $\frac{ad}{bc}$ (nº 56) étant multipliée par le diviseur $\frac{c}{d}$ donne pour produit $\frac{adc}{bcd}$ (nº 56), ou $\frac{a}{b}$ (nº 52), c'est-à-dire le dividende. Donc $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ est le *quotient*.

Calcul des expressions négatives.

58. Jusqu'ici nous avons supposé implicitement que les lettres a, b, c, x, etc. représentaient des valeurs numériques absolues,

c'est-à-dire considérées abstraction faite des signes $+$, $-$. Nous avons supposé dans les polynômes que la somme des valeurs absolues des termes soustractifs ne surpassait pas la somme des valeurs des termes additifs.

Par exemple, nous avons admis, pour un polynôme

$$P = a - b + c - d - e,$$

que la somme des nombres b, d, e, ne surpassait pas la somme des nombres a, c, de sorte que les soustractions étaient possibles. La lettre P désignait une valeur numérique absolue, égale à l'excès de la somme $a+c$ sur la somme $b+d+e$, qui était moindre que la première, ou tout au plus égale à la première.

Mais, dans la résolution des questions par l'algèbre, on est conduit à écarter ces restrictions.

Qu'il s'agisse, par exemple, de trouver le quatrième terme x d'une proportion arithmétique, les trois premiers termes a, b, c, étant donnés. Nous savons (*Arithm.*, p. 72) que le terme x s'obtient en retranchant de la somme $b+c$ des moyens, l'extrême connu a.

On a $$x = (b+c) - a.$$

Si a ne surpasse pas $b+c$, on effectue la soustraction, et la question est résolue.

Mais il peut arriver que a surpasse $b+c$. Dans ce cas, les algébristes conviennent d'accepter encore l'expression $(b+c) - a$ pour la valeur du terme cherché x.

Ainsi, soient $\quad a=12, \quad b=7, \quad c=3;$

d'où $\quad b+c=10; \quad a=10+2=(b+c)+2.$

On dira $x=b+c-a=10-12$. On admettra, comme au n° 4, que le terme soustractif -12 tienne lieu de $-10-2$. On aura ainsi

$$x = 10 - 10 - 2, \quad \text{ou enfin} \quad x = -2.$$

Le terme x se trouve alors représenté par une *expression algébrique*, -2, *formée du nombre* 2 *affecté du signe* $-$.

Qu'on accepte cette expression pour le quatrième terme x; la proportion $12\cdot7 : 3\cdot x$ deviendra $12\cdot7 : 3\cdot-2$.

Si l'on convient d'appliquer aux extrêmes, -2 et $+12$, la règle ordinaire de *l'addition* (n° 6), leur SOMME (c'est-à-dire le résultat qu'on obtient en appliquant la *règle de l'addition algébrique*) se formera en les écrivant à la suite l'un de l'autre, avec les signes qu'ils ont. La *somme* des extrêmes sera $-2+12$ ou 10. Ainsi, *la* SOMME *des extrêmes sera égale à la somme* $7+3$ *des moyens.*

Si l'on convient d'appliquer aux termes 3 et x, ou 3 et -2, la règle ordinaire de la *soustraction* (n° 7), la DIFFÉRENCE $3-x$ s'obtiendra en changeant d'abord le signe du terme x, ce qui donnera $+2$, puis en écrivant le résultat $+2$ à la suite du terme 3. En opérant ainsi, *la* DIFFÉRENCE *des deux derniers termes* (c'est-à-dire, le résultat obtenu en appliquant la *règle de la soustraction algébrique*), *sera égale à la différence* $12-7$ *des deux premiers termes;* ce qui s'accorde avec la définition de l'*équidifférence*, ou de la proportion arithmétique.

On comprend, d'après cela, le véritable objet des conventions que nous venons de proposer : c'est qu'il résulte de leur adoption que les conditions de la définition de l'équidifférence, et les propriétés qu'on en déduit (*Arithm.*, n° 37), sont maintenues pour toutes les valeurs numériques des termes a, b, c, de sorte qu'il est permis d'admettre la proportion $a \cdot b : c \cdot x$, sans qu'on ait à rechercher si a peut être numériquement retranché de $b+c$.

59. *L'expression formée d'un nombre devant lequel est placé le signe* $-$, *s'appelle* EXPRESSION NÉGATIVE.

Ainsi, -2, $-\frac{2}{3}$ sont des *expressions négatives.*

La *valeur du nombre* 2 ou $\frac{2}{3}$ s'appelle *valeur absolue* de l'expression négative -2 ou $-\frac{2}{3}$

La *valeur d'un polynôme* est *négative*, le polynôme est *négatif*, lorsque la somme des valeurs absolues des termes soustractifs est plus grande que la somme des termes additifs.

Si, dans le polynôme $P=a-b+c-d-e$, l'on suppose $a=7$, $b=4$, $c=2$, $d=3$, $e=5$, on a

$$P=7-4+2-3-5=7+2-4-3-5=9-12;\ P=9-9-3=-3.$$

La *valeur du polynôme* se réduit à l'*expression négative* $P=-3$.

60. L'introduction des *expressions négatives*, et les conventions qui servent à régler les calculs où elles sont admises, ont pour objet de *généraliser les formules algébriques;* c'est-à-dire, que des formules obtenues d'abord par le raisonnement en supposant les valeurs des lettres soumises à certaines conditions particulières, deviennent encore applicables lorsqu'on cesse d'admettre les mêmes restrictions.

On aura bientôt l'occasion de reconnaître les avantages qui résultent de l'emploi des expressions négatives, soit dans les questions de théorie, soit dans la résolution des problèmes (*voy.* n° 71 et suiv.).

Il faut maintenant que les règles de calcul précédemment établies soient rendues indépendantes des valeurs positives ou négatives des expressions algébriques que l'on considère. C'est l'objet des conventions et des règles suivantes.

61. ADDITION. *La* SOMME ALGÉBRIQUE *de deux polynômes est le résultat qu'on obtient en écrivant à la suite du premier polynôme tous les termes du second, avec les signes qu'ils ont* (n° 6).

Ainsi, nous convenons d'entendre par *somme algébrique* des polynômes $16-6$ et $9-5+2-8$, le résultat $16-6+9-5+2-8$, qui *se réduit* à $+8$.

La *somme* des polynômes $6-16$ et $-3+15-2$ sera $6-16-3+15-2$; elle *se réduit* à *zéro*.

La *somme* des polynômes $16-6$ et $9+2-31$ sera $16-6+9+2-31$; elle se réduit à l'expression négative -10.

La SOMME ALGÉBRIQUE *de plusieurs monômes est le résultat qu'on obtient en les écrivant à la suite les uns des autres, avec les signes qu'ils ont.*

Ainsi, nous convenons d'entendre par *somme algébrique* des monômes 10 ou $+10$ et -2, le résultat $10-2$, qui *se réduit* à 8.

On a généralement, par cette convention, $(+a)+(+b)=a+b$; $(+a)+(-b)=a-b$; $(-a)+(+b)=-a+b=b-a$; $(-a)+(-b=-a-b=-(a+b)$.

Il est clair que la *somme algébrique* de monômes ou de polynômes ne présente plus, lorsqu'il entre des expressions négatives dans le calcul, le même sens que la *somme arithmétique* de plusieurs valeurs numériques absolues. La *somme algébrique* est le résultat, positif, ou nul, ou négatif, auquel conduit la combinaison de nombres et de signes qu'on a indiquée en se conformant à la règle de l'*addition algébrique*.

62. SOUSTRACTION. *La* DIFFÉRENCE ALGÉBRIQUE *de deux polynômes* A, B, *est le résultat qu'on obtient lorsqu'à la suite du polynôme* A *on écrit tous les termes du polynôme* B, *après avoir changé le signe de chacun de ces termes* (n° 7).

Ainsi, nous convenons d'entendre par *différence* des polynômes $a-b$, $c-d$, le résultat $a-b-c+d$, qui peut être positif, ou nul, ou négatif.

Par exemple : $4-12-(3-13)=4-12-3+13=+2$;

$$4-12-(3-11)=4-12-3+11=0;$$
$$12-4-(13-3)=12-4-13+3=-2.$$

La DIFFÉRENCE ALGÉBRIQUE *de deux monômes* s'entend de même.

On a généralement, par cette convention, $(+a)-(+b)=a-b$; $(+a)-(-b)=a+b$; $(-a)-(+b)=-a-b=-(a+b)$; $(-a)-(-b)=-a+b=b-a$.

Il est clair que la *différence algébrique* de deux monômes ou de deux polynômes, ne présente plus, lorsqu'il entre des expressions négatives dans le calcul, le même sens que la *différence arithmétique* de deux valeurs numériques absolues : on ne peut plus dire que la différence exprime *l'excès d'une quantité sur une autre quantité plus petite.*

Mais, si l'on désigne par C la *différence algébrique* formée selon la règle qui vient d'être prescrite, et qu'on fasse la *somme algébrique* B + C selon la règle du n° 61, l'on s'assurera, comme au n° 7, que B + C = A.

Ainsi, la *soustraction* est toujours *une opération par laquelle on détermine une expression algébrique* C, *qui*, AJOUTÉE *à l'expression donnée* B, *forme une* SOMME *égale à une autre expression donnée* A.

63. MULTIPLICATION. *On entend par* PRODUIT *de deux polynômes*, a — b, c — d, *le résultat* ac — bc — ad + bd, *qu'on obtient*, quels que soient *a*, *b*, *c*, *d*, *en appliquant les mêmes règles* (n° 9) *que si* a, b, c, d, a — b *et* c — d *étaient des quantités positives.*

Ainsi, nous convenons d'entendre par PRODUIT *algébrique* des polynômes 6 — 7 et 9 — 12, le résultat

$$6\times 9-7\times 9-6\times 12+7\times 12.$$

Ce résultat est égal à 54—63—72+84 ou 138—135, et *se réduit* à + 3.

Le *produit* de 12—9 par 6—7 sera 12×6—9×6—12×7+9×7, ou 72—54—84+63; il *se réduit* à 135—138, c'est-à-dire, à l'expression négative — 3.

Le PRODUIT ALGÉBRIQUE *de plusieurs monômes* s'entend de même; c'est le résultat qu'on obtient en opérant sur des facteurs monômes, comme on le ferait si chaque facteur affecté du signe — était précédé d'une quantité positive telle que la soustraction arithmétique pût être effectuée.

Ainsi, le *produit* de — 1 par — 3, signifie le résultat + (1 × 3), ou 3 (n° 9).

Le *produit* de + 3 par — 1, signifie le résultat — (3 × 1) ou — 3.

On a généralement, par cette convention,

$$(+a)\times(+b)=+ab;\quad (-a)\times(-b)=+ab;$$
$$(+a)\times(-b)=-ab;\quad (-a)\times(+b)=-ab.$$

64. Il suit de *la règle des signes* (n° 9) qu'*un* PRODUIT *est positif ou négatif, selon que le nombre des expressions négatives employées comme facteurs, est pair ou impair.*

En effet, lorsqu'il entre, dans la composition du produit *abcd*..., *un seul* facteur négatif, le produit est affecté du signe —, et demeure *négatif* si on le multiplie par des quantités positives. Dès que ce résultat négatif vient à être multiplié par un *second* facteur négatif, le produit devient *positif*, et demeure affecté du signe + si on le multiplie par de nouveaux facteurs positifs. Lorsqu'ensuite on introduit un *troisième* facteur négatif, le produit devient *négatif*. On voit, en continuant ainsi, que le produit change de signe, et devient alternativement négatif, puis positif, à mesure que le nombre des facteurs négatifs augmente d'une unité.

Par conséquent, lorsqu'en multipliant par de nouveaux facteurs un produit P déjà obtenu, on a introduit *deux facteurs négatifs de plus*, le nouveau produit P′ a le *même signe* que le produit P.

Donc, 1° le produit P étant *négatif* lorsqu'il renferme *un seul* facteur négatif, les produits seront encore *négatifs* s'ils renferment 3, 5, 7,... facteurs négatifs et, en général, un nombre *impair* de facteurs négatifs.

2° Le produit P étant *positif* lorsqu'il renferme *deux* facteurs négatifs, les produits seront encore *positifs* s'ils renferment 4, 6, 8,.., facteurs négatifs et, en général, un nombre *pair* de facteurs négatifs.

65. *Un produit de facteurs positifs ou négatifs ne change pas, dans quelque ordre qu'on indique les multiplications.*

En effet, le produit proposé, et le nouveau produit qu'on obtient après avoir seulement changé l'ordre des facteurs, renferment le même nombre de facteurs négatifs. Ces deux produits ont donc le même signe (n° 64). D'ailleurs, on a vu en arithmétique (page 50), que le produit des valeurs numériques absolues des facteurs ne change pas, dans quelque ordre que les multiplications soient effectuées.

Les deux produits seront donc identiquement les mêmes.

66. DIVISION. Les polynômes A, B, pouvant représenter des expressions négatives, ainsi que les lettres qu'ils renferment, *on entend par* QUOTIENT *de* A *par* B, *le résultat qu'on obtient en appliquant à ces polynômes les mêmes règles* (n^os^ 30, 32) *que s'il s'agissait d'opérer la division entre deux polynômes dont les valeurs seraient*

positives et dans lesquels chaque lettre représenterait une valeur numérique absolue.

Si, par exemple, prenant pour *dividende* le polynôme $5^3-5^2\times7-5\times7^2+7^3$, et pour *diviseur* le polynôme 5^2-7^2, on opère sur ces polynômes comme il a été prescrit (nos 30, 32); on parviendra à un *reste* nul, après avoir *soustrait* (no 62) successivement du dividende les *produits* (no 63) du diviseur 5^2-7^2 par les termes 5 et -7, qui sont les *quotients* partiels obtenus en divisant, comme il a été dit no 32, le premier terme de chaque dividende partiel par le premier terme du diviseur.

$$\begin{array}{l|l}
\begin{array}{rl} & 5^3-5^2\times7-5\times7^2+7^3 \\ & -5^3 \qquad\quad +5\times7^2 \\ \hline \text{1}^{\text{er}}\text{ reste.} & -5^2\times7 \qquad\quad +7^3 \\ & +5^2\times7 \qquad\quad -7^3 \\ \hline \text{2}^{\text{e}}\text{ reste.} & 0 \end{array} & \begin{array}{l} 5^2-7^2 \\ \hline 5\ -7 \end{array}
\end{array}$$

On en conclura que le *produit* (no 63) du *diviseur* 5^2-7^2 par le binôme $5-7$ est identiquement égal au *dividende* $5^3-5^2\times7-5\times7^2+7^3$ et l'on dira que *le résultat* $5-7$ *est le* QUOTIENT *exact de la division proposée.*

En général, si l'on détermine chaque *quotient partiel* suivant les règles énoncées, nos 30, 32; si l'on fait le *produit* (no 63) du diviseur par ce quotient partiel; si l'on *retranche* (no 62) le résultat du dividende, et qu'en continuant à opérer ainsi on parvienne à un *reste* nul, après avoir obtenu un certain nombre de quotients partiels dont la *somme algébrique* (no 61) forme un polynôme Q, on en devra conclure que le dividende A est égal au *produit* (no 63) des polynômes B et Q. On aura $A=B\times Q$, $\frac{A}{B}=Q$.

Par conséquent, lorsqu'on admet des expressions négatives dans le calcul, *la* DIVISION *est encore une opération par laquelle on se propose de déterminer une expression algébrique* Q *telle que si on la* MUTIPLIE *par une expression donnée* B, *il en résulte un* PRODUIT *égal à une autre expression donnée* A.

Le QUOTIENT *de la division d'un monôme par un autre monôme* s'entend de même. On a, par cette convention,

$$\frac{+a}{+b}=+\left(\frac{a}{b}\right),\quad \frac{-a}{-b}=+\left(\frac{a}{b}\right);\ \frac{+a}{-b}=-\left(\frac{a}{b}\right);\ \frac{-a}{+b}=-\left(\frac{a}{b}\right).$$

67. FRACTIONS. *Lorsqu'on admet des expressions négatives dans*

le calcul, toutes les règles des OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS *sont applicables.*

Car on a vu (nos 51,...57) que ces règles sont applicables, quelles que soient les expressions que l'on conçoive mises à la place des lettres, pourvu qu'on sache qu'*un produit ne change pas, dans quelque ordre que les multiplications soient indiquées.* Or, ce principe a été étendu (no 65) à un produit dans lequel des expressions négatives entrent comme facteurs. Donc, en s'appuyant sur ce principe, on démontrera, comme aux nos 52,...57, toutes les règles du calcul des fractions, les quantités que l'on y considère pouvant être positives ou négatives.

Valeurs relatives des expressions négatives.

68. Il nous reste encore à expliquer, au sujet des expressions négatives, un langage de convention qui a pour but de simplifier le discours, et de faire que les énoncés des règles algébriques, sans éprouver de changement dans les mots, embrassent néanmoins un plus grand nombre de cas; de sorte que ces énoncés acquièrent une plus grande utilité, parce qu'ils reçoivent, dans leur signification, l'extension et la généralité dont ils sont susceptibles.

Désignons par x la valeur de la *différence* qu'on trouve en retranchant d'un nombre donné, 5, par exemple, un autre nombre a. Supposons que d'abord a soit nul, et attribuons ensuite à a des valeurs *de plus en plus grandes*, par exemple, $a=1$, $a=2$, $a=3$, $a=4$...; LA VALEUR DE x, dans ces substitutions successives, DEVIENDRA DE PLUS EN PLUS PETITE. On aura

$$x=5-0=5;\quad x=5-1=4;\quad x=5-2=3;$$
$$x=5-3=2;\quad x=5-4=1;\quad x=5-5=0.$$

Or, si l'on continue à faire croître la valeur de a, et dès qu'on suppose $a>5$, on obtient pour x des expressions négatives; on aura

$$x=5-6=-1;\quad x=5-7=-2;\quad x=5-8=-3, \text{ etc.}$$

On est convenu d'appliquer encore à ces expressions, par analogie, le langage qui avait un sens naturel pour les premières valeurs de x, jusqu'à *zéro*: et l'on continue à dire que *les valeurs de* x *sont devenues* DE PLUS EN PLUS PETITES.

En vertu de cette convention, l'on dira donc :

-1 *est moindre que zéro ;* -2 *est moindre que* -1 ; et encore : *l'expression algébrique* -2 *a une* VALEUR RELATIVE *plus petite que*

— 1, *plus petite que zéro, et plus petite que toute quantité positive.*

L'inégalité $2 < 3$ exprime un fait; elle indique une relation qui existe entre deux véritables grandeurs.

Au contraire, l'écriture algébrique $x < 0$ constitue simplement une manière commode d'indiquer que x est une expression négative.

De même, quand on écrit $y < x < 0$, on veut seulement indiquer que y et x sont deux expressions négatives, et que la valeur numérique absolue est plus grande dans la première expression que dans la seconde.

Ainsi, admettant ce langage de convention, l'on dira que *les quantités et les expressions algébriques*

$$5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5, \ldots$$

sont rangées par ordre de grandeur; que *toute expression négative est plus petite que zéro;* et que *les expressions négatives sont d'autant plus petites que leur valeur numérique absolue est plus grande.*

L'utilité de ces locutions va devenir évidente par une première application qui se présentera d'elle-même (nos 74 et suiv.), lorsque nous aurons admis dans les calculs les *exposants négatifs.*

Exposant zéro. Calcul des exposants négatifs.

69. On a vu (n° 28) que si une lettre a, commune aux deux *termes* d'une division, est affectée d'un plus grand exposant dans le dividende que dans le diviseur, on donne à cette lettre, dans le quotient, un exposant égal à la *différence* des deux exposants proposés. Ainsi, $\frac{a^6}{a^4} = a^{6-4} = a^2$.

Généralement, si l'on suppose $m > n$, on aura $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Considérons maintenant le cas où *les exposants dans le dividende et dans le diviseur sont* ÉGAUX. On aura, par exemple, $\frac{a^6}{a^6} = 1$, et, généralement, $\frac{a^m}{a^m} = 1$, puisque $a^m \times 1 = a^m$.

Le *quotient* est alors égal à l'unité.

D'un autre côté, si l'on veut appliquer à ce cas la même règle que si l'exposant était plus grand dans le dividende que dans le diviseur, on obtient le quotient $\frac{a^6}{a^6}$ sous la forme a^{6-6}, ou a^0, c'est-à-dire que la lettre a, dans le quotient, se trouverait affectée d'un EXPOSANT NUL.

Ce résultat ne présente par lui-même aucun sens. Mais, parce que nous savons qu'alors la vraie valeur du quotient est l'unité, nous pouvons convenir que *le symbole algébrique* a^0 *constituera une manière d'écrire le nombre* 1, considéré comme provenant de la division d'une puissance de a, divisée par elle-même.

Au moyen de cette convention, il deviendra permis d'ÉTENDRE AU CAS DE L'ÉGALITÉ DES EXPOSANTS *de la lettre commune, une règle qui n'avait été d'abord obtenue qu'en supposant les exposants soumis à une condition particulière*, puisque l'exposant devait être plus grand dans le dividende que dans le diviseur.

De cette manière, le quotient $\frac{65a^6b^4c^2d}{5a^4bc^2}$ (n° 28), prendra la forme $13a^2b^3c^0d$; il sera égal à $13a^2b^3 \times 1 \times d$, ou $13a^2b^3d$.

70. Considérons enfin le cas où *l'exposant de la lettre commune est plus grand dans le diviseur que dans le dividende*. On aura, par exemple, $\frac{a^4}{a^6} = \frac{1}{\left(\frac{a^6}{a^4}\right)}$ (n° 52). Donc $\frac{a^4}{a^6} = \frac{1}{a^{6-4}} = \frac{1}{a^2}$.

Généralement, si l'on suppose $m < n$, et $n = m + r$, on aura

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^r}.$$

Le quotient est une fraction qui a pour numérateur l'unité, et pour dénominateur la lettre commune a, affectée d'un exposant égal à la *différence numérique* r, des exposants proposés n et m.

D'un autre côté, si l'on veut appliquer à ce cas la même règle que si l'exposant était plus grand dans le dividende que dans le diviseur, on obtient le quotient $\frac{a^4}{a^6}$ sous la forme a^{4-6}, ou a^{-2}; de même le quotient $\frac{a^m}{a^n}$ se présente sous la forme a^{m-n}, ou $a^{-(n-m)}$, ou a^{-r} (n° 59), c'est-à-dire que la lettre a, dans le quotient, se trouverait affectée d'un EXPOSANT NÉGATIF, *qui est égal à la* DIFFÉRENCE *algébrique*, $m-n$, *des deux exposants proposés*. Ce résultat ne présente par lui-même aucun sens. Mais, parce que nous savons qu'alors la vraie valeur du quotient est $\frac{1}{a^{n-m}}$, ou $\frac{1}{a^r}$, nous pouvons convenir que *le symbole algébrique* a^{-r} *constituera une manière d'écrire la fraction* $\frac{1}{a^r}$, considérée comme provenant de la division d'une puissance de a divisée par une autre puissance de a d'un degré supérieur de r unités.

Au moyen de cette convention, il deviendra permis d'ÉTENDRE AU CAS DE L'INFÉRIORITÉ *de l'exposant dans le dividende, une règle qui n'avait été d'abord obtenue qu'en supposant les valeurs des exposants soumises à une autre condition particulière.*

71. De cette manière, on fait disparaître toute restriction quant à la grandeur relative des exposants positifs d'une lettre dans le dividende et dans le diviseur. On obtient, dans tous les cas, le facteur littéral du quotient d'un monôme divisé par un monôme, *en écrivant toutes les lettres qui entrent soit dans le dividende, soit dans le diviseur, et en donnant à chaque lettre un exposant égal à la* DIFFÉRENCE ALGÉBRIQUE *des exposants dont elle était affectée.*

Ainsi, $\dfrac{a^6b^3c^2d}{a^2b^3c^5e^2} = \dfrac{a^6b^3c^2d^1e^0}{a^2b^3c^5d^0e^2} = a^4b^0c^{-3}d^1e^{-2} = a^4dc^{-3}e^{-2} = \dfrac{a^4d}{c^3e^2}$ (*).

72. Les règles qui déterminent l'exposant d'une lettre dans un produit ou dans un quotient (n° 8 et n° 28) quand tous les exposants sont positifs, s'étendent au cas où l'on admet dans les calculs les *exposants négatifs* et l'exposant *zéro*.

1° *Pour former un* PRODUIT *dont les facteurs sont des puissances positives ou négatives d'une même lettre, écrivez cette lettre et donnez-lui un exposant égal à la* SOMME ALGÉBRIQUE *des exposants dont elle était affectée dans les facteurs.*

Ainsi, le produit $a^m \times a^{-n} \times a^0$, ou $a^{-n}a^m a^0$, sera $a^{-n+m+0} = a^{m-n}$.

Car $a^0 = 1$ (n° 69); $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (n° 70). Donc

$$a^m a^{-n} a^0 = a^m \times \frac{1}{a^n} \times 1 = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ (n° 70).}$$

Le produit $a^{-m} \times a^{-n} \times a^0$ sera $a^{-m-n+0} = a^{-(m+n)}$.

Car $a^{-m} \times a^{-n} \times a^0 = \dfrac{1}{a^m} \times \dfrac{1}{a^n} \times 1 = \dfrac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}$.

2° *Pour former le* QUOTIENT *d'une division dont les deux termes sont des puissances d'une même lettre, écrivez cette lettre et donnez-lui un exposant égal à la* DIFFÉRENCE ALGÉBRIQUE *des exposants dont elle était affectée dans le dividende et dans le diviseur.*

(*) La même règle peut encore s'appliquer aux coefficients numériques. On a, par exemple, $\frac{7}{3} = 7 \times \frac{1}{3} = 7 \times 3^{-1}$.

Ainsi, le quotient $\frac{a^{-m}}{a^n}$ sera $a^{-m-n} = a^{-(m+n)}$; car

$$\frac{a^{-m}}{a^n} = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}.$$

Le quotient $\frac{a^m}{a^{-n}}$ sera $a^{m-(-n)} = a^{m+n}$; car

$$\frac{a^m}{a^{-n}} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m a^n = a^{m+n}.$$

Enfin, le quotient $\frac{a^{-m}}{a^{-n}}$ sera $a^{-m-(-n)} = a^{-m+n} = a^{n-m}$; car

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

73. Si nous appliquons à l'exposant *zéro* et aux *exposants négatifs* le langage dont nous sommes convenus (n° 68), nous pourrons dire que *la puissance* ZÉRO d'une quantité et ses *puissances négatives* sont d'un *degré moindre* que les puissances positives; et que *les puissances négatives d'une quantité sont d'autant plus petites dans leur degré, que les valeurs numériques absolues des exposants sont plus grandes.*

Au moyen de ce langage de convention, nous pourrons considérer les puissances $a^3, a^2, a^1, a^0, a^{-1}, a^{-2}$....., comme *rangées par ordre de grandeur,* quant à leur degré.

74. Il suit de là qu'*un polynôme qui renferme des* TERMES FRACTIONNAIRES *peut être* ORDONNÉ *par rapport aux puissances décroissantes, ou par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre.*

Par exemple, le polynôme $x + a + \frac{b^2}{x} + \frac{c^3}{x^2}$ peut être mis sous la forme

$$x^1 + a \times x^0 + b^2 \times x^{-1} + c^3 \times x^{-2}, \quad \text{ou} \quad c^3 x^{-2} + b^2 x^{-1} + a x^0 + x^1.$$

Multiplication et division des polynômes fractionnaires.

75. MULTIPLICATION. *Lorsque les facteurs d'un produit sont ordonnés, le produit du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, ne peut se réduire avec aucun autre produit partiel; il en est de même du produit du dernier terme du multiplicande par le dernier terme du multiplicateur* (n° 16, 2°).

Soit, par exemple, $a^2x^{-2} - 2ab^2x^{-3} + b^4x^{-4}$ à multiplier par $ax^{-1} + b^2x^{-2}$.

L'exposant de x, dans le produit des premiers termes, est -3. Il est *plus grand* (nº 68) que l'exposant de x dans le produit de tout autre terme du multiplicande par ax^{-1}, parce que l'exposant -2 de x dans le premier terme du multiplicande est *plus grand* que dans les termes suivants. L'exposant -3 est aussi plus grand que l'exposant de x dans le produit d'un terme quelconque du multiplicande par b^2x^{-2}, parce que l'exposant -1 de x dans le premier terme du multiplicateur est plus grand que dans le second terme.

On verra de même que l'exposant -6 de la lettre x dans le produit $b^4x^{-4} \times b^2x^{-2}$ des derniers termes, est *plus petit* (nº 68) que dans aucun autre produit partiel.

Les conséquences seraient les mêmes, si les facteurs étaient ordonnés par rapport aux puissances croissantes de x.

76. Division. Lorsqu'un terme algébrique fractionnaire ne contient pas en dénominateur une lettre x, on dit que ce terme est *entier par rapport à x*.

Les monômes $\frac{2}{5}x$, $\frac{2a^2x}{5b}$ sont *entiers par rapport à x*.

On dit qu'*un polynôme est* ENTIER PAR RAPPORT A UNE LETTRE, lorsque tous les termes de ce polynôme sont *entiers par rapport à cette lettre*.

Il est clair que, si un polynôme est entier par rapport à une lettre x, cette lettre n'est affectée d'un *exposant négatif* dans aucun terme, et réciproquement.

Dans la division algébrique, on se propose souvent, étant donnés un dividende et un diviseur entiers par rapport à une lettre désignée, de trouver, lorsque cela est possible, un quotient *entier par rapport à la même lettre*, et dans lequel les coefficients des puissances de cette lettre peuvent d'ailleurs être fractionnaires, ou admettre des exposants négatifs. S'il existe un tel quotient, composé d'un nombre limité de termes, on dit encore, dans un sens plus étendu qu'au nº 27, que le dividende est *divisible* par le diviseur.

Si le quotient d'une division ne peut pas être *entier par rapport à x*, il est possible qu'il existe un quotient exact qui renferme des puissances négatives de x, et qui se compose d'un nombre limité de termes monômes.

Enfin, il peut arriver qu'il n'existe pas de polynôme, même en admettant des puissances négatives de x, qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende.

Or, dans tous les cas, si l'on applique la *règle de la division* (nºs 30, 32), l'on obtiendra la valeur exacte du quotient, ou bien l'on sera conduit à reconnaître l'impossibilité de la division, comme nous allons l'expliquer.

77. On a vu (nos 31, 38) que toute la théorie de la division repose sur ce principe que le dividende, le diviseur et le quotient étant ordonnés d'une même manière par rapport à une lettre, *le premier terme du dividende ou produit donné, est le produit du premier terme du diviseur par le premier terme du quotient.*

Or, ce principe vient d'être étendu (n° 75) à un produit de facteurs dont les termes peuvent renfermer des puissances négatives de la lettre principale.

Donc, *s'il existe un polynôme entier ou fractionnaire, qui, multiplié par le diviseur, doive reproduire le dividende*, on obtiendra successivement tous les termes de ce quotient exact, en opérant selon la règle de la division (n° 30). Dans ce cas, l'on parviendra à un *reste nul* (n° 31), et alors l'opération sera terminée.

78. *Lorsqu'une division est* IMPOSSIBLE (nos 27, 35), en ce sens qu'il n'existe pas de polynôme ENTIER *par rapport à la lettre principale*, qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende, *il n'est pas permis d'en conclure que la division ne se terminera pas* si l'on admet au quotient des puissances négatives.

Il peut au contraire arriver dans ce cas qu'on parvienne à un *reste nul*, en appliquant la règle du n° 30, étendue aux puissances négatives de la lettre principale (n° 77); de sorte qu'il peut exister un quotient fractionnaire exact, composé d'un nombre limité de termes monômes. En voici un exemple.

Soit le dividende $A=2x^7-4x^6-x^5+6x^4-11x^3+40x^2-35x-42$,
et le diviseur $B=2x^4-7x^2$.
Il est clair que A n'est pas *divisible* par B (n° 27 et n° 76), c'est-à-dire qu'il n'existe pas de polynôme ENTIER *par rapport à* x, qui, multiplié par B, reproduise A.

Car les deux termes A, B, et le quotient Q étant ordonnés par rapport à x, le dernier terme de A, qui est -42, ou $-42\times x^0$, devrait (n° 75) être le produit du dernier terme $-7x^2$ du diviseur B par le dernier terme z du quotient Q. Il faudrait donc que la somme algébrique des exposants de x dans les termes $-7x^2$ et z, fût égale à l'exposant *zéro;* ce qui exigerait absolument que l'exposant de x dans le terme z fût négatif. Donc Q ne peut pas être un polynôme *entier par rapport à* x.

Il suit de là que si l'on ordonne A et B par rapport aux puissances décroissantes de x, et si l'on applique la règle du n° 30, on devra rencontrer le *caractère d'impossibilité* de la division exacte, que nous avons établi, n° 35.

	Dividende A.	Diviseur B.
	$2x^7-4x^6-x^5+6x^4-11x^3+40x^2-35x-42$	$2x^4-7x^2$
	$-2x^7 \quad +7x^2$	x^3-2x^2+3x-4
1er reste.	$-4x^6+6x^5+6x^4-11x^3+40x^2-35x-42$	$+5x^{-1}+6x^{-2}$
	$+4x^6 \quad -14x^5$	
2e reste.	$6x^5-8x^4-11x^3+40x^2-35x-42$	
	$-6x^5 \quad +21x^3$	
3e reste.	$-8x^4+10x^3+40x^2-35x-42$	
	$+8x^4 \quad -28x^2$	
4e reste.	$10x^3+12x^2-35x-42$	
	$-10x^3 \quad +35x$	
5e reste.	$12x^2 \quad -42$	
	$-12x^2 \quad +42$	
6e reste.	0	

C'est en effet ce qui arrive. On parvient à un reste $10x^3+12x^2-35x-42$ qui est d'un degré moindre que celui du diviseur B.

Il se trouve ainsi vérifié qu'il n'existe pas de quotient *entier* qui reproduise A.

Mais si l'on continue la division (n° 77), en prenant pour dividende le dernier reste obtenu, et en admettant au quotient des puissances négatives de x, on arrive à un *reste nul* après deux divisions partielles, et l'on trouve que le dividende A est égal au produit du diviseur $2x^4-7x^2$ par le polynôme fractionnaire

$$x^3-2x^2+3x-4+5x^{-1}+6x^{-2},$$

ou $$x^3-2x^2+3x-4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}.$$

79. *Le* CARACTÈRE D'IMPOSSIBILITÉ *de la division entre deux polynômes* A, B, *ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre x, tel qu'on l'a établi* (nos 35, 38), *sert donc seulement à reconnaître qu'il n'existe pas de quotient* ENTIER *par rapport à x.*

Il devient par conséquent nécessaire d'établir un autre caractère auquel on puisse reconnaître qu'une division proposée est *absolument impossible*, c'est-à-dire qu'on ne parviendra jamais à un reste nul, même en admettant au quotient des puissances négatives de la lettre principale.

80. *Si, ayant ordonné* A *et* B, *par rapport aux puissances dé-*

croissantes de la lettre x, *on applique les règles de la division, et qu'on soit conduit à poser au quotient un terme dans lequel l'exposant de* x *soit* ALGÉBRIQUEMENT PLUS PETIT (n° 68) *que la* DIFFÉRENCE *des exposants de cette lettre dans le dernier terme de* A *et dans le dernier terme de* B, *on en conclura que l'opération ne pourra jamais se terminer.*

En effet, après chacune des soustractions dans lesquelles on retranche du dividende le produit du diviseur par le quotient partiel obtenu, le premier terme du dividende partiel est détruit. Donc les degrés des dividendes successifs ou des restes deviennent *de plus en plus petits* (n° 68), tandis que le degré du diviseur est invariable. Il suit de là que les quotients partiels sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, et que leurs degrés sont constamment décroissants. Il y aura donc un nombre limité de divisions après lesquelles, en supposant qu'on n'ait pas eu de *reste nul*, on sera conduit à mettre au quotient un terme dans lequel l'exposant de x sera moindre que la différence algébrique des exposants de cette lettre dans les derniers termes respectifs de A et de B. Lorsque cela arrive, la puissance de x, dans le produit de ce quotient partiel par le dernier terme de B est *plus petite* que la puissance de x dans le dernier terme de A. Donc, à plus forte raison, la puissance de x dans les produits du dernier terme de B par chacun des quotients partiels qu'on obtiendrait ultérieurement, serait *plus petite* que la puissance de x dans le dernier terme de A. Il est donc impossible qu'on obtienne jamais au quotient un *dernier terme*, dont le produit par le dernier terme du diviseur devrait être égal au dernier terme du dividende (n° 75).

81. On doit remarquer un cas particulier, dans lequel il faut conclure l'*impossibilité absolue* de la division, de ce qu'on est parvenu à un reste d'un degré moindre que celui du diviseur; de sorte que, dans ce cas, l'impossibilité d'un quotient *entier*, par rapport à x (n° 38), suffit pour prouver que la division ne se terminera pas, même en admettant des puissances négatives au quotient.

Cela a lieu, par exemple, lorsque le dividende A et le diviseur B, ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, ont l'un et l'autre un dernier terme *indépendant de x.*

En effet, lorsqu'on est parvenu à un reste R dont le degré est inférieur à celui du diviseur, si on continue la division, l'on est conduit à mettre au quotient un terme dans lequel x sera affecté d'un *exposant négatif*. Or, les derniers termes du dividende et du diviseur étant indépendants de x, on peut les considérer comme multipliés par x^0, ou par l'unité (n° 69). La différence des exposants de x dans ces derniers termes est donc *zéro*; par conséquent on a mis au quotient un terme dans lequel l'exposant de x, qui est négatif, est *moindre* que la différence des exposants de x dans les derniers termes de A et de B.

La condition générale d'impossibilité (n° 80) est donc remplie.

Dans l'exemple donné au n° 35, le dividende a pour dernier terme 6 ou $6 \times x^0$; le diviseur a pour dernier terme 2 ou $2 \times x^0$. On est parvenu au reste $2x + 6$, dont le degré est inférieur à celui du diviseur $x^3 - x + 2$, ce qui prouve que le quotient ne peut être *entier*. De plus, si l'on continue la division, on obtient le quotient fractionnaire $2x^{-2}$ ou $\frac{2}{x^2}$, dans lequel l'exposant -2 de x est *plus petit* que la différence, *zéro*, des exposant de x dans les derniers termes $6 \times x^0$ et $2 \times x^0$. Donc la division ne se terminera pas; la suite des quotients partiels affectés d'exposants négatifs serait indéfinie.

Dans l'exemple donné au n° 78, la division s'est terminée, quoique l'on fût parvenu à un reste $10x^3 + 12x^2 - 35x - 42$ d'un degré inférieur à celui du diviseur. Mais le dernier terme $-7x^2$ du diviseur n'était pas indépendant de x, en même temps que le dernier terme -42 du dividende.

Le dernier terme du dividende était d'un degré *moindre* par rapport à x, que le dernier terme du diviseur.

82. Généralement, *l'impossibilité reconnue d'obtenir un polynôme* ENTIER *pour quotient, entraînera l'impossibilité absolue de la division, lorsque l'exposant de la lettre principale*, x, *ne sera pas* MOINDRE *dans le dernier terme du dividende que dans le dernier terme du diviseur.*

En effet, soit m l'exposant de x dans le dernier terme du dividende,
n l'exposant de x dans le dernier terme du diviseur.

Qu'on soit parvenu à un reste R d'un degré moindre que celui du diviseur, par rapport à x. En divisant le premier terme de R par le premier terme du diviseur, qui est d'un degré supérieur, on obtiendra un quotient partiel dans lequel l'exposant de x sera une expression négative, $-p$. Si donc on multiplie ce quotient partiel par le dernier terme du diviseur, l'exposant de x dans le produit sera $-p + n < n$. Donc, si l'on a $m = n$ ou bien $m > n$, il en résulte que la somme algébrique $-p + n$ est moindre que m.

A plus forte raison, si l'on continue la division, ce qui donnera au quotient des termes dont les degrés, $-p'$, $-p''$,... seront de plus en plus petits, les sommes $-p' + n$, $-p'' + n$, etc., seront moindres que m. Il est donc certain qu'il n'existe pas de quotient partiel qui soit le *dernier terme* du quotient cherché.

83. Lorsqu'au contraire l'exposant de la lettre principale x SERA MOINDRE *dans le dernier terme du dividende que dans le dernier terme du diviseur*, et qu'on aura reconnu l'impossibilité d'obtenir un quotient *entier* par rapport à x, on ignorera encore si l'opération pourrait ou ne pourrait pas se terminer. Alors, on continuera la division jusqu'à ce qu'on parvienne à un *reste nul*, ou jusqu'à ce qu'on rencontre le caractère général d'impossibilité absolue (n° 80).

On a vu (n° 78) un exemple d'une division qui se termine dans ce cas.

Voici un exemple d'une division qui ne se terminera jamais, quoique l'exposant de x soit moindre dans le dernier terme du dividende que dans le dernier terme du diviseur.

La différence des exposants des derniers termes est -2, et l'on est conduit à mettre au quotient un terme affecté de l'exposant $-3<-2$.

$$
\begin{array}{l r|l}
 & x^4-x^3+x+4 & x^3-x^2 \\
 & -x^4+x^3 & \overline{x+x^{-2}+5x^{-3}\ldots\ldots} \\
\cline{2-2}
\text{1}^{\text{er}}\text{ reste.} & x+4 & \\
 & -x+1 & \\
\cline{2-2}
\text{2}^{\text{e}}\text{ reste.} & 5 &
\end{array}
$$

84. Dans l'exemple du n° 78, si l'on ordonne les deux termes A et B par rapport aux *puissances* CROISSANTES de x, on reconnaît immédiatement la nécessité d'admettre dans le quotient des puissances négatives ; et si l'on effectue l'opération selon la règle (n° 30), on obtient le quotient exact $6x^{-2}+5x^{-1}-4+3x-2x^2+x^3$.

85. Lorsqu'on ordonne le dividende et le diviseur par rapport aux *puissances* CROISSANTES d'une lettre, le caractère d'impossibilité absolue de la division est le même (n° 37) que s'il s'agissait d'obtenir un quotient entier par rapport à la lettre principale.

On reconnaît que la division est impossible lorsqu'on a été conduit à poser au quotient un terme dans lequel l'exposant de x *est algébriquement* PLUS GRAND (n° 68) *que la* DIFFÉRENCE *des exposants de cette lettre dans les derniers termes respectifs du dividende et du diviseur.*

La démonstration est la même qu'au n° 37.

Dans l'exemple du n° 35, on a déjà vu que la division est absolument impossible (n° 81).

Maintenant, ordonnons les deux termes A et B par rapport aux *puissances* CROISSANTES de x.

$$
\begin{array}{l|l}
\phantom{\text{1}^{\text{er}}\text{ reste. }} 6+4x+3x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots + 2x^5 + x^6 & 2-x+x^3 \\
\phantom{\text{1}^{\text{er}}\text{ reste. }} -6+3x \qquad -3x^3 & \hline 3+\frac{7}{2}x+\frac{13}{4}x^2+\frac{1}{8}x^3\ldots \\
\hline
\text{1}^{\text{er}}\text{ reste. } 7x+3x^2-3x^3 \qquad +2x^5+x^6 & \\
\phantom{\text{1}^{\text{er}}\text{ reste. }} -7x+\frac{7}{2}x^2 \qquad -\frac{7}{2}x^4 & \\
\hline
\text{2}^{\text{e}}\text{ reste. } \qquad \frac{13}{2}x^2-3x^3-\frac{7}{2}x^4+2x^5+x^6 & \\
\qquad\qquad -\frac{13}{2}x^2+\frac{13}{4}x^3 \qquad -\frac{13}{4}x^5 & \\
\hline
\text{3}^{\text{e}}\text{ reste. } \qquad\qquad \frac{1}{4}x^3-\frac{7}{2}x^4-\frac{5}{4}x^5+x^6 & \\
\qquad\qquad\qquad -\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{8}x^4 \qquad -\frac{1}{8}x^6 & \\
\hline
\text{4}^{\text{e}}\text{ reste. } \qquad\qquad\qquad -\frac{27}{8}x^4-\frac{5}{4}x^5+\frac{7}{8}x^6 &
\end{array}
$$

On obtient d'abord au quotient le polynôme $3+\frac{7}{2}x+\frac{13}{4}x^2+\frac{1}{8}x^3$.

Le reste correspondant est $-\frac{27}{8}x^4-\frac{5}{4}x^5+\frac{7}{8}x^6$, de sorte qu'on est conduit ensuite à mettre au quotient le terme $-\frac{27}{16}x^4$, dont le degré est supérieur à la différence 3 des exposants de x dans les derniers termes x^6 et x^3 du dividende et du diviseur.

L'impossibilité de la division est alors évidente ; l'opération ne se terminera pas, car elle donnerait une suite de quotients partiels qui renfermeraient tous une puissance de x supérieure à la troisième puissance. Donc aucun d'eux, multiplié par le dernier terme x^3 du diviseur ne pourrait reproduire le dernier terme x^6 du dividende.

Le quotient exact est

$$3+\frac{7}{2}x+\frac{13}{4}x^2+\frac{1}{8}x^3+\left(\frac{-\frac{27}{8}x^4-\frac{5}{4}x^5+\frac{7}{8}x^6}{2-x+x^3}\right)$$

Dans l'exemple du nº 83, ordonnons encore par rapport aux puissances croissantes de x.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4+x & & -x^3 & +x^4 & & -x+x^3 \\ \cline{6-6}
-4 & +4x^2 & & & & -4x^{-1}-1-4x\ldots. \\ \cline{1-4}
x & +4x^2 & -x^3 & +x^4 & & \\
-x & & +x^3 & & & \\ \cline{1-4}
 & 4x^2 & & +x^4 & & \\
 & -4x^2 & & +4x^4 & & \\ \cline{2-4}
 & & & 5x^4 & &
\end{array}
$$

On obtient d'abord au quotient le polynôme fractionnaire $-4x^{-1}-1-4x$ ou $\frac{-4}{x}-1-4x$ Le reste correspondant est $5x^4$, de sorte qu'on est conduit à mettre au quotient le terme $-5x^3$, dont le degré est supérieur à la différence 1 des exposants de x dans les derniers termes x^4 et x^3 du dividende et du diviseur.

Donc la division ne se terminera pas.

86. Lorsque la division ne se termine pas, il faut ne point oublier d'écrire, à la suite du quotient partiel obtenu, la *fraction complémentaire* qui a pour numérateur le dernier reste obtenu, et pour dénominateur le diviseur proposé.

Si, par exemple, on divise $1+x$ par $1-x$, on obtient une série indéfinie de termes tous affectés du signe $+$. Attribuons à x une valeur positive quelconque, plus grande que l'unité. Le dividende $1+x$ étant positif, et le diviseur $1-x$ étant alors négatif, le quotient sera *négatif*. Cependant, il se présente sous forme de la quantité *positive* $1+2x+2x^2+2x^3+$ etc.

$$
\begin{array}{lccccc|l}
 & 1+x & & & & & 1-x \\ \cline{7-7}
1^{\text{er}}\ \text{reste} & & 2x & & & & 1+2x+2x^2+2x^3+\ldots. \\
2^{\text{e}}\ \text{reste} & & & 2x^2 & & & \\
3^{\text{e}}\ \text{reste} & & & & 2x^3 & & \\
4^{\text{e}}\ \text{reste} & & & & & 2x^4 &
\end{array}
$$

Mais la vraie valeur du quotient, en s'arrêtant au quatrième terme obtenu, est $1+2x+2x^2+2x^3+\frac{2x^4}{1-x}$; et la *fraction complémentaire* $\frac{2x^4}{1-x}$ est *négative*, lorsque x surpasse l'unité. Ainsi la contradiction disparaît; rien ne s'oppose à ce que le quotient complet donne un résultat négatif.

Qu'on suppose $x=2$, on a $\frac{1+2}{1-2}=\frac{3}{-1}=-3$. D'ailleurs

$$\frac{1+2}{1-2}=1+4+8+16+\frac{2\times 2^4}{1-2}=29+\frac{2\times 16}{1-2};$$

la fraction complémentaire se réduit à $\frac{+32}{-1}=-32$; et en effet, $29-32=-3$.

De même, pour le quotient $\frac{4+x-x^3+x^4}{-x+x^3}=-\frac{4}{x}-1-4x-$etc., on obtient une série indéfinie de termes affectés du signe —. Supposons $x=2$. La valeur du dividende se réduit à $+14$, et celle du diviseur à $+6$. On aurait donc $\frac{14}{6}=\frac{7}{3}=-2-1-8-$ etc?

Mais la vraie valeur du quotient, lorsqu'on s'arrête au troisième terme obtenu est $-\frac{4}{x}-1-4x+\frac{5x^4}{-x+x^3}$. La fraction complémentaire $\frac{5x^3}{-1+x^2}$ est *positive* lorsque x surpasse l'unité. Pour la valeur $x=2$, cette fraction devient $+\frac{40}{3}=13+\frac{1}{3}$; et en effet

$$-2-1-8+\left(13+\frac{1}{3}\right)=-11+13+\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}.$$

CHAPITRE TROISIÈME.

ÉQUATIONS. PREMIER DEGRÉ. INÉGALITÉS.

Des équations en général.

87. **Identité.** On dit que deux quantités ou deux expressions algébriques sont *identiques*, lorsqu'elles sont composées des mêmes termes affectés des mêmes signes.

Deux quantités identiques composent une *identité* dont elles sont les deux *membres*.

Les relations $x^2-3x+2=x^2-3x+2$; $2\times3-6=2\times3-6$; $0=0$, sont des *identités*.

Égalité. Deux expressions numériques ou algébriques sont *égales* si elles diffèrent seulement par leur forme, de sorte qu'elles deviennent *identiques* lorsqu'on aura effectué les opérations indiquées dans chacune d'elles.

Deux expressions *égales* composent une *égalité* dont elles sont le deux *membres*.

Les relations $2\times3=6$, $2\sqrt{9}=5+1$, $(x-1)\times(x-2)=x^2-3x+2$, sont des *égalités*.

Toute égalité se change en une identité absolue lorsque les opérations indiquées dans chacun des deux membres ont été effectuées. Par cette raison, l'on appelle souvent *expressions identiques* des expressions qui, dans leur forme actuelle, sont seulement *égales*.

On dira, en ce sens, que le produit $(x-1)\times(x-2)$ est *identique* au polynôme x^2-3x+2.

Équation. Deux expressions algébriques qui renferment une ou plusieurs lettres et qui ne sont pas *égales* généralement, peuvent devenir égales lorsqu'on attribue à certaines lettres des valeurs particulières convenables. Par exemple, les expressions $3x$ et x^2+2 ne sont pas *égales*, parce que la première ne représente pas la même valeur que la seconde pour toutes les valeurs que l'on peut attribuer à x. Mais elles deviendront égales si l'on suppose $x=1$, car on aura l'égalité $3\times 1=1^2+2$, ou l'identité $3=3$. Elles deviendront encore égales si l'on suppose $x=2$, car on aura $3\times 2=2^2+2$, ou $6=6$.

De même, les expressions $2x+5$ et $13-y$ ne sont pas *égales*, mais elles deviendront les deux membres d'une *égalité* si l'on suppose en même temps $x=3$ et $y=2$; car on aura $2\times 3+5=13-2$, ou $11=11$.

Lorsqu'on ne connaît pas les valeurs particulières qu'il faudrait attribuer à des lettres, pour rendre *égales* deux expressions algébriques dans lesquelles entrent ces lettres, et qu'on se propose de découvrir ces valeurs particulières, on dit que les deux expressions algébriques forment une ÉQUATION dont elles sont les *membres*. Quoique l'*égalité* n'existe pas actuellement, on les joint par le signe $=$; c'est une indication de la question proposée. On exprime ainsi qu'*il s'agira d'établir entre les deux membres l'état d'égalité*.

Supposons, par exemple, qu'on demande un nombre tel que, si l'on augmente son carré de deux unités, on ait une somme trois fois plus grande que le nombre cherché.

Désignons par x le nombre dont il s'agit (*). Son carré sera représenté par x^2; et, pour que la question soit résolue, il faudra que la somme x^2+2 soit égale au produit $3x$. C'est ce qu'on exprime en disant qu'*on a l'équation* $x^2+2=3x$ *à résoudre*.

Résoudre une équation c'est déterminer toutes les expressions, numériques ou algébriques, qui, mises dans l'équation à la place des inconnues, rendent le premier membre *égal* au second; de sorte qu'après la substitution, l'équation est changée en une égalité, en une identité.

Lorsqu'une équation ne renferme qu'une inconnue, toute expression qui, étant mise à la place de l'inconnue dans les deux membres, change l'équation en une égalité, s'appelle RACINE de l'équation. Les nombres 1, 2, sont *racines* de l'équation $x^2+2=3x$; on dit aussi que cette équation *est satisfaite* par la valeur $x=1$, ou par la valeur $x=2$.

Si les deux membres d'une *équation* à une inconnue étaient *égaux*

(*) On représente ordinairement les quantités *inconnues* par les dernières lettres de l'alphabet, x, y, z, t, u.

par eux-mêmes, l'équation admettrait une infinité de racines, et l'on dirait que c'est une équation *indéterminée*. Qu'on propose, par exemple, de trouver une valeur de x qui satisfasse à l'équation $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$. Si l'on effectue la multiplication algébrique indiquée dans le premier membre, il devient identiquement égal au second membre. L'équation sera donc satisfaite, quelque valeur qu'on veuille attribuer à x. Cette équation est *indéterminée*.

Lorsqu'une équation renferme plus d'une inconnue, le système des valeurs particulières attribuées en même temps à chacune des inconnues, qui change l'équation en une égalité, forme une SOLUTION de cette équation. Le système des valeurs $x=3$, $y=2$, forme une *solution* de l'équation $2x+5=13-y$.

Il peut se faire, par une contradiction entre les deux membres d'une équation, qu'il n'existe pas de valeurs numériques calculables, qui, mises à la place des inconnues, puissent satisfaire à cette équation. On dit alors que la résolution numérique de l'équation est impossible, ou, pour abréger, que *l'équation est impossible* (voy. n° 98, 1°).

L'équation $3x+2=3x+5$ est impossible, ainsi que l'équation $x+y=x+y+2$.

Lorsque deux équations, $A=B$, $A'=B'$, admettent *nécessairement* les mêmes racines, de sorte que toute racine de l'une soit racine de l'autre, et réciproquement, on dit que ces deux équations sont ÉQUIVALENTES. Deux équations à plusieurs inconnues sont *équivalentes* lorsque toute solution de l'une est solution de l'autre, et réciproquement.

88. Il est évident que les équations $A=B$, $A+M=B+M$, sont équivalentes, c'est-à-dire qu'*on peut ajouter aux deux membres d'une équation, ou en retrancher une même quantité, sans que les* RACINES *soient changées*.

Ce principe permet de substituer à l'équation proposée une équation plus simple, en opérant la *réduction* des termes semblables qui peuvent se trouver dans les deux membres.

Soit, par exemple, l'équation $x^3+7x+4x^2+8=10x+3x^2+6+x^3$. Si l'on retranche des deux membres la quantité $x^3+7x+3x^2+6$, l'équation se réduit à $x^2+2=3x$.

En général, si l'on *retranche* des deux membres un des termes *additifs*, ce terme sera détruit dans le membre où il se trouvait, et il sera introduit comme terme *soustractif* dans l'autre membre.

Si l'on *ajoute* aux deux membres la valeur absolue d'un des termes *soustractifs*, ce terme sera détruit dans le membre où il se trouvait, et il sera introduit comme terme *additif* dans l'autre membre.

On voit par là qu'*il est permis de supprimer des termes dans le membre où ils se trouvent, pourvu qu'on les écrive affectés d'un* SIGNE CONTRAIRE *dans l'autre membre*. On dit alors qu'*on a fait passer* ces termes d'un membre dans l'autre, ou qu'on en a opéré la TRANSPOSITION.

Si l'on fait passer tous les termes du second membre dans le premier, on ramène l'équation $A=B$ à la forme $A-B=0$, ou $A'=0$. Par exemple, l'équation $x^2-3x+2=0$ est équivalente à l'équation $x^2+2=3x$.

Si l'on fait passer tous les termes du second membre dans le premier, et tous les termes du premier membre dans le second, il arrive que tous les termes de l'équation ont changé de signe. Ainsi, *l'on peut changer les signes de tous les termes d'une équation sans que les racines soient altérées*.

89. Désignons par N une quantité connue, positive ou négative, mais dont la valeur numérique est différente de *zéro*.

Les équations $A=B$, $A\times N=B\times N$, $A\times\frac{1}{N}=B\times\frac{1}{N}$ seront évidemment équivalentes; c'est-à-dire qu'*on peut multiplier ou diviser les deux membres d'une équation par une même quantité connue et finie, sans que les racines soient altérées*.

Ce principe permet de substituer à une équation dans laquelle les puissances de l'inconnue ont des coefficients numériques fractionnaires, une autre équation dont les coefficients sont des quantités entières. On dit alors qu'*on a fait évanouir les dénominateurs*, ou qu'*on a chassé les dénominateurs*.

Soit l'équation $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}x$. Si l'on multiplie les deux membres par 6, on a l'équation équivalente $x^2+2=3x$.

Soit encore l'équation à une seule inconnue $\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{a}{a-b}=\frac{x}{a+b}$, dans laquelle a, b, désignent des quantités connues qui sont inégales. Multipliant les deux membres par a^2-b^2, on aura l'équation équivalente $x^2+a(a+b)=(a-b)x$.

Généralement, *on fera disparaître les dénominateurs en multipliant les deux membres de l'équation par une quantité qui soit divisible par chacun des dénominateurs*.

En vertu du même principe, si tous les termes de l'équation proposée sont des nombres entiers divisibles par un même nombre, on pourra simplifier l'équation.

Soit, par exemple, l'équation $343x^2+686=1029x$. Tous les termes sont divisibles par 343. On remplacera l'équation proposée par l'équation $x^2+\frac{686}{343}=\frac{1029x}{343}$ qui se réduit à $x^2+2=3x$.

Enfin, appliquant le principe, on pourra donner à une puissance de x dont le coefficient n'est pas nul, un coefficient égal à l'unité.

Ainsi, l'équation $9x^2+2=9x$ peut être remplacée par l'équation $x^2+\frac{2}{9}=x$. Les racines seront les mêmes.

90. *Lorsque la quantité* N *renferme une inconnue, on ne peut plus affirmer que les deux équations* $A=B$ et $A\times N=B\times N$ *soient équivalentes.*

En effet, l'équation $A\times N=B\times N$ n'admet pas seulement les racines qui rendent A égal à B; elle admet encore évidemment pour racines les valeurs de x qui rendent *nul* le facteur N, c'est-à-dire les racines de l'équation $N=0$.

Or, ces dernières racines de l'équation transformée, $A\times N=B\times N$, peuvent ne pas être racines de l'équation primitive, $A=B$.

Si donc on veut encore substituer à l'équation $A=B$, l'équation $AN=BN$, qui ne lui est pas équivalente, il faudra se rappeler que les valeurs de x qui annulent le facteur N qu'on a introduit, peuvent ne pas être racines de l'équation proposée $A=B$.

Soit, par exemple, l'équation $x^2+2=3x$, dont on multiplie les deux membres par $x-3$. Il en résulte une nouvelle équation $(x^2+2)\times(x-3)=3x(x-3)$, ou $x^3-6x^2+11x=6$, à laquelle satisfont les valeurs $x=1$ et $x=2$, qui sont des racines de l'équation primitive.

Mais en outre, l'équation transformée est satisfaite lorsqu'on suppose $x=3$, ou bien $x-3=0$; et cette racine 3 de l'équation transformée n'est pas racine de l'équation primitive.

De même, *Si l'on élève à une même puissance les deux membres d'une équation, l'équation qui en résulte peut n'être pas équivalente à la proposée.*

Soit l'équation $x-3=2$, qui est satisfaite lorsqu'on suppose $x=5$. Si l'on élève les deux membres au carré, on forme une nouvelle équation $(x-3)^2=4$, ou $x^2-6x+5=0$, qui est encore satifaite par la valeur $x=5$; mais l'équation transformée admet en outre la racine $x=1$, qui ne satisfait pas à l'équation $x-3=2$.

Il suit encore de là que *si l'on extrait la racine d'un même degré des deux membres d'une équation, l'équation resultante peut n'être pas équivalente à la proposée*

Car, si l'on extrait la racine carrée des deux membres de l'équation $(x-3)^2=4$, et qu'on forme l'équation $x-3=2$, cette dernière équation n'admettra pas la racine $x=1$ qui satisfait à la première.

91. *Lorsque la quantité* N *se réduit à* ZÉRO, *les équations* $A=B$, $A\times N=B\times N$ *ne sont pas équivalentes.* La seconde équation est *indéterminée.*

Concevons qu'on remplace x par une valeur qui donne pour A et B des résultats différents. L'équation $A=B$ ne sera pas satisfaite. Au contraire, l'équation $A\times N=B\times N$ sera satisfaite, puisque le facteur N étant nul, les deux produits AN, BN seront nuls.

Soit, par exemple, l'équation $x-3=2$. Si l'on multipliait les deux membres par la quantité $7\times 2^3\times 3^2-21\times 24$, sans faire attention que cette quantité se réduit à *zéro*, l'on formerait une nouvelle équation qui reviendrait à $(x-3)\times 0=2\times 0$; l'équation transformée se trouverait satisfaite, quelque valeur que l'on attribuât à x; elle serait *indéterminée.*

Supposons $x=10$. On aurait $(10-3)\times 0=2\times 0$, ou $0=0$; mais il serait absurde d'en conclure que 10 soit racine de l'équation $x-3=2$, c'est-à-dire que 7 soit égal à 2.

Il est de même évident qu'*on ne doit pas diviser les deux membres d'une équation par une quantité* N *sans s'être assuré que cette quantité n'est pas nulle.*

92. On distingue différentes classes d'équations, d'après le degré des puissances auxquelles les inconnues se trouvent élevées.

Supposons une équation telle qu'aucune inconnue n'entre ni dans le dénominateur d'aucun terme, ni dans une quantité dont il faudrait extraire la racine; et concevons qu'après avoir effectué les *opérations algébriques* indiquées, l'on ait fait la réduction des termes semblables dans les deux membres.

La somme des exposants des inconnues, dans le terme où cette somme est la plus grande, est ce qu'on entend alors par le DEGRÉ *de l'équation*. Par suite, si l'équation ne renferme qu'une inconnue, le *degré de l'équation* est égal au plus grand exposant de l'inconnue.

Ainsi, par exemple, les équations $5x=35$, $ax=b$; $2x=8-y$, $ax+by=c$, sont du *premier degré*, si les lettres a, b, c, représentent des quantités connues.

Les équations $x^2+2=3x$, $ax^2+bx=c$; $xy=20$, $axy+bx=c$, sont du *second degré*, si les lettres a, b, c, représentent des quantités connues.

L'équation $x^3+2=x(x^2-x+3)$ *n'est pas du troisième degré;*

car si l'on effectue, dans le second membre, la multiplication indiquée, on pourra retrancher x^3 des deux membres sans altérer les racines. L'équation à résoudre sera l'équation du *second degré*

$$2 = 3x - x^2.$$

Le terme en x^3, qui disparait, ne devait pas servir à déterminer le *degré* de l'équation, parce qu'il ne peut exercer aucune influence sur la méthode de résolution.

Les équations $x - \frac{2}{x} = 3$, $x - \sqrt{(x-1)} = 3$, *ne sont pas des équations du premier degré*, quoique la lettre x soit actuellement affectée d'un exposant égal à l'unité; car dans la première, x entre dans le dénominateur d'un terme, et dans l'autre, x entre dans la quantité $x - 1$ dont il faudrait extraire la racine carrée.

La raison de cette exclusion est que la méthode par laquelle on résout les *équations du premier degré* n'est pas applicable aux équations dont il s'agit.

93. Une équation est *complète* lorsqu'elle renferme un terme indépendant de l'inconnue, et toutes les puissances de l'inconnue jusqu'à celle qui détermine le degré de l'équation.

Ainsi, l'équation $x^2 + 2 = 3x$, ou $x^2 - 3x + 2 = 0$, est une équation du second degré *complète*.

Dans le cas contraire, l'équation est *incomplète*.

Si une équation incomplète ne renferme, outre le terme inconnu qui détermine le degré, qu'un terme indépendant de l'inconnue; on l'appelle *équation à deux termes*.

Ainsi, les équations $x^2 = 4$, $25x^2 = 9$, sont des équations du second degré *à deux termes*,

94. On appelle *équation* LITTÉRALE une équation dans laquelle les quantités qu'on suppose connues peuvent être représentées par des lettres. Telle est l'équation $ax^2 + bx = c$.

Une équation dans laquelle toutes les quantités données sont des nombres actuellement exprimés en chiffres, est une *équation* NUMÉRIQUE.

Équations du premier degré à une seule inconnue.

95. Pour résoudre une question du premier degré à une inconnue, *chassez les dénominateurs, effectuez les opérations indiquées, faites passer dans un même membre tous les termes affectés de l'in-*

connue, et tous les autres termes dans l'autre membre; réduisez tous les termes affectés de l'inconnue, en un seul terme, qui sera le produit de l'inconnue par une quantité connue; enfin, divisez les deux membres par le coefficient de l'inconnue: le quotient exprimera la valeur cherchée.

En effet, il résulte des principes précédemment établis, qu'en effectuant cette suite d'opérations, l'on a seulement remplacé l'équation proposée par des équations équivalentes. Or, la dernière est de la forme $x=\frac{B}{A}$, les quantités A, B, étant ou des nombres connus, ou des monômes, ou des polynômes qui représentent des quantités connues. Cette dernière équation a pour racine unique le quotient $\frac{B}{A}$; donc l'équation proposée admet aussi pour racine la quantité $\frac{B}{A}$, et elle n'en admet pas d'autre.

96. Appliquons cette règle à quelques exemples. Soit à résoudre l'équation numérique

$$3x-\frac{2}{5}+0,1\times x+\frac{7}{2}x=\frac{17}{15}x+2-x+\frac{1}{3}\times 6,8x \qquad (1)$$

On reconnait que tous les termes deviendront entiers, si on les multiplie par 30, ce qui n'altère pas les racines. On en déduit l'équation

$$30\times 3x-6\times 5\times\frac{2}{5}+3\times 10\times 0,1x+15\times 2\times\frac{7}{2}x$$
$$=2\times 15\times\frac{17}{15}x+30\times 2-30x+10\times 3\times\frac{1}{3}\times 6,8x,$$

ou bien $\quad 90x-12+3x+105x=34x+60-30x+68x,$

laquelle se réduit à $\quad 198x-12=60+72x. \qquad (2)$

Tous les termes de l'équation (2) seront encore entiers si on les divise par 2, ce qui donne l'équation équivalente

$$99x-6=30+36x. \qquad (3)$$

Faisant passer $36x$ dans le premier membre, et -6 dans le second, on a encore l'équation équivalente $99x-36x=36+6$ ou $63x=36$ (4), dont les deux membres sont divisibles par 9. De là, l'équation équivalente (5).... $7x=4$, et enfin $x=\frac{4}{7}$.... (6).

Or, il est évident qu'aucune expression, autre que le nombre $\frac{4}{7}$, mise à la place de x, ne peut satisfaire à l'équation (6), qui a pour racine ce nombre $\frac{4}{7}$. Donc aussi l'équation (1) admet la racine $x=\frac{4}{7}$, et n'en admet pas d'autre. *Cette équation est résolue.*

Soit encore à résoudre l'équation littérale

$$\left.\begin{aligned}\frac{a^2b^3}{(a^2-b^2)^2}\times x+\frac{2a^2}{a+b}-\frac{ab}{a-b}x-\frac{ab^3}{(a^2-b^2)\times(a-b)}\times x\\ =a-\frac{ab^4}{(a^2-b^2)^2}\times x-\frac{2ab}{a+b}+\frac{a^2}{a-b}x,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

dans laquelle a et b représentent des quantités données, inégales.

Pour chasser les dénominateurs, déterminons une quantité divisible par tous les dénominateurs. Dans l'exemple, la quantité $(a^2-b^2)^2$ remplit cette condition. De plus, tous les termes de l'équation sont divisibles par a.

Multipliant donc tous les termes de l'équation (1) par $(a^2-b^2)^2=(a+b)(a-b)(a+b)(a-b)$, et les divisant par a, nous formons l'équation

$$\left.\begin{aligned}ab^3x+2a(a^2-b^2)(a-b)-b(a^2-b^2)(a+b)x-b^3(a+b)x\\ =(a^2-b^2)^2-b^4x-2b(a^2-b^2)(a-b)+a(a^2-b^2)(a+b)x.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Il s'agit d'effectuer les calculs indiqués dans chacun des deux membres. Nous remarquons d'abord que

$$(a^2-b^2)^2=a^4-2a^2b^2+b^4;\ (a^2-b^2)(a-b)=a^3-a^2b-ab^2+b^3;$$
$$(a^2-b^2)(a+b)=a^3+a^2b-ab^2-b^3.$$

Réduisant en un seul terme, dans chaque membre, la somme algébrique des termes affectés de x, nous trouvons que le premier membre devient

$$x[ab^3-b(a^3+a^2b-ab^2-b^3)-b^3(a+b)]+2a(a^3-a^2b-ab^2+b^3),$$

et se réduit à

$$x(-a^3b-a^2b^2+ab^3)+2a^4-2a^3b-2a^2b^2+2ab^3,$$

et que le second membre devient

$$x[-b^4+a(a^3+a^2b-ab^2-b^3)]+(a^4-2a^2b^2+b^4)-2b(a^3-a^2b-ab^2+b^3),$$

et se réduit à

$$x(a^4+a^3b-a^2b^2-ab^3-b^4)+a^4-2a^3b+2ab^3-b^4.$$

Faisant alors passer tous les termes indépendants de x dans le

B seront nuls à la fois. Car A sera nul, sans quoi il y aurait une racine *unique;* de plus, B sera nul en même temps que A, puisqu'autrement l'équation serait *impossible. On sera donc conduit nécessairement à l'équation* INDÉTERMINÉE $0 \times x = 0$ ou $0 = 0$.

On peut remarquer qu'*une équation du premier degré à une inconnue ne peut jamais admettre plus d'une racine, à moins qu'elle n'en admette une infinité.*

En effet, supposons une équation qui ne soit pas *indéterminée.* Il en résulte que les nombres A et B ne seront pas nuls à la fois. Or, si A n'est pas nul, il y aura une racine *unique*, exprimée par $\frac{B}{A}$. Si au contraire A est nul, B ne l'étant pas, l'équation sera *impossible*. Donc l'équation du premier degré qui n'est pas indéterminée n'admet dans aucun cas, plus d'une racine.

Discussion de la formule générale $x = \frac{B}{A}$.

SYMBOLES $\frac{n}{0}$ et $\frac{0}{0}$.

98. Lorsqu'on applique à une *équation littérale* du premier degré la règle de résolution (n° 95), l'on parvient d'abord à une équation littérale $Ax = B$, dans laquelle A, B, sont des monômes ou des polynômes entiers; et comme le coefficient algébrique A ne se réduit pas généralement à *zéro*, indépendamment de toute hypothèse particulière sur les valeurs des lettres qui y entrent, on divise l'équation par A, et l'on obtient $x = \frac{B}{A}$.

Cependant, il peut arriver, par la manière particulière dont on disposera des valeurs des lettres qui représentent des quantités connues, que A devienne nul Dans ce cas, auquel correspond l'impossibilité ou l'indétermination de l'équation primitive, ainsi que nous l'avons établi, on n'aurait pas eu le droit de diviser par A les deux membres de l'équation $Ax = B$.

Il devient donc nécessaire de *vérifier si, pour toutes les suppositions que l'on peut faire sur les quantités connues, la formule algébrique* $x = \frac{B}{A}$ *conduit à des conséquences qui s'accordent avec celles qu'on déduirait directement de l'équation* $Ax = B$, *après y avoir fait les mêmes suppositions.*

D'abord, lorsqu'il résulte des hypothèses qu'on a faites sur les quantités connues, que A n'est pas nul, l'équation $x=\frac{B}{A}$ est équivalente à l'équation $Ax=B$. La formule $x=\frac{B}{A}$ donne donc la racine déterminée et unique de l'équation proposée.

Deux cas restent à examiner.

1° Lorsqu'il arrive que A se réduit à 0, sans que B soit nul, l'équation $Ax=B$, ou $0=B$ est *impossible*. La formule $x=\frac{B}{A}$ devient, par les mêmes suppositions, $x=\frac{B}{0}$.

Pour nous rendre compte de la signification de ce symbole algébrique, qui consiste en une fraction dont le dénominateur est nul sans que le numérateur le soit, concevons que la valeur numérique du dénominateur A d'une fraction $\frac{B}{A}$ vienne à s'annuler après avoir passé successivement par différents états de grandeur, en devenant de plus en plus petite, tandis que le numérateur était constant.

Il en résulte que la fraction $\frac{B}{A}$, avant de prendre la forme $\frac{B}{0}$, aura passé par différents états de grandeur, en devenant numériquement de plus en plus grande.

Si, par exemple, on suppose A successivement égal à n, $\frac{n}{1000}$, $\frac{n}{1000\,000}$,..... $\frac{n}{10^m}$,....., la fraction $\frac{B}{A}$ prendra successivement les valeurs croissantes $\frac{B}{n}$, $\frac{B}{n}\times 1000$, $\frac{B}{n}\times 1000\,000$,..., $\frac{B}{n}\times 10^m$,....; cette fraction augmente indéfiniment lorsque A diminue indéfiniment. On peut assigner pour A une valeur numérique, plus grande que zéro et assez petite pour que $\frac{B}{A}$ surpasse une quantité donnée telle qu'on le voudra, quelque grande que soit cette quantité. *L'expression* $\frac{B}{0}$ *doit donc être considérée comme représentant une valeur plus grande que toute quantité assignable;* c'est ce qu'on appelle une valeur *infiniment grande*, ou l'*infini*, et on la représente par le caractère ∞.

La racine $x=\frac{B}{A}$ de l'équation $Ax=B$ se présentant sous la forme de l'*infini* lorsque $A=0$, il s'ensuit qu'il n'existe pas de valeur calculable qui puisse satisfaire à l'équation proposée. Ainsi, *la valeur* $x=\frac{B}{0}=\infty$, *constitue bien un* CARACTÈRE D'IMPOSSIBILITÉ *de la résolution numérique de l'équation.*

2° Lorsqu'il arrive que A et B se réduisent à zéro, l'équation $Ax=B$, ou $0=0$, est indéterminée. La formule $x=\frac{B}{A}$ devient, par les mêmes suppositions, $x=\frac{0}{0}$.

Pour nous rendre compte de la signification de ce symbole algébrique, qui consiste en une fraction dont les deux termes deviennent nuls en même temps, concevons la valeur absolue de la fraction $\frac{B}{A}$ sous la forme $\frac{a-b}{c-d}$, de sorte qu'elle deviendra $\frac{0}{0}$ lorsqu'on fera à la fois les deux hypothèses $a=b$, $c=d$. Supposons d'abord qu'on attribue à chacune des lettres b, d, une valeur particulière qui demeurera constante.

Soient $a-b=h$, $c-d=k$, ou $a=b+h$, $c=d+k$

La valeur absolue de la fraction $\frac{B}{A}$ sera alors exprimée par $\frac{h}{k}$. Or, *si l'on admet que les quantités* h, k, *soient indépendantes l'une de l'autre*, ou, ce qui revient au même, que les quantités a, c, soient indépendantes l'une de l'autre, *la fraction* $\frac{h}{k}=x$ *représentera toujours une valeur indéterminée*, à quelque état de grandeur que l'on suppose parvenues les quantités h, k, qui diminuent en approchant de leur commune limite *zéro*, dont elles peuvent différer aussi peu qu'on le voudra (*).

(*) En effet, en désignant par α, β, des nombres donnés aussi petits qu'on le voudra, et par n un nombre donné tout à fait arbitrairement, on peut assigner pour h une valeur moindre que α, et pour k une valeur moindre que β, de manière que le quotient $\frac{h}{k}$ soit égal au nombre arbitraire n. Il suffit pour cela d'attribuer d'abord à k une valeur moindre que la plus petite des deux quantités connues β et $\frac{\alpha}{n}$, et d'attribuer ensuite à h une valeur égale à $k\times n$.

On aura ainsi $k<\beta$, $k<\frac{\alpha}{n}$, d'où $kn<\alpha$, ou $h<\alpha$,

et $h=k\times n$, d'où $\frac{h}{k}=n$.

Par conséquent, *le symbole* $\frac{0}{0}$, exprimant une limite vers laquelle tend un quotient $\frac{h}{k}$ dont la valeur est tout à fait indéterminée, quelque peu différents de zéro que soient les termes h, k, *doit être considéré lui-même comme représentant une valeur indéterminée, ou comme un* SYMBOLE D'INDÉTERMINATION.

Il suit de là que *la racine* $x = \frac{B}{A}$ *de l'équation* $Ax = B$, *se présente sous la forme d'une quantité* INDÉTERMINÉE $\frac{0}{0}$, *lorsqu'on a* $A = 0$ et $B = 0$, *c'est-à-dire dans le cas où il y a réellement indétermination dans l'équation.*

Concluons que LA FORMULE ALGÉBRIQUE $x = \frac{B}{A}$ EST GÉNÉRALE, c'est-à-dire qu'elle conduit dans tous les cas, pour la résolution de l'équation littérale $Ax = B$, à des résultats qui s'accordent avec les conséquences auxquelles on parviendrait si l'on faisait sur A et B, dans l'équation, les mêmes hypothèses que dans le quotient $\frac{B}{A}$.

99. On a vu (nº 91) que les équations $P = Q$, $P \times N = Q \times N$ ne sont pas équivalentes lorsque N se réduit à zéro, de sorte que la seconde est indéterminée, tandis que la première peut être une équation déterminée.

Si donc on multipliait les deux membres d'une équation du premier degré proposée, $P = Q$, par un facteur N qui devînt ensuite nul, lorsqu'on ferait une hypothèse particulière, telle que $a = b$, on déduirait de l'équation $P \times N = Q \times N$ une équation indéterminée $Ax = B$, dont la racine $x = \frac{B}{A}$ se présenterait sous la forme $\frac{0}{0}$. Évidemment, *on ne devrait pas en conclure que l'équation proposée* $P = Q$ *fût elle-même indéterminée.*

Soit, par exemple, l'équation

$$a^2x + abx + b^2x = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \qquad (1)$$

qui se réduit à $3a^2x = 4a^3$, ou $3x = 4a$, lorsque $a = b$.

Cette équation, résolue dans l'hypothèse $a = b$, a une racine unique $x = \frac{4}{3}a$.

Mais si, avant de faire l'hypothèse $a=b$, on avait multiplié l'équation (1) par $a-b$, on aurait eu

$$x(a^2+ab+b^2)(a-b)=(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b),$$

ou plus simplement (n° 21), $x(a^3-b^3)=a^4-b^4$; (2)

d'où $$x=\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}.$$

Lorsqu'on suppose $a=b$ dans cette valeur de x, elle prend la forme $\frac{0}{0}$; et en effet, l'équation (2), d'où elle a été déduite algébriquement, est indéterminée. *Il n'est pas permis de conclure de cette indétermination dans l'expression algébrique de* x, *que l'équation primitive* (1) *devienne indéterminée par l'hypothèse* a = b.

100. Nous avons établi que le symbole $\frac{0}{0}$ est le caractère d'une *valeur indéterminée*, lorsqu'il provient d'une fraction algébrique $\frac{B}{A}$ telle que l'hypothèse particulière qui produit un changement dans l'un des deux termes, B ou A, n'en produit aucun dans l'autre.

Il en serait autrement si la même hypothèse, faite dans les deux termes B, A, les changeait tous les deux à la fois.

Lorsqu'une hypothèse particulière annule les deux termes B, A, *on ne peut plus admettre que le symbole* $\frac{0}{0}$ *soit le caractère de l'indétermination.*

Par exemple, la fraction $\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}$ deviendrait $\frac{0}{0}$ par la seule hypothèse $a=b$, ou $a-b=0$. Or, cette hypothèse, comme on va le voir, fait prendre au quotient $\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}$ une *valeur déterminée*, d'où il suit que, dans ce cas, la forme $\frac{0}{0}$ ne peut pas être regardée comme un signe d'indétermination.

En effet, on a généralement $a^4-b^4=(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\times(a-b)$, et $a^3-b^3=(a^2+ab+b^2)\times(a-b)$.

Soit $a>b$, $a-b=h$. Remplaçant a par sa valeur $b+h$, on trouve

$$a^3+a^2b+ab^2+b^3=4b^3+(6b^2+4bh+h^2)\times h,$$
$$a^2+ab+b^2=3b^2+(3b+h)\times h.$$

Donc, tant que $a-b$ ou h n'est pas nul, on a

$$\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}=\frac{4b^3+(6b^2+4bh+h^2)h}{3b^2+(3b+h)h}.$$

Or, à mesure que h diminue en tendant vers sa limite *zéro*, le numérateur de la seconde fraction diminue et tend vers la valeur $4b^3$; le dénominateur diminue et tend vers la valeur $3b^2$. On peut concevoir h assez petit pour que les deux termes de cette fraction ne diffèrent respectivement de $4b^3$ et de $3b^2$ qu'aussi peu qu'on le voudra. Enfin, la fraction a pour limite, lorsque h devient nul, la quantité déterminée $\frac{4b^3}{3b^2}$ ou $\frac{4}{3}b$.

Ainsi les deux termes $a^4-b^4=[4b^3+(6b^2+4bh+h^2)\times h]h$

et $a^3-b^3=[3b^2+(3b+h)\times h]h$

ayant respectivement pour limite *zéro*, à cause du facteur h ou $a-b$ qui leur est commun, il arrive que leur *quotient* tend vers une limite déterminée, quoiqu'il se soit présenté sous la forme $\frac{0}{0}$.

Considérons encore la fraction $\frac{x^4-1}{x-1}$, qui se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsqu'on suppose $x=1$. On sait que

$$\frac{x^4-1}{x-1}=x^3+x^2+x+1 \quad (\text{n}^\circ\ 45).$$

Si donc on suppose $x=1$, la vraie valeur du quotient est $1+1+1+1$, ou 4. Par conséquent on ne peut pas admettre ici que la forme $\frac{0}{0}$ soit un signe d'indétermination.

Ceci s'explique en remplaçant d'abord x par $1+h$ dans le facteur x^3+x^2+x+1 du produit x^4-1.

On a $x^3+x^2+x+1=4+(6+4h+h^2)h$, d'où

$$\frac{x^4-1}{x-1}=\frac{[4+(6+4h+h^2)h]\times(x-1)}{1\times(x-1)}=4+(6+4h+h^2)h.$$

On voit clairement que, tant que h n'est pas nul, la fraction proposée est égale à un polynôme dont la valeur diminue en même temps que h, et qui tend vers une limite déterminée, savoir, le nombre 4, à mesure que h tend vers *zéro*.

Raisonnant de même sur la fraction $\frac{a^3-a^2b-ab^2+b^3}{a^2-b^2}$, qui devient $\frac{0}{0}$ *lorsqu'on suppose* $a=b$, et observant que

$$a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = (a-b)(a^2 - b^2),$$

on aura, tant que la quantité $a - b$ ne sera pas nulle,

$$\frac{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}{a^2 - b^2} = a - b.$$

Donc la fraction proposée diminue indéfiniment, en même temps que $a - b$, et elle a pour limite *zéro*.

Ainsi, la vraie valeur de la fraction est *nulle*, lorsqu'on a $a = b$. Elle n'est pas indéterminée.

Enfin, pour la fraction $\frac{a^2 - b^2}{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}$, qui devient $\frac{0}{0}$ *lorsqu'on suppose* $a = b$, on a semblablement $\frac{a^2 - b^2}{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3} = \frac{1}{a-b}$, tant que a n'est pas égal à b. Cette fraction augmente indéfiniment, à mesure que $a - b$ diminue. Elle a pour limite déterminée $\frac{1}{0}$, ou l'*infini*.

101. En général, *lorsqu'une fraction, dont les deux termes* A, B, *renferment une lettre* x, *prend la forme* $\frac{0}{0}$ *en vertu d'une seule hypothèse*, $x = a$, *la vraie valeur de la fraction est déterminée*, et égale à une quantité finie, ou à zéro, ou à l'infini.

Pour établir cette proposion à l'égard d'une fraction dont les termes B, A, sont des quantités *entières par rapport à* x, nous nous appuierons sur le théorème suivant.

102. *Si dans un polynôme* X, *entier par rapport à la lettre* x, *on remplace* x *par la valeur* a, *le résultat de cette substitution sera identiquement égal au reste* R *indépendant de* x *auquel on parviendrait en effectuant la division du polynôme* X *par le binôme* x—a; de sorte qu'on pourra déterminer le reste R sans effectuer la division.

En effet, si l'on désigne par X' le quotient entier par rapport à x, auquel correspond le reste R indépendant de x, la division supposée donne

$$X = X'(x-a) + R. \qquad (1)$$

Or, si, dans cette égalité, l'on remplace x par a, le reste R, indépendant de x, n'éprouvera aucune modification : le polynôme X se changera en une quantité algébrique N, et le polynôme X' en une quantité Q, telle que le dénominateur d'aucun terme ne deviendra nul, puisque x n'entre dans aucun dénominateur. Ainsi, la quantité X' ne deviendra pas infinie par l'hypothèse $x = a$; elle prendra une valeur Q, finie ou nulle. Le produit $X'(x-a)$, qui deviendra

$Q(a-a)$, sera donc nul ; par conséquent l'égalité (1) donnera

$$N = R; \qquad (2)$$

Ce qu'il fallait prouver.

Par exemple, si dans le polynôme $x^m - a^m$, on remplace x par a, on obtient le résultat $N = a^m - a^m = 0$. On en conclut $R = N = 0$; c'est-à-dire que $x^m - a^m$ est *divisible* par $x - a$.

Si dans le polynôme $x^m + a^m$, on remplace x par a, on obtient le résultat $N = a^m + a^m = 2a^m$, d'où l'on conclut que $R = N = 2a^m$; c'est-à-dire que $x^m + a^m$ n'est pas divisible par $x - a$, et que le reste de la division serait $2a^m$.

103. Maintenant, soit une fraction $\frac{B}{A}$ qui prend la forme $\frac{0}{0}$ en vertu de la seule hypothèse $x = a$.

De ce que B devient nul quand on suppose $x = a$, ou quand on remplace x par a dans B, il résulte que le reste auquel on parviendrait en divisant B par $x - a$ serait nul, c'est-à-dire que B est divisible par $x - a$.

Soit B′ le quotient entier par rapport à x. On a $B = B'(x - a)$.

Si, en remplaçant de même x par a dans B′, le résultat est encore nul, on en conclura que B′ est encore divisible par $x - a$. Soit B″ le quotient entier par rapport à x. On aura $B' = B''(x - a)$, et $B = B''(x - a)^2$.

On remplacera x par a dans B″, pour s'assurer si B″ est divisible par $x - a$, et l'on continuera ainsi *jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient* P, numérique ou algébrique, *qui ne s'annule pas lorsqu'on suppose* $x = a$.

Alors le terme B sera ramené à la forme $B = P(x - a)^m$.

On traitera de même le dénominateur A, qui s'annule lorsque $x = a$; de sorte qu'on aura $A = A'(x - a)$. On vérifiera si A′ s'annule par la même hypothèse, et l'on continuera ces vérifications *jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient* P′, numérique ou algébrique, *qui ne s'annule pas lorsqu'on suppose* $x = a$.

Alors le terme A sera ramené à la forme $A = P'(x - a)^n$.

Ainsi, la fraction $\frac{B}{A}$ sera égale à $\frac{P(x-a)^m}{P'(x-a)^n}$ ou $\frac{P}{P'}(x-a)^{m-n}$, tant qu'on ne supposera pas $x = a$.

Cela posé, 1° si les exposants m, n, sont égaux, la fraction $\frac{B}{A}$ est égale à $\frac{P}{P'}$. Soient M et M′ les valeurs particulières que prennent les quantités P, P′, lorsqu'on suppose $x = a$. Aucune des deux valeurs M, M' n'est nulle. La valeur de la fraction $\frac{P}{P'}$, ou de son égale $\frac{B}{A}$, tend vers la limite déterminée et finie $\frac{M}{M'}$, à mesure que la différence $x-a$ tend vers *zéro*, et l'on a enfin $\frac{B}{A}=\frac{M}{M'}$ lorsque $x-a=0$, ou $x=a$.

2°. Si l'on a $m>n, m-n>0$, la fraction $\frac{B}{A}$ est égale à $\frac{P(x-a)^{m-n}}{P'}$. Soit M' la valeur particulière que prend la quantité P' lorsqu'on suppose $x=a$. Le résultat M' n'est pas nul. Mais au contraire, le numérateur $P(x-a)^{m-n}$ devient nécessairement nul lorsque $x=a$. La valeur de la fraction $\frac{B}{A}$ tend vers la limite déterminée $\frac{0}{M'}$ ou *zéro*, à mesure que $x-a$ approche de *zéro*. On a enfin $\frac{B}{A}=0$, lorsque $x=a$.

3° Si l'on a $m<n$, $m-n<0$, la fraction $\frac{B}{A}$ est égale à $\frac{P}{P'(x-a)^{n-m}}$ (n° 70). Soit M la valeur particulière que prend la quantité P lorsque $x=a$. Le résultat M n'est pas nul. Au contraire, le dénominateur $P'(x-a)^{n-m}$ devient nécessairement nul lorsque $x=a$. La valeur de la fraction $\frac{B}{A}$ tend vers la limite déterminée $\frac{M}{0}$ ou ∞, à mesure que $x-a$ approche de *zéro*. On a enfin $\frac{B}{A}=\infty$, lorsque $x=a$.

Symboles $0\times\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\pm\infty$, $\frac{n}{\infty}$.

104. Soit la fraction algébrique $\frac{B\times C}{A}$, les quantités A, B, C, étant *entières*.

Si par la manière particulière dont on dispose des valeurs des lettres qui entrent dans les quantités algébriques A, B, C, il arrive que A et C se réduisent à zéro, sans que B devienne nul, le produit $B\times C$ sera nul, et la fraction prendra la forme $\frac{0}{0}$.

D'un autre côté, les quantités algébriques $\frac{B\times C}{A}$, $C\times\frac{B}{A}$, sont égales. Or, B n'étant pas nul en même temps que A et C se réduisent à zéro, le facteur $\frac{B}{A}$ devient $\frac{B}{0}$ ou ∞, et la fraction $C \times \frac{B}{A}$, égale à $\frac{BC}{A}$, prend la forme $0 \times \infty$.

On est donc conduit à considérer le symbole $0 \times \infty$ *comme équivalent à* $\frac{0}{0}$.

Soit encore la fraction algébrique $\frac{B \times D}{A \times C}$, dans laquelle A, B, C, D, représentent des quantités *entières*.

Supposons qu'on attribue aux lettres qui entrent dans ces quantités, des valeurs particulières telles que A et D se réduisent à *zéro*, sans que B ni C deviennent nuls. Les produits $B \times D$, $A \times C$ deviendront nuls, et la fraction prendra la forme $\frac{0}{0}$.

D'un autre côté, les quantités algébriques $\frac{B \times D}{A \times C}$, $\frac{B}{A} : \frac{C}{D}$ sont égales. Or, A et D devenant nuls sans que B, C, le soient, le dividende $\frac{B}{A}$ devient $\frac{B}{0}$ ou ∞; le diviseur $\frac{C}{D}$ devient $\frac{C}{0}$ ou ∞. Le quotient $\frac{B}{A} : \frac{C}{D}$, égal à la fraction $\frac{B \times D}{A \times C}$, prend la forme $\infty : \infty$, ou $\frac{\infty}{\infty}$.

On est donc conduit à considérer le symbole $\frac{\infty}{\infty}$ *comme équivalent à* $\frac{0}{0}$.

105. Infini positif. Lorsque la valeur d'une fraction algébrique augmente jusqu'à l'*infini* en demeurant constamment *positive*, on dit que sa valeur infinie est l'*infini positif*, ou $+\infty$.

Soit la fraction $\frac{1}{(10-a)^2}$. Quel que soit le signe que prenne la quantité $10-a$, d'après la valeur qu'on voudra attribuer à la lettre a, le produit $(10-a) \times (10-a)$ sera toujours *positif*. Cette fraction sera donc toujours *positive*.

Supposons d'abord que la lettre a soit remplacée par une expression négative $-b$, dont la valeur relative sera aussi petite qu'on le voudra, et d'autant plus petite que la valeur numérique absolue b sera plus grande. Qu'ensuite la valeur numérique b devienne de plus en plus petite et décroisse jusqu'à *zéro*. Nous dirons que l'expression négative a est devenue *de plus en plus grande*, depuis $a=-b$ jusqu'à $a=0$. La quantité positive $10-a=10+b$ sera devenue de plus en plus petite depuis $10+b$ jusqu'à $10+0$, ou 10. Le carré $(10-a)^2$ aura constamment diminué, depuis $(10+b)^2$ jusqu'à 10^2 ou 100; la fraction $\frac{1}{(10-a)^2}$ aura donc constamment augmenté en demeurant positive

Si maintenant l'on attribue à a des valeurs positives croissantes, depuis $a=0$ jusqu'à $a=10$, la quantité $10-a$ continuera à décroître jusqu'à *zéro*; le carré $(10-a)^2$ décroîtra, depuis 100 jusqu'à *zéro*, et la fraction *positive* $\frac{1}{(10-a)^2}$ aura augmenté, depuis $\frac{1}{100}$ jusqu'à $\frac{1}{(10-10)^2}$ ou $\frac{1}{0}=\infty$. La valeur infinie $\frac{1}{0}$ sera regardée comme *positive*; on écrira $\frac{1}{0}=+\infty$.

Il en est de même, si l'on attribue d'abord à la lettre a une valeur positive $10+c$, plus grande que 10, et aussi grande qu'on le voudra, en supposant ensuite que a diminue jusqu'à la valeur 10, ou que c diminue jusqu'à *zéro*. Alors l'expression $10-a=-c$ est négative et devient *d'autant plus grande* relativement, que c devient plus petit. Le diviseur $(10-a)^2=(-c)^2=+c^2$ diminue jusqu'à zéro, en même temps que c. La fraction *positive* $\frac{1}{(10-a)^2}$ ou $\frac{1}{+c^2}$, augmente jusqu'à l'*infini*, et devient $+\infty$, lorsqu'on a $c=0$ ou $a=10$.

Infini négatif. Lorsque la valeur absolue d'une fraction algébrique augmente jusqu'à l'*infini*, mais que cette fraction est constamment *négative*, on dit que la valeur infinie est l'*infini négatif*, ou $-\infty$.

Soit la fraction $\frac{-1}{(10-a)^2}$, qui demeurera *négative* pour toutes les valeurs positives ou négatives de la lettre a. Si l'on attribue successivement à a une suite de valeurs jusqu'à $a=10$, qui fassent croître la valeur absolue de la fraction jusqu'à l'*infini*, on aura pour l'hypothèse $a=10$,

$$\frac{-1}{(10-a)^2}=\frac{-1}{(10-10)^2}=\frac{-1}{0}=-\infty.$$

Infini positif ou négatif. Enfin il y a des fractions algébriques dont la valeur *infinie* peut être considérée indifféremment comme le dernier terme d'une suite de valeurs *positives*, ou comme le dernier terme d'une suite de valeurs *négatives*. Alors on affecte le caractère ∞ du double signe $\pm$ (on énonce *plus ou moins*).

Soit par exemple, la fraction $\frac{1}{10-a}$.

Si l'on remplace a par une expression négative $-b$, dans laquelle le nombre b soit aussi grand qu'on le voudra, la valeur $\frac{1}{10-a}$ ou $\frac{1}{10+b}$ sera *positive*. Si l'on conçoit ensuite que la valeur a *augmente* depuis $-b$ jusqu'à $+10$, la valeur $10-a$ décroîtra depuis $10+b$ jusqu'à *zéro*, et la fraction $\frac{1}{10-a}$, constamment *positive*, augmentera depuis $+\frac{1}{10+b}$ jusqu'à $+\frac{1}{0}$ ou $+\infty$.

Mais si, au contraire, on remplace a par une valeur positive $10+c$, plus grande que 10, et aussi grande qu'on le voudra, la valeur $\frac{1}{10-a}$ ou $\frac{1}{-c}$ sera *négative*. Si l'on conçoit ensuite que la valeur a diminue, depuis $10+c$ jnsqu'à 10, la fraction $-\left(\frac{1}{c}\right)$, constamment *négative*, augmentera en valeur numérique absolue, depuis $-\left(\frac{1}{c}\right)$ jusqu'à $-\left(\frac{1}{0}\right)$ ou $-\infty$.

L'expression $\frac{1}{0}$, qui provient de la fraction $\frac{1}{10-a}$, lorsque $a=10$, peut donc être considérée sous deux points de vue différents, selon qu'elle représente le dernier état d'une quantité *positive* qui devient plus grande que toute quantité assignable, ou au contraire qu'elle représente le dernier état d'une expression *négative* dont la valeur numérique absolue devient plus grande que toute quantité assignable. En conséquence, à raison de la double acception dont est alors susceptible la forme $\frac{1}{0}$, on l'affectera du signe ambigu $\pm\infty$.

106. Soit la fraction algébrique $\frac{B\times C}{A}$, les quantités A, B, C étant *entières*.

Si, par la manière particulière dont on dispose des valeurs des lettres qui entrent dans ces quantités, il arrive que C se réduise à *zéro*, sans que A ni B soient nuls, le produit $B\times C$ sera nul, et la fraction deviendra $\frac{0}{A}=0$. D'un autre côté, les quantités algébriques $\frac{B\times C}{A}$, $B : \frac{A}{C}$, sont égales. Or C se réduisant à zéro sans que A soit nul, le diviseur $\frac{A}{C}$ devient $\frac{A}{0}=\infty$, et la fraction $\frac{B}{\left(\frac{A}{C}\right)}$ prend la forme $\frac{B}{\infty}$. *On est donc conduit à considérer le symbole* $\frac{B}{\infty}$ *comme équivalent à* ZÉRO.

Et en effet, si l'on conçoit que le numérateur B d'une fraction algébrique demeurant constant, son dénominateur augmente indéfiniment, la valeur de la fraction diminue indéfiniment, et elle devient plus petite que toute quantité donnée, lorsqu'on attribue au dénominateur une valeur suffisamment grande. Ainsi la fraction tend vers *zéro* à mesure que le dénominateur tend vers vers l'*infini*.

Il suit de là qu'*une fraction algébrique peut se réduire à* ZÉRO *de deux manières différentes*, soit lorsque son numérateur devient *zéro* sans que le dénominateur s'annule; soit lorsque, son numérateur ayant une valeur finie, son dénominateur devient *infini*.

Équations où l'inconnue entre en dénominateur.

107. Il y a des équations où l'inconnue entre dans le dénominateur de certains termes, et dont on peut néanmoins obtenir la résolution par la méthode du premier degré.

Telle est l'équation $\frac{a}{mx-n}+\frac{b}{px-q}=0$..... (1), qui renferme deux termes fractionnaires dont les numérateurs a, b sont donnés, et dont les dénominateurs sont des binômes du premier degré, par rapport à l'inconnue x.

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par le produit des dénominateurs, et formons l'équation

$$(mx-n)\times(px-q)\times\left(\frac{a}{mx-n}+\frac{b}{px-q}\right)=0. \quad (2)$$

Si nous déterminons une valeur de l'inconnue qui n'annule ni le facteur $mx-n$, ni le facteur $px-q$, et qui cependant satisfasse à l'équation (2), elle annulera donc le facteur $\frac{a}{mx-n}+\frac{b}{px-q}$, et elle sera par conséquent racine de l'équation (1).

Or, quand on effectue la multiplication, l'équation (2) devient

$$a(px-q)+b(mx-n)=0, \quad \text{et} \quad apx-aq+bmx-bn=0.$$

Elle est du premier degré. Sa racine est $x=\dfrac{aq+bn}{ap+bm}$.

Cette valeur de x, mise dans l'équation (1), donne

$$\frac{a}{mx-n}=\frac{ap+bm}{mq-np};\quad \frac{b}{px-q}=-\left(\frac{ap+bm}{mq-np}\right);$$

par où l'on voit que l'équation (1) est satisfaite.

Soit encore l'équation $\qquad \dfrac{ax}{x+n}+\dfrac{b}{x+p}-a=0. \qquad$ (A)

Multiplions les deux membres de l'équation (A) par le produit des dénominateurs, en supposant pour x une valeur qui n'annule aucune des deux quantités $x+n$, $x+p$. Il en résulte l'équation

$$ax(x+p)+b(x+n)-a(x+n)(x+p)=0, \qquad \text{(B)}$$

qui devient, en effectuant les calculs,

$$ax^2+apx+bx+bn-ax^2-anx-apx-anp=0,$$

et se réduit à

$$(b-an)x-n(ap-b)=0.$$

Elle est du premier degré. Sa racine est $x=\dfrac{n(ap-b)}{b-an}$.

Cette valeur de x, mise dans l'équation (A), donne

$$ax=\frac{an(ap-b)}{b-an},\quad x+n=\frac{an(p-n)}{b-an},\quad x+p=\frac{b(p-n)}{b-an};$$

d'où

$$\frac{ax}{x+n}=\frac{ap-b}{p-n},\quad \frac{b}{x+p}=\frac{b-an}{p-n},\quad \text{et}\quad \frac{ax}{x+n}+\frac{b}{x+p}=a,$$

par où l'on voit que l'équation (A) est satisfaite.

Équations du premier degré à plusieurs inconnues.

108. *Une équation du premier degré à deux inconnues peut toujours*, par la seule transposition des termes, *être réduite à trois termes au plus*. Car, dans l'équation proposée, aucun des termes qui renferment l'inconnue x ne peut admettre en même temps comme facteur l'inconnue y, et réciproquement ; d'où il résulte que si l'on fait passer tous les termes inconnus dans un même membre, et tous les termes connus dans l'autre, on pourra réduire en un seul terme Ax la totalité des termes en x, le coefficient A désignant une quantité

positive ou négative qui ne renferme que des quantités connues. De même les termes en y se réduiront en un seul terme By ; enfin, les termes indépendants des inconnues se réduiront en un seul terme C, les quantités B, C, étant connues. Alors, l'équation est ramenée à la forme $Ax+By=C$.

Par exemple, l'équation $3y-2x+7=20+6x-4y$ est équivalente à l'équation $3y+4y-2x-6x=20-7$, qui se réduit à

$$7y-8x=13.$$

Semblablement, *une équation du premier degré à trois inconnues peut toujours être réduite à quatre termes au plus ;* elle peut être ramenée à la forme $ax+by+cz=d$, les quantités a, b, c, d, ne renfermant pas d'inconnue.

En général, si l'on réunit dans le premier membre tous les termes affectés des inconnues, et dans le second membre les termes tous connus, on réduira le second membre à un seul terme tout connu ; le premier membre se réduira à autant de termes dissemblables qu'il y a d'inconnues, chacun de ces termes étant formé du produit d'une inconnue par un coefficient connu.

On pourra d'ailleurs, en chassant les dénominateurs (n° 89), faire en sorte que les quantités connues, a, b, c, d.... soient *entières.*

109. *Une équation à plusieurs inconnues est toujours indéterminée.* Car si l'on dispose comme on voudra de la valeur de toutes les inconnues, excepté une seule, il en résulte une équation à une inconnue x, de laquelle on déduira une valeur de x *correspondante au système des valeurs attribuées aux autres inconnues.* On aura ainsi autant de systèmes de valeurs des inconnues qu'on le voudra, formant une *solution* de l'équation proposée.

Dans l'équation $Ax+By=C$, admettons que les coefficients A, B, ne soient pas nuls, de sorte que les termes en x et en y subsistent. Alors les équations

$$Ax+By=C, \quad Ax=C-By, \quad x=\frac{C-By}{A},$$

$$By=C-Ax, \quad y=\frac{C-Ax}{B},$$

sont équivalentes.

Lorsqu'on substitue l'équation $x=\dfrac{C-By}{A}$ à l'équation proposée, l'on dit qu'*on exprime* x *en fonction de* y.

Il devient évident par là que si l'on remplace y par une valeur numérique quelconque, positive ou négative, on en déduira une *valeur* *correspondante* de x, qui formera avec la valeur attribuée à y, une solution de l'équation proposée.

110. Lorsqu'on a plusieurs équations à plusieurs inconnues, chacune de ces équations en particulier admet une infinité de solutions. Mais un sytème de valeurs de x et de y, qui satisfait à l'une, peut ne pas satisfaire aux autres équations.

Soient, par exemple, les équations

$$2x + 5 = 13 - y \qquad (1)$$
$$3x - 5 = 2y - 7 \qquad (2)$$

Si l'on suppose, dans la première, $x = 3$, $y = 2$, elle est satisfaite. Mais lorsqu'on fait les mêmes suppositions dans la seconde, les deux membres, qui deviennent $+4$ et -3, ne sont pas égaux; de sorte que la solution $x = 3$, $y = 2$, qui convient à la première, n'est pas une *solution commune aux deux équations.*

Cependant, il peut exister une valeur particulière de x et une valeur correspondante de y qui satisfassent aux deux équations à la fois ou qui forment une *solution commune.*

Si, par exemple, dans les équations (1) et (2), on suppose $x = 2$, $y = 4$, les deux membres de la première deviennent égaux à 9; les deux membres de la seconde deviennent égaux à 1. Ainsi, chacune des deux équations est changée en une identité, par l'hypothèse $x = 2$, $y = 4$.

On dit alors que *le système des valeurs* $x = 2$, $y = 4$, *résout le système des équations* (1) et (2), ou forme une *solution* des deux équations proposées.

Résoudre le système de plusieurs équations à plusieurs inconnues, c'est déterminer pour chacune des inconnues une valeur telle que toutes les équations proposées se changent en des égalités lorsqu'on y aura remplacé par une même valeur chaque inconnue désignée par une même lettre.

On dit qu'*un système d'équations à plusieurs inconnues est* ÉQUIVALENT *à un autre système*, lorsque toute *solution* du premier système est une *solution* du second, et réciproquement.

Résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues.

111. Si l'on avait à résoudre deux équations du premier degré, entre deux inconnues, x, y, et que l'une des équations contînt *une inconnue seulement*, il serait facile de déterminer la valeur correspondante de l'autre inconnue, propre à former une *solution.*

Soient à résoudre, par exemple, les équations

$$4x-9=5-3x \qquad (1)$$

et

$$2x+5=13-y. \qquad (2)$$

On trouve que la première est satisfaite par la valeur $x=2$, et qu'elle n'admet pas d'autre solution. Pour que la question soit résolue, il faudra que la valeur $x=2$, mise dans la seconde équation, la change en une égalité. Il faudra qu'on ait

$$2\times2+5=13-y, \text{ ce qui conduit à } y=4.$$

Ainsi, le système de valeurs $x=2$, $y=4$, satisfera aux deux équations proposées, et il sera le seul qui remplisse cette condition.

112. En général, le procédé par lequel on parvient à résoudre le système de deux équations à deux inconnues, consiste à *substituer au système proposé un système équivalent, formé de deux équations dont l'une contient les deux inconnues, tandis que l'autre ne renferme plus qu'une seule inconnue.*

Ce procédé porte le nom d'*élimination*, parce qu'on *élimine* ou l'on fait disparaître l'une des inconnues de l'une des deux équations. Nous allons exposer d'abord trois *méthodes d'élimination.*

113. 1° PAR SUBSTITUTION. Soit à résoudre le système des équations

$$\left.\begin{aligned}4x+3y&=49\\5x-2y&=44\end{aligned}\right\} \qquad (A).$$

Tirant de l'une des équations proposées, la valeur de y exprimée en fonction de x, et conservant l'autre équation, nous formons le système

$$\left.\begin{aligned}y&=\frac{49-4x}{3}\\5x-2y&=44\end{aligned}\right\} \qquad (B).$$

Toute solution du système (A) satisfera évidemment au système (B), et réciproquement.

Remplaçant dans la seconde équation l'inconnue y par sa valeur en x, nous formons le système

$$\left.\begin{aligned}y&=\frac{49-4x}{3}\\5x-2\times\left(\frac{49-4x}{3}\right)&=44\end{aligned}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{aligned}y&=\frac{49-4x}{3}\\5x-\frac{98}{3}+\frac{8x}{3}&=44\end{aligned}\right\} \qquad (C).$$

Toute solution du système (B) satisfera évidemment au système (C), et réciproquement.

Dans ce troisième système, la valeur de x, déterminée et unique est $x=10$; on l'obtient en résolvant l'équation à une seule inconnue

$5x-\frac{98}{3}+\frac{8x}{3}=44$ ou $15x-98+8x=132$.

La valeur correspondante de y est donc nécessairement

$$y=\frac{49-40}{3}=3.$$

Donc le système (C) admettant la solution unique $x=10$, $y=3$, il en est de même des systèmes équivalents (B) et (A).

114. 2° Par comparaison. Soit à résoudre le système des équations

$$\left.\begin{array}{l}4x+3y=49\\5x-2y=44\end{array}\right\}\quad (A).$$

Tirant de l'une et de l'autre des équations proposées, la valeur de y exprimée en fonction de x, nous formons le système

$$\left.\begin{array}{l}y=\dfrac{49-4x}{3}\\[2ex] y=\dfrac{5x-44}{2}\end{array}\right\}\quad (B).$$

Toute solution du système (A) satisfera évidemment au système (B), et réciproquement.

Conservant l'une des deux valeurs de y en x, puis égalant entre elles les deux expressions de y en x, nous formons le système

$$\left.\begin{array}{r}y=\dfrac{49-4x}{3}\\[2ex] \dfrac{49-4x}{3}=\dfrac{5x-44}{2}\end{array}\right\}\quad (C).$$

Toute solution du système (B) satisfera évidemment au système (C) et réciproquement.

Dans ce troisième système la valeur de x, déterminée et unique, est $x=10$, on l'obtient en résolvant l'équation $\frac{49-4x}{3}=\frac{5x-44}{2}$, ou $98-8x=15x-132$. La valeur correspondante de y est donc nécessairement $y=\frac{49-40}{3}=3$.

Donc les trois systèmes d'équations étant équivalents, les équations proposées admettent pour solution unique $x=10$, $y=3$.

115. 3° Par réduction. Si dans les deux équations à résoudre, les

coefficients d'une même inconnue étaient égaux, on éliminerait immédiatement cette inconnue par une *addition* ou par une *soustraction*, selon que les signes seraient contraires, ou qu'ils seraient les mêmes.

Soit par exemple, à résoudre le système des équations

$$\left.\begin{array}{r} 8x+6y=98 \\ 15x-6y=132 \end{array}\right\} \quad (A),$$

dans lequel les coefficients de y sont numériquement égaux, et affectés de signes contraires.

Conservant l'une des équations, puis *ajoutant* les deux équations membre à membre, nous formons le système

$$\left.\begin{array}{r} 8x+6y=98 \\ (15+8)x=(132+98) \end{array}\right\} \quad (B).$$

Toute solution du système (A) satisfera évidemment au système (B). D'un autre côté, si l'on avait actuellement une solution du système (B), par laquelle ses deux équations se changeraient en deux égalités, et si l'on retranchait membre à membre, l'égalité $8x+6y=98$, de l'égalité $(15+8)x=(132+98)$, il en résulterait l'égalité

$$(15+8)x-8x-6y=(132+98)-98 \quad \text{ou} \quad 15x-6y=132.$$

Donc toute solution du système (B) satisfait au système (A).

Or l'équation $(15+8)x=132+98$ ou $23x=230$, n'admet que la racine $x=10$. Cette valeur de x, mise dans l'équation $8x+6y=98$, fait voir que la valeur de y doit satisfaire à l'équation $80+6y=98$, d'où $y=3$.

Le système (A) admet donc la solution unique $x=10$, $y=3$.

Soit encore à résoudre le système des équations

$$\left.\begin{array}{r} 20x+15y=245 \\ 20x-\ 8y=176 \end{array}\right\} \ldots \quad (N),$$

dans lequel les coefficients de x sont égaux et de même signe.

Conservant l'une des équations, puis *retranchant*, membre à membre, la seconde de la première, nous formons le système

$$\left.\begin{array}{l} 20x-8y=176 \\ (15+8)y=(245-176) \end{array}\right\} \ldots \quad (P).$$

Toute solution du système (N) satisfera évidemment au système (P).

D'un autre côté, si les équations (P) étaient changées en des égalités par des valeurs convenables de x et de y, on obtiendrait, en les *ajoutant* membre à membre, l'égalité $20x+15y=245$, qui se trouverait vérifiée en même temps que l'égalité $20x-8y=176$. Par conséquent, toute solution du système (P) satisfait au système (N).

Or l'équation $(15+8)y=245-176$ ou $23y=69$ n'a qu'une racine, $y=3$. Cette valeur de y, mise dans l'équation $20x-8y=176$, fait voir que la valeur de x doit satisfaire à l'équation $20x-8\times3=176$, d'où $20x=200$, $x=10$. Ainsi les systèmes équivalents (N), (P), ont pour solution unique $y=3$, $x=10$.

L'élimination *par addition* ou *par soustraction*, que nous venons d'opérer, n'est praticable qu'à raison de l'égalité numérique des coefficients d'une même inconnue. Pour étendre la même méthode au cas où les coefficients sont inégaux, l'on est conduit à *ramener à l'état d'égalité les coefficients d'une même inconnue dans les deux équations proposées;* alors ce procédé d'élimination prend le nom de *méthode par* RÉDUCTION.

Le calcul consiste en général à multiplier les deux membres de la première équation par une quantité connue, et les deux membres de la seconde équation par une autre quantité connue, en choisissant les multiplicateurs de manière que l'égalité des coefficients d'une même inconnue s'établisse ; après quoi l'on procède à l'addition ou à la soustraction entre les équations transformées.

Soient par exemple, les équations

$$\left.\begin{aligned}4x+3y&=49\\5x-2y&=44\end{aligned}\right\}\ldots\quad(\mathrm{X})$$

Si l'on multiplie la première équation par le coefficient numérique 2 de y dans la seconde, et si l'on multiplie la seconde équation par le coefficient 3 de y dans la première, on formera les nouvelles équations

$$\left.\begin{aligned}8x+6y&=98\\15x-6y&=132\end{aligned}\right\}\ldots\quad(\mathrm{A})$$

dans lesquelles les coefficients de l'inconnue y sont égaux, et dont le système est évidemment équivalent à celui des deux équations proposées (X).

Il sera donc permis de substituer au système (X) le système (A), et l'on pourra alors effectuer l'*élimination* par addition.

116. Il peut se faire que deux équations à deux inconnues, admettant chacune en particulier une infinité de solutions, soient *in-*

compatibles ou *contradictoires*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de valeurs numériques calculables qui, étant mises à la place des inconnues dans les deux équations, puissent satisfaire en même temps à l'une et à l'autre.

Soient, par exemple, les équations

$$26x - 13y = 10, \qquad (1)$$
$$6x - \ 3y = \ 4. \qquad (2)$$

Si l'on tire de la première équation l'expression de x en fonction de y, on a $x = \frac{13y+10}{26} = \frac{1}{2}y + \frac{5}{13}$; et, en remplaçant y par le nombre qu'on voudra, on obtiendra une valeur correspondante de x, formant avec la valeur de y une solution de l'équation (1).

Si l'on tire de la seconde équation l'expression de x en fonction de y, on a $x = \frac{3y+4}{6} = \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}$, et l'on en peut déduire autant de solutions qu'on voudra pour l'équation (2).

Mais, quelque nombre, positif ou négatif, que l'on conçoive mis à la place de x dans les deux équations proposées, il sera impossible qu'il existe une valeur numérique correspondante de y, propre à vérifier ces équations. Car il faudrait qu'on eût

$$\frac{1}{2}y + \frac{5}{13} = \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}, \text{ ou } \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)y = \frac{2}{3} - \frac{5}{13}, \text{ ou } 0 \times y = \frac{11}{39},$$

équation impossible (nº 87).

Pour mettre en évidence la contradiction ou l'incompatibilité des équations proposées, remarquons que le rapport des coefficients de x est égal au rapport des coefficients de y; on a $\frac{26}{6} = \frac{13}{3}$. Multiplions les deux membres de l'équation (2) par ce rapport, ce qui ne change pas les solutions de l'équation (2). Elle devient

$$\frac{13}{3} \times 6x - \frac{13}{3} \times 3y = \frac{13}{3} \times 4, \quad \text{ou} \quad 26x - 13y = \frac{52}{3}. \quad (3)$$

Ainsi, l'on a à résoudre le système des équations (1) et (3), dont les premiers membres sont identiques, tandis que les seconds membres sont inégaux. Il est donc impossible qu'il existe pour x et pour y un système de valeurs numériques propres à vérifier les deux équations à la fois.

On dit alors que *le système des équations proposées est impossible* (*Voyez* ci-après, nº 125).

117. Il peut arriver que deux équations à deux inconnues soient équivalentes (nº 87). Alors, chacune d'elles étant indéterminée (nº 109), il existe une infinité de solutions du système, et l'on dit que *le système des équations proposées est indéterminé.*

Soient, par exemple, les équations

$$26x-13y=65 \qquad (1)$$
$$6x-\ 3y=15. \qquad (2)$$

Remarquons que les trois rapports $\frac{26}{6}$, $\frac{13}{3}$, $\frac{65}{15}$, sont égaux. Il en résulte que si l'on multiplie les deux membres de l'équation (2), par le rapport $\frac{13}{3}$, ce qui ne change pas les solutions, elle deviendra identiquement la même que l'équation (1); car on aura

$$6\times\frac{13}{3}=26,\quad 3\times\frac{13}{3}=13,\quad 15\times\frac{13}{3}=65.$$

Les équations (1), (2), sont donc équivalentes; on se trouve par conséquent dans le même cas que si l'on avait à résoudre une seule équation à deux inconnues. Il y a une infinité de solutions.

Si l'on cherchait à résoudre les équations (1), (2), par l'élimination d'une inconnue, on aurait

$$x=\frac{13y+65}{26}=\frac{1}{2}y+\frac{65}{26},\quad \text{et}\quad x=\frac{3y+15}{6}=\frac{1}{2}y+\frac{15}{6};$$

ce qui donne l'équation $\frac{1}{2}y+\frac{65}{26}=\frac{1}{2}y+\frac{15}{6}$, d'où

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)y=\frac{15}{6}-\frac{65}{26}=\frac{5}{2}-\frac{5}{2},\ \text{ou bien } 0\times y=0.$$

Ainsi, l'on serait conduit à une équation indéterminée (*Voyez* ci-après, nº 126).

Résolution des équations qui renferment plus de deux inconnues.

118. La résolution de trois équations à trois inconnues se ramène à la résolution de deux équations à deux inconnues.

Soient les équations

$$2x-4y+6z=14 \qquad (1)$$
$$3x+2y-\ z=\ 9 \qquad (2)$$
$$5x-3y-4z=\ 4. \qquad (3)$$

Éliminant l'une des inconnues, z, par exemple, entre ces équations, on formera deux équations entre les deux autres inconnues, x, y.

Si l'on veut faire l'élimination *par réduction*, il suffit ici de multiplier les deux membres de l'équation (2) d'abord par 6, puis par 4, ce qui donne

$$\begin{aligned} 18x + 12y - 6z &= 54 \qquad (4) \\ 12x + 8y - 4z &= 36; \qquad (5) \end{aligned}$$

ajoutant membre à membre les équations (1) et (4), on obtient

$$20x + 8y = 68, \text{ ou } 5x + 2y = 17; \qquad (6)$$

retranchant membre à membre l'équation (3) de l'équation (5), on a

$$7x + 11y = 32. \qquad (7)$$

Le système des équations

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 9 \qquad (2) \\ 5x + 2y \quad &= 17 \qquad (6) \\ 7x + 11y \quad &= 32 \qquad (7) \end{aligned}\right\}$$

sera équivalent au système proposé (*).

Or, en résolvant le système des équations (6) et (7), qui ne renferment que deux inconnues, on obtient la solution unique $x = 3$, $y = 1$. Donc la valeur correspondante de z devra satisfaire à l'équation $3 \times 3 + 2 \times 1 - z = 9$, d'où $z = 2$.

Le système proposé admet donc la solution unique $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$.

119. Si, dans le cours des calculs, on est conduit à des équations contradictoires, ou à une équation impossible, on en conclura que le système proposé est impossible, c'est-à-dire qu'il est impossible d'y satisfaire par des valeurs calculables des inconnues.

Si l'on est conduit à des équations identiques, ou à une équation de la forme $0 \times x = 0$, on en conclura qu'il est possible de satisfaire au système proposé d'une infinité de manières.

120. La résolution de 4 équations à 4 inconnues se ramène semblablement à la résolution de 3 équations à 3 inconnues.

En général, lorsqu'on a *autant d'équations que d'inconnues*, si nous désignons par n le nombre des inconnues, la résolution du système proposé se ramène d'abord à la résolution de $n - 1$ équations

---

(*) Lorsque les équations (7), (6), (2) sont satisfaites, les équations (4), (5), et l'équation $20x + 8y = 68$ le sont aussi.

Par suite, l'équation (1) et l'équation (3) sont satisfaites; de sorte que toute solution du système des équations (7), (6), (2) est une solution du système (1), (2), (3).

entre $n-1$ inconnues. En continuant ainsi, on parvient à former 2 équations entre 2 des inconnues, x, y, et enfin une équation à une seule inconnue, x; d'où l'on déduit la valeur unique de x, et par suite la valeur correspondante de y.

Dans l'une des trois équations que l'on a formées entre trois des inconnues, x, y, z, on remplace x, y, par leurs valeurs, et l'on détermine z. On détermine de la même manière la valeur d'une quatrième inconnue, au moyen des valeurs trouvées pour x, y, z, et ainsi de suite. Lorsqu'on a trouvé $n-1$ des inconnues, on les remplace par leurs valeurs dans l'une des équations proposées, qui, après cette substitution, ne renferme plus que la dernière inconnue, et sert à la déterminer.

Par cette méthode on obtient la solution unique du système, sauf les cas d'impossibilité et d'indétermination dont nous avons parlé.

121. Si l'on a *plus d'équations que d'inconnues*, soit $m+n$ équations entre n inconnues, on résout d'abord un système formé d'autant de ces équations qu'il y a d'inconnues, sans avoir égard aux autres équations proposées.

Quand le premier système, formé de n équations entre les n inconnues, est résolu, on remplace les inconnues par leurs valeurs, dans les m équations restantes, pour s'assurer si ces équations sont satisfaites. Lorsqu'elles ne le sont pas, il en résulte que les équations proposées sont incompatibles : lorsque les m dernières équations sont satisfaites par les valeurs obtenues, il est clair qu'on a la solution qui vérifie à la fois toutes les équations proposées.

On donne le nom d'*égalités de condition* aux m dernières égalités qui doivent se trouver vérifiées par le système des valeurs des n inconnues pour que le système des $m+n$ équations soit possible.

Enfin, si l'on avait *moins d'équations que d'inconnues*, le système proposé serait évidemment indéterminé. Supposons qu'on ait m équations entre $m+n$ inconnues. Attribuons les valeurs que nous voudrons à n des inconnues. Il en résulte un système de m équations à m inconnues. En résolvant ce système, nous déterminerons, pour les m dernières inconnues, les valeurs qui correspondent aux valeurs que nous avons attribuées arbitrairement aux n autres inconnues.

Formules générales pour deux équations à deux inconnues.

122. Considérons le système de deux équations littérales du premier degré à deux inconnues, x, y, savoir :

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\}, \quad \text{(A)}$$

les lettres a, b, c, a', b', c', désignant des quantités connues, qui peuvent être positives, ou négatives, ou nulles.

Tout système de deux équations du premier degré à deux inconnues peut être regardé comme représenté par les équations (A), qu'on appelle, par cette raison, les *équations générales du premier degré* à deux inconnues.

Nous nous proposons de résoudre algébriquement le système de ces deux équations littérales, d'en tirer des formules qui expriment la valeur de x et celle de y par une combinaison des quantités a, b, c, a', b', c', et ensuite de *vérifier si, pour toutes les suppositions que l'on peut faire sur les quantités connues, ces formules algébriques conduisent à des conséquences qui s'accordent avec celles qu'on déduirait directement des équations proposées, après y avoir fait les mêmes suppositions.*

123. Il est naturel d'admettre d'abord que les inconnues x, y, entrent l'une et l'autre dans chacune des équations proposées (A), de sorte qu'aucune des quantités a, b, a', b', n'est nulle.

Dans cette hypothèse, appliquant à ces équations l'une des méthodes d'élimination précédemment exposées, on parvient aux équations

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, \quad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}, \quad \text{(B)}$$

et le système (B) *est équivalent au système* (A).

Si le dénominateur $ab'-ba'$ *est différent de zéro*, ou, ce qui revient au même, si les quotients $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, sont inégaux, l'inconnue x admet une valeur déterminée et unique, qui pourra être positive, ou nulle, ou négative : il en est de même de la valeur correspondante de y. Alors, le système (A) admet donc une solution unique, que l'on peut calculer au moyen des formules (B).

Si le dénominateur $ab'-ba'$ *est nul sans que le numérateur* $cb'-bc'$ *soit nul*, ou, en d'autres termes, si les quotients $\frac{a}{a'}=q$, $\frac{b}{b'}=q$, sont égaux entre eux, mais différents du quotient $\frac{c}{c'}$, il en résulte que le numérateur $ac'-ca'$ n'est pas nul. Alors, *les formules* (B) *présentent les deux inconnues sous la forme* $x=\frac{m}{0}=\infty$,

$y=\frac{n}{0}=\infty$. En même temps, *les équations* (A) *sont* INCOMPATIBLES; il est impossible d'y satisfaire par des valeurs finies de x et de y.

En effet, d'une part, pour que le numérateur $ac'-ca'$ fût nul, il faudrait qu'on eût $ac'=ca'$, $\frac{c}{c'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$, d'où $cb'-bc'=0$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $y=\infty$, lorsque $x=\infty$.

D'un autre côté, puisque $a=a'q$, $b=b'q$, l'équation $ax+by=c$ devient $a'qx+b'qy=c$; d'ailleurs l'équation $a'x+b'y=c'$ est équivalente a $a'qx+b'qy=c'q$. On a donc à résoudre le système de deux équations dont les premiers membres sont identiques, tandis que les seconds membres sont différents, puisqu'on ne peut pas avoir $c=c'q$, ou $\frac{c}{c'}=q=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$. *Les équations à résoudre sont donc contradictoires.*

Ainsi les symboles $x=\infty$, $y=\infty$, donnés par les formules (B), correspondent au cas où il est impossible de satisfaire aux équations par des valeurs numériques calculables des inconnues.

Enfin, *si le dénominateur et le numérateur de la valeur de l'une des inconnues sont nuls à la fois*, ou, en d'autres termes, si les trois quotients $\frac{a}{a'}=q$, $\frac{b}{b'}=q$, $\frac{c}{c'}=q$ sont égaux, il en résulte que le numérateur de l'autre inconnue est nul. Alors, *les formules* (B) *présentent les deux inconnues sous la forme* $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$. En même temps, *le système des équations* (A) *est* INDÉTERMINÉ.

En effet, d'une part, si l'on a $ab'-ba'=0$ et $cb'-bc'=0$, on en conclut $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=q$ et $\frac{c}{c'}=\frac{b}{b'}=q$; d'où $\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$ et $ac'-ca'=0$.

On a donc $y=\frac{0}{0}$, lorsque $x=\frac{0}{0}$.

D'un autre côté, puisque $a=a'q$, $b=b'q$, $c=c'q$, l'équation $ax+by=c$ devient $a'qx+b'qy=c'q$; d'ailleurs l'équation $a'x+by'=c'$ est équivalente à $a'qx+b'qy=c'q$. Les équations à résoudre sont donc équivalentes, et forment par conséquent un système indéterminé.

Ainsi, les symboles $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$, donnés par les formules (B), correspondent au cas de l'indétermination du système proposé.

124. On peut concevoir encore un système de deux équations entre deux inconnues, l'une des équations ne renfermant qu'une seule in-

connue. Cela revient à supposer, dans les équations générales, que l'un des quatre coefficients a, b, a' ou b' soit nul. Supposons que l'une des deux équations ne renferme pas x, ou qu'on ait $a=0$. Les équations à résoudre seront $by=c$, $a'x+b'y=c'$.

En appliquant une des méthodes d'élimination, l'on trouve

$$y=\frac{c}{b}, \quad x=\frac{bc'-cb'}{ba'}$$

Or, on peut remarquer que les mêmes résultats se déduisent des formules (B), lorsqu'on y fait l'hypothèse $a=0$.

125. Si l'on se propose de pousser plus loin ce genre de vérifications, ce qui n'a pas d'utilité réelle, on arrive aux conséquences suivantes : 1° lorsque, dans les équations générales, on suppose à la fois $a=0$, $b=0$, et qu'on ne veut admettre que des valeurs finies des inconnues, ces équations se réduisent à

$$(1)\quad 0=c, \qquad (2)\quad a'x+b'y=c'.$$

La première est *impossible*; on ne peut donc pas satisfaire aux deux équations par des valeurs finies des inconnues.

Dans le même cas, les formules (B) donnent $x=\frac{cb'}{0}$, $y=\frac{-ca'}{0}$; elles indiquent donc l'impossibilité de la résolution du système proposé.

Si l'on faisait en outre l'hypothèse $c=0$, les équations (1) et (2) seraient complétement indéterminées; et les formules (B) marqueraient cette indétermination par les symboles $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$.

2° Lorsqu'on suppose nuls les deux coefficients d'une même inconnue, soit, par exemple, $a=0$, $a'=0$, les équations $by=c$, $b'y=c'$, donnent $(b'-b)y=c'-c$, $y=\frac{c'-c}{b'-b}$; $y=\frac{c}{b}$, $y=\frac{c'}{b'}$.

Si les quotients $\frac{c}{b}$, $\frac{c'}{b'}$ sont inégaux, d'où il suit que $cb'-bc'$ n'est pas nul, les équations sont incompatibles; les valeurs trouvées pour y sont contradictoires. Dans le même cas, les formules (B) donnent $x=\frac{m}{0}=\infty$, $y=\frac{0}{0}$; elles indiquent donc l'impossibilité du système.

Si d'ailleurs, dans la formule $y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$, on suppose d'abord

$a = a'$, elle donne $y = \frac{c' - c}{b' - b}$, valeur obtenue directement en combinant entre elles les deux équations.

Si les quotients $\frac{c}{b}$, $\frac{c'}{b'}$ sont égaux, on a $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = q$, $c = c'q$, $b = b'q$. Les équations $by = c$, $b'y = c'$ sont équivalentes; elles admettent la racine unique $y = \frac{c}{b}$, et la valeur de x est tout à fait arbitraire. Les formules (B) donnent alors $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$; mais on peut tirer la valeur déterminée $y = \frac{c}{b}$ de la forme $y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$. Pour cela, qu'on suppose d'abord $a = a'$; la valeur de y est

$$\frac{(c' - c)a}{(b' - b)a} = \frac{c' - c}{b' - b} = \frac{c' - c'q}{b' - b'q} = \frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}.$$

On retrouve donc, en partant des formules (B), la valeur déterminée de y, et l'on reconnaît l'indétermination de la valeur x.

3° Enfin, lorsqu'on suppose que le coefficient de x est nul dans l'une des équations, et que le coefficient de y est nul dans l'autre équation, soit par exemple, $a = 0$, $b' = 0$, les équations $by = c$, $a'x = c'$ donnent $y = \frac{c}{b}$, $x = \frac{c'}{a'}$; et les formules (B) conduisent encore aux mêmes valeurs.

126. Pour retenir les formules générales (B).... $x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$, $y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$, observez 1° que les valeurs de x et de y sont exprimées par des fractions qui ont le même dénominateur;

2° Que ce dénominateur peut s'obtenir en formant avec les coefficients des inconnues les deux arrangements ab, ba, en affectant d'un accent la seconde lettre de chaque résultat, et en séparant les deux résultats par le signe —;

3° Que le numérateur de x peut se déduire du dénominateur en remplaçant les coefficients a, a' de cette inconnue par les termes connus c, c'; et que le numérateur de y se déduit de même du dénominateur, en remplaçant les coefficients b', b, par les termes connus c', c.

Équations littérales du premier degré à trois inconnues.

127. Considérons le système de trois équations littérales du premier degré à trois inconnues, savoir :

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{array}\right\} \qquad (C)$$

Si l'on applique à ces équations l'une des méthodes d'élimination, l'on parvient aux formules

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''} \\ y=\dfrac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''} \\ z=\dfrac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''} \end{array}\right\} \qquad (D)$$

Les trois fractions qui expriment la valeur de x, de y, de z, ont un même dénominateur, composé de six termes, qui sont affectés alternativement du signe $+$ et du signe $-$; on obtient les trois premiers termes en écrivant la lettre c à la droite de l'arrangement ab, puis entre les deux lettres a et b, enfin à la gauche de ab, et en affectant d'*un accent* la seconde lettre et de *deux accents* la troisième lettre dans chaque résultat.

On obtient semblablement les trois derniers termes du dénominateur en écrivant la lettre c à la droite de l'arrangement ba, puis au milieu, puis à gauche, et en affectant d'*un accent* la seconde lettre et de *deux accents* la troisième lettre.

Le numérateur de x se déduit du dénominateur en remplaçant respectivement les coefficients a, a', a'' de cette inconnue par les termes connus d, d', d''.

On déduit le numérateur de y du dénominateur en remplaçant b, b', b'' par d, d', d''; le numérateur de z s'obtient de même en remplaçant c, c', c'' par d, d', d''.

Équations à deux et à trois inconnues, dans lesquelles il n'entre pas de terme indépendant des inconnues.

128. Soient les équations

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=0 \\ a'x+b'y=0 \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

qui n'ont pas de terme indépendant des inconnues. Elles admettent évidemment la solution $x=0$, $y=0$.

Supposons que, par une valeur de l'une des inconnues, y, *diffé-*

rente de zéro, et par une valeur correspondante de x, on puisse encore satisfaire aux deux équations. Il sera permis de diviser par y. On formera le système

$$\left.\begin{array}{l} a\times\frac{x}{y}+b=0 \\ a'\times\frac{x}{y}+b'=0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Toute solution du second système, par une valeur de y différente de *zéro*, sera solution du premier, et réciproquement.

Or l'équation $a\times\left(\frac{x}{y}\right)+b=0$, peut être considérée comme une équation à une seule inconnue, $\frac{x}{y}$, et n'admet qu'une seule racine, $\frac{x}{y}=-\frac{b}{a}$. Donc, pour que le système (2) soit possible, il faudra qu'on ait l'égalité

$$a'\times\left(-\frac{b}{a}\right)+b'=0 \quad \text{ou} \quad ab'-ba'=0.$$

Si cette condition n'est pas remplie, *le système* (1) *n'admettra pas d'autre solution que* $x=0$, $y=0$.

Si cette condition est remplie, on aura $ab'=ba'$, $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=q$; $a=a'q$, $b=b'q$.

L'équation $ax+by=0$ sera la même que $a'qx+b'qy=0$; elle sera équivalente à l'équation $a'x+b'y=0$.

Le système (1) *admettra une infinité de solutions. Le quotient* $\frac{x}{y}=-\frac{b}{a}$, *des deux valeurs des inconnues qui forment une solution, sera invariable et connu.*

129. On peut remarquer que les formules (B), données au n° 123, conduisent aux mêmes conséquences.

Lorsqu'on y suppose $c=0$, $c'=0$, les numérateurs des valeurs de x, y s'annulent; et si $ab'-ba'$ est différent de zéro, ces valeurs n'admettent que la détermination $x=0$, $y=0$. Si au contraire $ab'-ba'$ est nul, les inconnues se présentent sous la forme $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$, en même temps que le système des équations (1) est indéterminé.

Enfin, les formules (B) donnent généralement $\frac{x}{y}=\frac{cb'-bc'}{ac'-ca'}$. Si l'on suppose d'abord $c=c'$, il en résulte $\frac{x}{y}=-\left(\frac{b-b'}{a-a'}\right)$; et cette valeur du quotient $\frac{x}{y}$ est la même que $-\frac{b}{a}$, lorsqu'on a $ab'-ba'=0$ ou $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$.

130. Soient encore les équations

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \\ a''x+b''y+c''z=0 \end{array}\right\}, \qquad \text{(C)}$$

qui n'ont pas de terme indépendant des inconnues. Elles admettent évidemment la solution $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Divisant ces équations par l'une des quantités inconnues, z, par exemple, que nous supposerons différente de *zéro*, nous formons un système équivalent au système (C) pour toutes les valeurs de z différentes de zéro. Nous avons ainsi les équations

$$\left.\begin{array}{l} a\times\frac{x}{z}+b\times\frac{y}{z}+c=0 \\ a'\times\frac{x}{z}+b'\times\frac{y}{z}+c'=0 \\ a''\times\frac{x}{z}+b''\times\frac{y}{z}+c''=0 \end{array}\right\}. \qquad \text{(E)}$$

Les équations (E) peuvent être considérées comme trois équations à deux inconnues, qui sont les quotients $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$.

Si donc on détermine, au moyen des deux premières équations, la valeur m de $\frac{x}{z}$ et la valeur n de $\frac{y}{z}$, la troisième équation sera une *équation de condition* qui devra être satisfaite par le système des valeurs m et n, pour que le système (E) soit possible. On trouvera

$$\frac{x}{z}=\frac{c'b-cb'}{ab'-ba'}=m, \quad \frac{y}{z}=\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'}=n.$$

Si l'égalité de condition $a''m+b''m+c''=0$, qui revient à $ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0$, n'existe pas, *le système* (C) *n'aura pas d'autre solution* que $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Si cette égalité se vérifie, *le système* (C) *admettra une infinité de solutions*, et l'on en pourra obtenir autant qu'on voudra, en attribuant à z une valeur arbitraire, et en prenant $x=m\times z$, $y=n\times z$; car les valeurs des quotients $\frac{x}{z}=m$, $\frac{y}{z}=n$ satisferont aux équations (E). *Les valeurs des trois inconnues seront proportionnelles, et le rapport de deux quelconques d'entre elles sera déterminé et connu.*

131. On peut remarquer que les formules (D), données au n° **127**, conduisent aux mêmes conséquences.

Lorsqu'on y suppose $d=0$, $d'=0$, $d''=0$, les numérateurs des valeurs de x, y, z s'annulent; et si le dénominateur commun n'est pas nul, ce qui revient à dire que l'égalité $a''m+b''n+c''=0$ n'existe pas, les inconnues n'admettent que la détermination $x=0$, $y=0$, $z=0$. Si au contraire le dénominateu est nul, ce qui a lieu lorsque l'égalité $a''m+b''n+c''=0$ se vérifie, les inconnues se présentent sous la forme $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$, $z=\frac{0}{0}$; ces symboles correspondent à l'indétermination effective des équations (C).

Résolution des problèmes.

132. Dans les problèmes dont nous avons à nous occuper, les conditions de la question conduisent à une ou à plusieurs égalités ; c'est-à-dire que si les quantités cherchées étaient obtenues, une même quantité pourrait être exprimée de deux manières différentes au moyen des quantités données et des valeurs qu'on aurait trouvées pour les inconnues.

Qu'on demande, par exemple, une quantité qui soit quatrième proportionnelle aux nombres 2, 5, 12. Si la quantité cherchée était obtenue, le produit de cette quantité par l'extrême 2 serait égal au produit 5×12 des nombres moyens (*Arithm.*, page 73); de sorte que, si l'on désigne par x la valeur de l'extrême cherché, le nombre x devra être tel que les produits $2x$ et 5×12 soient égaux. Ainsi, une même valeur, 60, pourra être exprimée de deux manières différentes, savoir, par le produit indiqué 5×12, ou par le produit $2\times x$.

Il suit de là que la valeur de x doit satisfaire à l'équation $2x=60$. Cette équation admet la racine unique $x=\frac{60}{2}=30$, de sorte qu'on a $2\times 30=5\times 12$; et il est facile de vérifier que le nombre 30, qui est racine de l'équation, satisfait aussi au problème, c'est-à-dire que les rapports $\frac{2}{5}$, $\frac{12}{30}$ sont égaux.

133. Dans la résolution des problèmes, ce ne sont pas toujours les nombres demandés qu'on tâche de faire entrer dans des équations; il est souvent avantageux de choisir pour inconnues des quantités auxiliaires qui, étant connues, servent à déterminer les nombres qu'on veut trouver.

Lorsqu'on a fait le choix des inconnues, on les représente par des lettres, et *l'on indique, tant sur les nombres donnés que sur les inconnues, la suite des opérations qu'il faudrait effectuer pour vérifier les valeurs des inconnues*, *si elles étaient données* (*). On parvient ainsi à former des équations qui lient entre elles les quantités données et toutes les inconnues : on dit alors que *la question est traduite algébriquement*, et que *le problème est mis en équations*. Au surplus, nous dirons, avec *Clairaut*, que cette partie de la résolution d'un problème, qui consiste à le *mettre en équations*, « est difficile à réduire » en préceptes clairs pour les commençants ; ce ne peut être que par » des exemples qu'on la fasse bien sentir. »

Si l'on veut obtenir des formules algébriques qui servent à résoudre tous les problèmes qui ne diffèrent entre eux que par les valeurs numériques des quantités données, l'on représente par des lettres les nombres qu'on suppose connus, et l'on met le problème en équations, comme il vient d'être dit.

134. Lorsque les *équations du problème* sont formées, on les résout par les méthodes qu'enseigne l'algèbre, et l'on s'assure ensuite si les valeurs des inconnues qui satisfont aux équations conviennent aussi au problème proposé.

Les équations d'un problème n'offrent pas toujours une traduction complète des conditions de la question. Il en résulte que *les valeurs des inconnues qui satisfont aux équations du problème ne sont pas toujours propres à résoudre la question elle-même*. Ainsi, les valeurs des inconnues qui donnent des *fractions* pour les nombres demandés, ne résolvent pas le problème s'il n'admet de solution qu'en nombres *entiers*.

Il peut se faire encore, par la nature de la question, que les nombres demandés ne doivent pas sortir de certaines limites, comme si l'on cherche, par exemple, pendant combien d'heures par jour des ouvriers doivent travailler. On conçoit que les valeurs des inconnues qui sortent de ces limites ne résolvent pas le problème, quoiqu'elles satisfassent aux équations.

Enfin, si l'on demande, pour les inconnues du problème, des va-

(*) Cette règle est due à *Newton*.

leurs numériques positives, soit entières, soit fractionnaires, et que les équations conduisent à des expressions négatives, ou à des symboles algébriques, les expressions qui satisfont aux équations peuvent ne correspondre à aucune solution du problème proposé.

D'un autre côté, les équations d'un problème peuvent avoir été formées en partant d'une supposition qu'on n'aurait pas dû faire, de sorte qu'elles n'offrent pas une traduction exacte de toutes les conditions de la question. Il en résulte que *si les valeurs des inconnues qui satisfont aux équations ne satisfont pas au problème, on ne peut pas toujours en conclure que le problème énoncé soit impossible*. Le problème peut admettre une solution qu'on obtiendrait en rectifiant l'hypothèse qu'on avait faite.

La vérification des valeurs trouvées pour les inconnues, leur interprétation par rapport à la résolution du problème, et l'examen des cas particuliers auxquels peuvent conduire les formules qui expriment les valeurs des inconnues, lorsque les données ont été représentées par des lettres, constituent ce qu'on appelle la *discussion* du problème.

135. On voit, en résumé, que la résolution d'un problème renferme trois parties :

1° La mise en équations du problème ; 2° la résolution des équations ; 3° enfin, la discussion des valeurs ou des formules obtenues.

136. On classe les problèmes d'après le degré des équations auxquelles ils conduisent lorsqu'on les traduit algébriquement. On appelle *problèmes du premier degré*, ceux qui conduisent à des équations du premier degré seulement.

Problèmes du premier degré.

137. 1^{er} Exemple. *Partager un nombre donné en deux parties dont le rapport est donné ;* ou bien, *trouver deux nombres dont on connaît la somme et le quotient.*

Soit le nombre 100 à partager en deux parties dont la plus grande contienne 19 fois la plus petite.

Si nous désignons par y la plus petite partie, la plus grande sera représentée par $19y$.

La somme des deux parties sera exprimée par $y + 19y$, ou $20y$. Or, cette somme doit former le nombre 100. Donc *la valeur de* y *devra satisfaire à l'équation* $20y = 100$, dont la racine unique est $y = \frac{100}{20} = 5$.

En admettant que la plus petite partie soit égale à 5, la plus grande partie sera $19y = 19 \times 5 = 95$; et en effet, on a $5 + 95 = 100$, $\frac{95}{5} = 19$. Les deux nombres 5 et 95 satisfont au problème, qui n'admet pas d'autre solution.

Le problème, dont l'énoncé comporte deux inconnues, vient d'être résolu au moyen d'une équation à une seule inconnue. Maintenant, désignons l'une des inconnues par x, l'autre par y; soit a la somme donnée, et q le rapport des deux inconnues. Pour que le problème fût résolu, il faudrait que les équations $x + y = a$, $\frac{x}{y} = q$ ou $x = qy$ fussent satisfaites par le système des valeurs de x et de y.

Substituant à x, dans la première équation, sa valeur qy, on forme l'équation $(q+1)y = a$, d'où

$$y = \frac{a}{q+1}, \quad x = \frac{aq}{q+1}.$$

On a ainsi la solution unique des deux équations, qui donne en même temps la solution unique du problème. On en déduit cette règle : *Divisez la somme donnée, a, par le rapport donné, augmenté d'une unité; le quotient sera la valeur de l'un des deux nombres cherchés;* vous obtiendrez l'autre, soit en multipliant le premier par le rapport donné, soit en retranchant le premier de la somme donnée.

138. 2^e^ EXEMPLE. *Trouver deux nombres dont on connaît la différence et le quotient.*

Soient x, y, deux nombres dont le plus grand doit contenir 19 fois le plus petit, et dont la différence doit être égale à 180. Les équations du problème sont $x - y = 180$, $x = 19y$.

On en déduit $y = 10$, $x = 190$; et en effet, $190 - 10 = 180$; $\frac{190}{10} = 19$. Les nombres 190 et 10 résolvent donc le problème, et cette solution est unique.

Pour résoudre le même problème algébriquement, soient a la différence donnée, q le rapport donné ; x et y les nombres cherchés. Nous poserons les deux équations $x - y = a$, $x = qy$, qui admettent la solution unique $y = \frac{a}{q-1}$, $x = \frac{aq}{q-1}$.

Ces formules donnent les valeurs positives de y et de x qui résolvent le problème, quel que soit le nombre a, tant que le nombre q est plus grand que l'unité.

Si l'on avait $q < 1$, et par exemple, $q = \frac{2}{3}$, les valeurs de y et de x se présenteraient sous la forme d'*expressions négatives*, savoir, $y = -\left(\frac{a}{1-q}\right)$, $x = -\left(\frac{aq}{1-q}\right)$. Ces valeurs satisferaient encore aux équations; car on aurait $x - y = \frac{-aq-(-a)}{1-q} = a$, $\frac{x}{y} = q$; et, dans l'exemple, $y = -3a$, $x = -2a$, d'où

$$x - y = -2a - (-3a) = -2a + 3a = a, \quad \frac{x}{y} = \frac{-2a}{-3a} = \frac{2}{3}.$$

On aurait ainsi *deux expressions négatives dont la différence algébrique serait égale à* a, *et dont le quotient serait égal à* q.

Mais l'on aurait tort d'en conclure que le problème proposé n'admet pas de solution en nombres *positifs*. Si en effet on suppose $a = 100$, $q = \frac{2}{3}$ les valeurs $x = 200$, $y = 300$ donnent

$$\frac{x}{y} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}, \text{ et } y - x = 100.$$

Donc les nombres positifs 200 et 300 satisfont au problème. Il faut remarquer que, dans les mêmes hypothèses, les formules donnent $y = \frac{100}{\frac{2}{3}-1} = -300$, $x = \frac{100 \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-1} = -200$, c'est-à-dire que ces valeurs, abstraction faite du signe, satisfont à la question.

Dans ce cas, la forme négative des valeurs inconnues provient de ce qu'en établissant les équations du problème on est parti d'une supposition qu'on n'aurait pas dû faire. Le rapport q étant plus petit que l'unité, il s'ensuit que le nombre $x = qy$ est moindre que y. Donc, pour exprimer la *différence* numérique de x et de y, on n'aurait pas dû poser $x - y$, mais au contraire $y - x$.

La rectification que l'on doit faire dans la supposition est indiquée d'une manière précise par les résultats algébriques obtenus. Car si l'on désigne par x', y', les valeurs numériques absolues des expressions négatives x, y, auxquelles on est parvenu, les équations $x - y = a$, $x = qy$ deviendront $(-x') - (-y') = a$, $(-x') = q \times (-y')$, ou bien $y' - x' = a$, $x' = qy'$, et l'on obtiendra

$$y' = \frac{a}{1-q}, \quad x = \frac{aq}{1-q}.$$

On reconnait ainsi que les valeurs numériques absolues, y', x' de y et de x satisfont au problème, pourvu qu'on retranche x' de y'.

De ce qui précède, on déduit une règle unique, pour les cas où le rapport donné est plus grand ou plus petit que l'unité. *Divisez la différence donnée par la différence qui existe entre l'unité et le rapport donné; le quotient sera la valeur de l'un des nombres cherchés.* Vous obtiendrez l'autre en multipliant le premier par le rapport donné.

Enfin, si l'on supposait $q=1$, les formules $y=\frac{a}{q-1}$, $x=\frac{aq}{q-1}$ donneraient $y=\frac{a}{0}=\infty$, $x=\frac{aq}{0}=\infty$. Et en effet, puisque $q=1$, on a $x=y$; il n'est donc pas possible de satisfaire à la condition $x-y=a$, par des valeurs finies de x et de y.

Les valeurs infinies des inconnues apprennent que si le rapport q, d'abord différent de l'unité, prenait successivement des valeurs de plus en plus approchées de l'unité, les inconnues x, y, deviendraient de plus en plus grandes et pourraient devenir plus grandes que toute quantité assignable. Cela est d'ailleurs évident, puisque les fractions $y=\frac{a}{q-1}$, $x=\frac{a}{1-\frac{1}{q}}$ auraient un numérateur invariable, a, et un dénominateur qui deviendrait de plus en plus petit et décroîtrait indéfiniment, jusqu'à *zéro*.

139. 3^{e} Exemple. *Trouver deux nombres dont on connait la somme et la différence*, ou bien, *partager un nombre donné en deux parties qui aient entre elles une différence donnée.*

Soit le nombre 100 à partager en deux parties qui aient une différence de 14 unités.

Si nous désignons par y la plus petite partie, la plus grande sera représentée par $y+14$. La somme des deux parties sera exprimée par $y+y+14$, ou $2y+14$. L'équation du problème est donc $2y+14=100$, ou $y+7=50$. Donc $y=43$. La plus grande partie sera $43+14=57$.

Généralement, soient a et b, la somme et la différence données; x et y les nombres cherchés il faudra qu'on ait $x+y=a$, $x-y=b$. Éliminant par addition et par soustraction, l'on obtient

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}, \quad y=\frac{a-b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}.$$

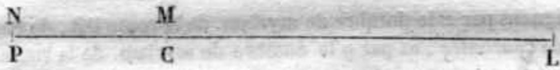
On en déduit cette règle : *l'un des nombres cherchés est égal à la* *demi-somme plus la demi-différence, et l'autre est égal à la demi-somme moins la demi-différence.*

140. En vertu des règles établies pour résoudre les problèmes précédents, *l'on pourra toujours considérer comme connus deux nombres dont on saura trouver le rapport et la somme, ou le rapport et la différence, ou la somme et la différence.* Ainsi, l'on pourra faciliter la résolution de certains problèmes à deux inconnues, en prenant pour inconnues auxiliaires la somme des nombres demandés et leur différence ou leur rapport.

141. 4e Exemple. *Deux courriers suivent la même route dans le même sens, et doivent passer par Paris et Lyon.* On sait que le premier courrier, M, qui parcourt un myriamètre en une heure, doit arriver à Lyon 35 *heures après l'arrivée à Paris du second courrier*, N, *qui parcourt un myriamètre et demi en une heure. La distance de Paris à Lyon est de* 45 *myriamètres.*

Il s'agit de déterminer le point de rencontre des deux courriers (*).

Le premier courrier, M, parcourt toute la route, de Paris à Lyon, en 45 heures. Par conséquent, *au moment où le second courrier*, N, *arrive à Paris*, le premier courrier, M, qui doit marcher encore pendant 35 heures pour atteindre à Lyon, est déjà parti de Paris depuis 45—35 ou 10 heures : le courrier M se trouve donc en un point C de la route, entre Paris et Lyon, à 35 myriamètres de Lyon, et à 10 myriamètres de Paris.



Prenons pour inconnue le temps qui doit s'écouler depuis l'instant où les courriers N et M partent respectivement de Paris et du point C jusqu'au moment de leur rencontre, c'est-à-dire le temps nécessaire pour que le second courrier N atteigne le premier, après s'en être rapproché de 10 myriamètres, et désignons ce temps par z heures.

(*) On suppose que *chaque courrier parcourt constamment des nombres égaux de myriamètres dans des temps égaux*, de sorte que les longueurs des routes parcourues par un même courrier sont proportionnelles aux temps employés à les parcourir ; c'est ce qu'on exprime en disant que *le mouvement est* UNIFORME. Le nombre de myriamètres parcourus par un mobile en une heure, et généralement *le nombre d'unités linéaires parcourues dans l'unité de temps*, mesure la VITESSE du mobile. Lorsque le mouvement est uniforme, la *vitesse* est constante, et réciproquement.

Dans l'exemple, la *vitesse* du premier courrier est de 1 myriamètre à l'heure, celle du second est de 1myr.,5.

Le second courrier se rapproche du premier, après chaque heure de marche, de $\frac{1}{2}$ myriam. Donc, après z heures, il s'en sera rapprochée de $\frac{1^{\text{myr.}}}{2} \times z$; et il faut qu'on ait $\frac{1}{2} z = 10$. Par conséquent, $z = 20$. *Les courriers se rencontreront après* 20 *heures de marche,* depuis leur départ simultané de Paris et du point C. Au moment de la rencontre, le premier courrier, qui a marché pendant 20 heures à partir du point C, se trouve à 20 myriam. du point C; il est à $10 + 20$ ou 30 myr. de Paris, et à $35 - 20$ ou 15 myriam. de Lyon. Le second courrier, qui a marché pendant 20 heures, à partir de Paris, a parcouru $20 \times 1,5$ ou 30 myriam.; il se trouve aussi à 30 myriam. de Paris.

Il est donc vérifié que *les deux courriers se rencontreront entre Paris et Lyon, à* 30 *myriam. de Paris, ou* 15 *myriam. de Lyon.*

142. Nous allons encore résoudre ce problème d'une autre manière.

Supposons, pour mettre le problème en équations, que les deux courriers doivent se rencontrer entre les deux villes, P, L, en un point R, après être partis au même moment, l'un du point C, l'autre du point P. La route PL contient 45 myriam. La route CL est de 35 myriam.

Désignons par x le nombre de myriam. de la route PR, de Paris au point de rencontre, et par y le nombre de myriam. de la route RL, du point de rencontre à Lyon.

La route $CR = CL - RL$, parcourue par le courrier M, sera de $35 - y$ myriamètres.

Il faut d'abord qu'on ait $$x + y = 45 \qquad (1)$$

Maintenant, le nombre des heures qui doivent s'écouler depuis le départ simultané des courriers N et M jusqu'à l'instant de la rencontre, peut être exprimé de deux manières différentes, selon que l'on considère ce temps comme employé par l'un ou par l'autre des courriers.

Le courrier N, qui fait $1^{\text{myr.}},5$ par heure, fera $1^{\text{myr.}}$ en $\frac{1}{1,5}$ heure; il parcourra x myriam. en $\frac{x}{1,5}$ heures.

Le courrier M, qui fait 1 myr. par heure, fera $35 - y$ myriam. en $35 - y$ heures.

Or, les deux routes PR, CR sont respectivement parcourues par les courriers N, M, dans le même temps. Il faudra donc qu'on ait $\frac{x}{1,5}=35-y$, ou $x=35\times 1,5-1,5y$, ou bien $2x=35\times 3-3y$, ou enfin

$$2x+3y=105 \quad (2).$$

Éliminant x ou y, par *réduction*, entre les équations (1), (2), on trouve

$$y=105-90=15,\ x=45\times 3-105=30.$$

143. Résolvons le même problème d'une manière générale, en représentant par des lettres les quantités données, ainsi que les inconnues.

Deux mobiles M, N, *suivent la même route dans le même sens, avec des vitesses constantes* V, V', *et doivent passer par les points* A, B, *dont la distance est de* d *myriamètres. On sait que le premier mobile,* M, *doit arriver au point* B, n *heures après l'arrivée du mobile* N *au point* A.

Il s'agit de déterminer le point de rencontre des deux mobiles.

Pour mettre le problème en équations, supposons d'abord la vitesse V' du mobile N plus grande que la vitesse V; admettons qu'au moment où le second mobile N arrive au point A, le premier mobile M se trouve en un point C situé entre A et B; enfin, que les deux mobiles doivent se rencontrer en un point R, entre A et B.

Le mobile M, qui parcourt V myriam. en 1 heure, fait 1 myr. en $\frac{1}{V}$ heure, et il parcourt toute la route AB en $\frac{d}{V}$ heures. Au moment où il se trouve au point C, il doit marcher encore pendant n heures pour atteindre au point B; la distance CB est donc de Vn myriam. La distance AC est de $d-Vn$ myriam. (*).

(*) Le mobile M a parcouru cette distance AC en $\frac{d-Vn}{V}$ heures. Si l'on représente par a la distance connue AC, ou par h le nombre connu d'heures que le mobile M emploie à parcourir cette distance, on reconnaît que le problème proposé revient à l'un des deux suivants :

1° *Deux mobiles* M *et* N *suivent la même route dans le même sens, avec des vi-*

Désignons par x, y, les nombres de myriamètres contenus dans les lignes AR, BR, et par z le nombre des heures qui s'écoulent depuis le départ simultané des deux mobiles qui partent respectivement du point C et du point A, jusqu'au moment de la rencontre. Le problème sera résolu lorsqu'on connaîtra l'une des distances x, y.

Dans le temps z, le mobile N parcourt $V'z$ myriam. On devra donc avoir

$$x = V'z, \text{ et } y = d - x = d - V'z.$$

La question est réduite à trouver z.

Or, les mobiles se rapprochent de $V'-V$ myriam. en 1 heure,

de 1 myriam. en $\dfrac{1}{V'-V}$ heure,

et de $d-Vn$ myriam. en $\dfrac{d-Vn}{V'-V}$ heure.

De là, $z = \dfrac{d-Vn}{V'-V}$; $x = \dfrac{V'(d-Vn)}{V'-V}$, $y = \dfrac{V(V'n-d)}{V'-V}$.

Si l'on veut résoudre le problème comme au n° 142, on forme deux équations entre les deux inconnues x et y. On a d'abord

$$x + y = d. \qquad (1)$$

Ensuite, le mobile N, qui fait V' myr. par heure, fera 1 myr. en $\dfrac{1}{V'}$ heure, il parcourra x myriam. en $\dfrac{x}{V'}$ heures.

Le mobile M doit parcourir CR ou CB — BR, ou $Vn - y$ myriam. Or, il fait V myriam. en 1 heure, il fait donc 1 myr. en $\dfrac{1}{V}$ heure, il parcourra $Vn - y$ myriam. en $\dfrac{Vn-y}{V}$ heures. On a donc encore l'équation $\dfrac{x}{V'} = \dfrac{Vn-y}{V}$, ou $Vx = V'Vn - V'y$, ou bien

$$Vx + V'y = V'Vn \qquad (2)$$

Éliminant *par réduction* entre les équations (1) et (2), on obtient facilement

$$x = \frac{V'(d-Vn)}{V'-V}, \quad y = \frac{V(V'n-d)}{V'-V}. \qquad (A)$$

---

tesses constantes, et partent au même instant de deux points différents, A, C, *dont la distance* a *est donnée. Trouver le point de rencontre des deux mobiles.*

2° *Un mobile* M *est déjà parti du point* A *depuis* h *heures, lorsqu'un second mobile* N *part du point* A, *pour suivre la même route que le premier, dans le même sens. On connaît les vitesses constantes* V, V', *des deux mobiles. Trouver le point de rencontre.*

144. Discussion. *La valeur de* x *est* positive *dans deux cas différents*, savoir, lorsqu'on a à la fois $V < V'$ et $Vn < d$, et lorsqu'on a, à la fois, $V > V'$ et $Vn > d$.

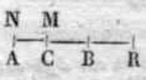
1° Lorsqu'on a, à la fois, $V < V'$ et $Vn < d$, on peut avoir en même temps $d < V'n$, ou bien $d = V'n$, ou enfin $d > V'n$.

Si l'on a $Vn < d < V'n$, la valeur de y est positive en même temps que celle de x, et l'on a $x < d$, $y < Vn < d$ (*), $x > d - Vn$.

Le problème est alors résolu conformément aux suppositions que nous avons faites. Les deux mobiles se rencontrent en un point R situé entre A et B. Au moment où le mobile N se trouvait au point A, le mobile M se trouvait en un point C, entre A et B. Le point de rencontre R est situé entre C et B.

Si l'on a $Vn < d$ et $d = V'n$, la valeur de y est nulle. On a $y = 0$, $x = d$. Les deux mobiles se rencontrent au point B. Au moment où le mobile N se trouvait au point A, le mobile M se trouvait en un point C, entre A et B, à une distance $AC = (V' - V)n$.

Si l'on a $Vn < V'n < d$, la valeur de x est positive, mais la valeur de y est *négative*; on a $y = -\dfrac{V(d - V'n)}{V' - V}$. Pour interpréter ce résultat, observons d'abord qu'on a $x > d$, car l'hypothèse $V'n < d$ donne $VV'n < Vd$, donc le *reste* $V'd - VV'n$ est plus grand que le reste $V'd - Vd$; d'où $V'(d - Vn) > d(V' - V)$ et $\dfrac{V'(d - Vn)}{V' - V} > d$. Cette valeur $x > d$ indique que le point de rencontre ne se trouve plus entre A et B. Il peut donc se faire que l'expression négative de y, provienne de ce que nous sommes partis d'une fausse hypothèse, lorsque nous avons supposé le point de rencontre entre A et B.



Admettons maintenant que le point R soit sur le prolongement de AB; et parce qu'on a, par hypothèse, $Vn < d$, ou $CB < AB$, supposons encore que le mobile M se soit trouvé au point C, entre A et B, au moment où le mobile N parvenait au point A.

Désignons par x, y les distances AR, BR; de là $CR = CB + BR = Vn + y$; $AR - BR = AB$. Nous aurons les deux équations

---

(*) L'hypothèse $V'n > d$ donne $VV'n > Vd$; donc $V'd - VV'n < V'd - Vd$, ou $V'(d - Vn) < d(V' - V)$, et $\dfrac{V'(d - Vn)}{V' - V} < d$.

L'hypothèse $Vn < d$ donne $V'n - d < V'n - Vn$; donc $\dfrac{V'n - d}{V' - V} < n$ et $\dfrac{V(V'n - d)}{V' - V} < Vn$; par conséquent $y < Vn < d$.

$$x-y=d \quad (3); \qquad \frac{x}{V'}=\frac{Vn+y}{V} \text{ ou } Vx-V'y=V'Vn \quad (4),$$

d'où l'on déduit $x=\dfrac{V'(d-Vn)}{V'-V}$, $\quad y=\dfrac{V(d-V'n)}{V'-V}$.

Les deux mobiles se rencontrent sur le prolongement de AB, en un point R, dont nous venons d'obtenir la distance au point A ou au point B, après avoir rectifié l'hypothèse que nous avions faite d'abord. Ainsi, il est établi que la valeur négative de y provenait de la manière dont le problème avait été mis en équations, et non de l'impossibilité de résoudre la question.

Il faut remarquer que les équations (3), (4) pouvaient se déduire des équations (1) et (2) en y remplaçant y par $-y$, et que la valeur positive de y, tirée des équations (3), (4), est égale à la valeur numérique de l'expression négative $y=-\dfrac{V(d-V'n)}{V'-V}$ déduite des équations (1) et (2).

Cela devait être. Car si l'on désigne par p la valeur $\dfrac{V'(d-Vn)}{V'-V}$, et par q la valeur numérique absolue $\dfrac{V(d-V'n)}{V'-V}$, le système $x=p$, $y=-q$ donne la solution des équations (1) et (2); de sorte qu'on a les égalités

$$p+(-q)=d,\ Vp+V'\times(-q)=V'Vn, \text{ ou bien } p-q=d,\ Vp-V'q=V'Vn.$$

Donc si, dans les équations (1), (2), on change y en $-y$, de sorte qu'elles deviennent

$$x-y=d \quad (3), \qquad Vx-V'y=V'Vn \quad (4),$$

le système $x=p$, $y=q$ donne la solution de ces dernières équations.

Par conséquent *les formules* (A), *qui correspondaient à un cas différent du problème, résoudront encore la question dans le cas actuel, pourvu que l'on convienne, lorsque la distance* BR *se présente sous la forme d'une expression négative, de porter la valeur absolue* q, *de cette distance, à partir du point* B, *dans un sens contraire à celui qu'elle aurait dû prendre si elle avait été positive.*

2° Lorsqu'on a, à la fois, $V>V'$ et $Vn>d$, on peut avoir en même temps $d>V'n$, ou bien $d=V'n$, ou enfin $d<V'n$.

Si l'on a $Vn>d>V'n$, la valeur de y est positive en même temps que celle de x. Ces valeurs sont

$$x=\frac{V'(Vn-d)}{V-V'}, \quad y=\frac{V(d-V'n)}{V-V'}.$$

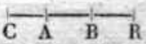
La distance $BC=Vn$ étant plus grande que $BA=d$, le mobile M, qui

se meut avec une plus grande vitesse que le mobile N, est en arrière du point A, sur le prolongement de BA, au moment où le mobile N atteint au point A. La distance AC, précédemment exprimée par $d-Vn$, ou $-(Vn-d)$, se présente sous la forme d'une expression négative, et la valeur absolue de cette distance est véritablement $Vn-d$; de sorte que *la forme négative* avertit seulement que la distance $Vn-d$ doit être actuellement portée, à partir du point A, dans un sens contraire à celui qu'elle prenait lorsqu'elle était positive.

On a $x<d$, $y<d$ (*). Les deux mobiles se rencontrent entre les points A, B.

Si l'on a $Vn>d$ et $d=V'n$, on conclut $x=d$, $y=0$. Les mobiles se rencontrent au point B.

Si l'on a $Vn>V'n>d$, la valeur de x est positive; mais la valeur de y est négative. On a $y=-\dfrac{V(V'n-d)}{V-V'}$.



On s'assurera, comme nous l'avons fait précédemment, qu'en portant la distance $\dfrac{V(V'n-d)}{V-V'}$, à partir du point B sur le prolongement de AB, c'est-à-dire dans un sens contraire à celui qui convenait à la valeur positive de BR, on obtient un point R où se rencontrent les deux mobiles; de sorte que la *forme négative* sous laquelle se présente la valeur de y indique encore ici une modification que doit subir l'hypothèse d'après laquelle le problème avait été mis en équations.

145. *La valeur de* x *est* NÉGATIVE *dans deux cas différents*, savoir, lorsqu'on a, à la fois, $V<V'$, $Vn>d$, et lorsqu'on a, à la fois, $V>V'$, $Vn<d$.

1° Lorsqu'on a, à la fois, $V<V'$, $Vn>d$, il en résulte que le point C, où se trouve le mobile M, quand le mobile N atteint le point A, est en arrière du point A, sur le prolongement de BA.

L'hypothèse $V'>V$ donnant $V'n>Vn>d$, on doit avoir *à fortiori*, $d<V'n$. La valeur de y est positive, et l'on a $y>Vn>d$, ou $BR>BC>BA$.

Les deux mobiles se sont rencontrés en arrière du point C sur le prolongement de BAC. La *forme négative* sous laquelle se présente la valeur de x, indique une rectification à faire dans l'hypothèse par laquelle on avait admis que le point R se trouvait entre A et B.

* L'hypothèse $V'n<d$ donne $VV'n<Vd$, d'où $VV'n-V'd<Vd-V'd$, ou bien $V'(Vn-d)<d(V-V')$. Donc $\dfrac{V'(Vn-d)}{V-V'}<d$.

L'hypothèse $Vn>d$ donne $VV'n>V'd$, d'où $Vd-VV'n<Vd-V'd$, ou bien $V(d-V'n)<d(V-V')$. Donc $\dfrac{V(d-V'n)}{V-V'}<d$.

On a $x = -\dfrac{V'(Vn-d)}{V'-V}$, et la valeur absolue $\dfrac{V'(Vn-d)}{V'-V}$, portée à partir du point A sur le prolongement de BA, donne le point R qui résout le problème.

Les équations directes du problème sont $y - x = d$, $V'y - Vx = V'Vn$.

2° Lorqu'on a à la fois $V > V'$ et $Vn < d$, il en résulte $d > Vn > V'n$. On a donc $BC > BA$. Le point C est entre A et B.

La valeur $y = \dfrac{V(d-V'n)}{V-V'}$ est positive, et l'on a $y > d$.

La valeur $x = -\dfrac{V'(d-Vn)}{V-V'}$ est négative. Les deux mobiles se sont rencontrés en arrière du point A, à une distance AR, dont la valeur absolue est $\dfrac{V'(d-Vn)}{V-V'}$.

La forme négative de la valeur de x indique encore qu'on doit rectifier la supposition et placer le point R sur le prolongement de BA.

Les équations directes du problème sont $y - x = d$, $V'y - Vx = V'Vn$.

146. Si l'on suppose les vitesses égales, $V = V'$, d'où $Vn = V'n$, et que les produits égaux Vn, $V'n$, soient différents de la quantité connue d, les formules (A) donnent $x = \infty$, $y = \infty$.

Or, par l'hypothèse $V = V'$, les équations (1) et (2) deviennent $x + y = d$, $Vx + Vy = VVn$, ou $x + y = Vn$. On a donc deux équations dont les premiers membres sont identiques, tandis que les seconds membres sont inégaux. Par conséquent, les équations sont incompatibles, et il est impossible d'y satisfaire par aucune valeur finie des inconnues x, y.

Dans les mêmes circonstances, le problème est lui-même impossible. Car les quantités Vn et d, ou les distances BC, BA étant différentes, les deux mobiles sont partis de deux points différents A et C au même instant. Or ils se meuvent avec des vitesses égales; ils sont donc constamment séparés par un intervalle égal à AC : leur point de rencontre n'existe pas. La forme infinie que prennent les inconnues x, y, lorsque $V = V'$, avertit de plus que si les vitesses, au lieu d'être égales, étaient supposées de moins en moins différentes, les distances x, y, deviendraient de plus en plus grandes; le point de rencontre R s'éloignerait de plus en plus des points A, B; la différence $V' - V$ des deux vitesses pourrait être supposée assez petite pour que les distances x, y devinssent plus grandes qu'une quantité donnée, quelque grande que fût cette quantité.

147. Enfin, si l'on suppose à la fois $V = V'$, d'où $Vn = V'n$, et $Vn = V'n = d$, les formules (A) donnent $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$. Et en effet, les équations (1) et (2) deviennent identiques par cette double hypothèse; elles sont indéterminées.

Le problème est lui-même indéterminé, c'est-à-dire que chaque point de la route est un point de rencontre des deux mobiles. Car les quantités Vn et d, ou les distances BC, BA étant égales, les deux mobiles sont partis au même instant du même point A avec des vitesses égales, de sorte qu'ils ne sont jamais séparés.

148. 5ᵉ Exemple. *Deux mobiles* M, N, *suivent la même route, en sens contraires, venant à la rencontre l'un de l'autre, avec des vitesses constantes* V, V' ; *ils doivent passer par les points* A, B, *dont la distance est de* d *myriamètres. On sait que le premier mobile* M, *doit arriver au point* B, n *heures après l'arrivée du mobile* N *au point* A. *Il s'agit de déterminer le point de rencontre des deux mobiles.*

Au moment où le mobile N arrive au point A, le mobile M qui s'avance dans le sens CBA, doit marcher encore pendant n heures pour atteindre au point B ; il se trouve donc en un point C dont la distance au point B est de Vn myriamètres. La distance AC est de $d + Vn$ myriamètres. La rencontre des deux mobiles se fera entre les points A et C, d'où ils partent simultanément.

Pour mettre le problème en équations, supposons que la rencontre doive avoir lieu en un point R situé entre A et B. Désignons par x, y, les nombres de myriamètres contenus dans les les lignes AR, BR. La distance CR est exprimée par $Vn + y$. On a d'abord

$$y + x = d \qquad (1)$$

Le temps que les deux mobiles emploient respectivement à parcourir les distances AR, CR, est exprimé par $\frac{x}{V'}$ et par $\frac{Vn+y}{V}$. On a donc l'équation $\frac{x}{V'} = \frac{Vn+y}{V}$ ou bien $V'y - Vx = -V'Vn$, (2)

Il importe de remarquer que cette seconde équation est précisément celle qu'on obtiendrait si l'on changeait $+V$ en $-V$ dans l'équation (2) du problème précédent (nº 143).

Résolvant les équations (1) et (2) que nous venons de former, on obtient

$$x = \frac{V'(d+Vn)}{V'+V}, \quad y = \frac{V(d-V'n)}{V'+V} \qquad (B)$$

Or, ces formules (B) sont précisément celles qu'on obtiendrait si l'on changeait $+V$ en $-V$ dans les formules (A) du problème précédent. On aurait donc pu se dispenser de mettre le nouveau problème en équations et de le résoudre directement; *la solution se serait déduite, comme cas particulier, des formules* (A), *si l'on était convenu de considérer comme* NÉGATIVE *la vitesse* V *du mobile* M, *dans le cas où ce mobile marcherait en un sens* CA *contraire à celui qu'il suivait lorsque la vitesse était positive.*

On voit d'ailleurs, par les formules (B), que si l'on a $d < V'n$, la rencontre a lieu entre A et B, conformément à la supposition; que si l'on a $d = V'n$, la rencontre a lieu au point B; enfin, que si l'on a $d < V'n$, la renconte a lieu entre les points B et C.

149. 6[e] EXEMPLE. *Un entrepreneur voulant payer ses ouvriers trouve que, s'il donnait* m *francs à chaque homme, il lui manquerait* a *francs pour effectuer le payement, et que, s'il donne* n *francs à chaque homme, il lui restera* b *francs. On demande combien il emploie d'ouvriers et combien il a d'argent.*

Soit x le nombre des ouvriers. La dépense, à raison de m francs par homme, serait de mx francs. L'entrepreneur a donc $mx-a$ francs. D'un autre côté, s'il donne n francs à chaque homme, la dépense est de nx francs; l'entrepreneur a donc $nx+b$ francs. Par conséquent, la valeur de x doit satisfaire à l'équation

$$mx - a = nx + b, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{a+b}{m-n}.$$

Maintenant, si l'on suppose $m > n$, la valeur $x = -\left(\frac{a+b}{n-m}\right)$ est négative, et par suite l'expression $mx - a$ est négative. Le problème proposé est impossible.

Mais si, dans l'équation $mx - a = nx + b$, l'on change x en $-x$, on forme une équation $mx + a = nx - b$ dont la racine $x = \frac{a+b}{n-m}$ est égale à la valeur numérique absolue de l'expression négative.

L'équation $mx + a = nx - b$ diffère de la précédente seulement en ce que les quantités connues a, b, qui d'abord étaient l'une soustractive et l'autre additive, sont devenues, au contraire, l'une additive et l'autre soustractive. On voit donc comment il faut *modifier les conditions de l'énoncé* pour que le problème devienne possible: *Si l'entrepreneur donne* m *francs à chaque homme, il lui reste* a *francs, et s'il donnait* n *francs à chaque homme, il lui manquerait* b *francs.* De plus, après ces modifications, la valeur numérique de x qui résout la question, est précisément celle à laquelle conduit la première formule, abstraction faite du signe.

150. Les discussions qui précèdent font voir que *les formules par lesquelles sont exprimées, en fonction des quantités connues, les valeurs des inconnues qui satisfont aux équations, n'ont pas seulement la propriété de donner la solution du problème dans le cas particulier pour lequel elles ont été obtenues* : ces formules conduisent, de plus, aux véritables valeurs des inconnues dans les autres cas particuliers qui diffèrent du premier en ce que certaines quantités qui étaient d'abord additives deviennent soustractives, ou réciproquement ; de sorte que, *par l'interprétation des valeurs négatives, soit des inconnues, soit de certaines quantités données, on a l'avantage de pouvoir résoudre au moyen d'un seul système de formules les différents cas particuliers d'un problème* (nº 60).

Les conditions qui rendent négative la valeur d'une inconnue, font connaître les modifications qu'on doit introduire dans les hypothèses, ou dans l'énoncé même de la question pour que la résolution directe du problème conduise à des valeurs positives des inconnues.

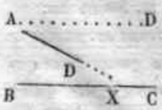
Enfin, on peut reconnaître par les formules obtenues, quelles sont les conditions qui rendent le problème impossible ou indéterminé (*).

Problèmes du premier degré à résoudre (**).

151. I. *Payer 300 fr. avec 15 pièces, les unes de 40 francs, les autres de 5 francs.*

II. *Un kilogramme d'eau de mer contenant 50 grammes de sel, combien faut-il y ajouter d'eau douce, pour qu'un kilogramme du mélange qu'on formera ainsi ne contienne plus que 20 grammes de sel?* Rép. $1^{kg}.\frac{1}{2}$.

(*) Il faut observer que les *valeurs infinies* des inconnues, qui indiquent l'impossibilité de la résolution numérique des équations, n'indiquent pas toujours l'impossibilité de satisfaire au problème; on peut, au contraire, quelquefois en conclure la véritable solution de la question. Si, par exemple, on se propose de déterminer la position d'une droite AD à l'égard de la droite donnée BC, la droite AD étant assujettie, entre autres conditions, à passer par le point donné A, on pourra prendre pour inconnue la distance BX du point de rencontre des deux droites à un point B pris sur BC.



Si l'on trouve que la distance BX est infinie, on en conclut, non pas que la droite AD n'existe point, mais qu'elle est parallèle à BC.

(**) Nous engageons les élèves à généraliser ces problèmes, en représentant par des lettres les quantités données.

III. *Deux personnes sont âgées, l'une de 16 ans, l'autre de 30. Dans combien d'années l'âge de la première sera-t-il égal aux trois-quarts de l'âge de l'autre?*

IV. *Un ouvrier gagne 3 fr. 50 c. par jour de travail, mais on lui retient 1 fr. 50 c. pour chaque jour d'oisiveté. Au bout de 61 jours, on règle son compte, et il lui revient 168 fr 50 c. Pendant combien de jours a-t-il travaillé?* R. 52.

V. *Deux fontaines versant uniformément leur eau dans le même bassin on demande en combien de temps, si elles coulent ensemble, elles rempliront le bassin supposé vide, sachant que la première, coulant seule, remplirait le bassin en 7 heures, et que la seconde, coulant seule, remplirait le bassin en 9 heures.* R. $3^h 56' 15''$.

VI. *Trouver un nombre composé de trois chiffres dont chacun surpasse le précédent de la même quantité, sachant en outre que si l'on augmente ce nombre de 396 unités, on obtient ce même nombre renversé; et que si on divise le nombre cherché par la somme des valeurs absolues de ses chiffres, le quotient est 26.* R. 468.

VII. *Un renard poursuivi par un lévrier a 60 sauts d'avance. Il en fait 9 pendant que le lévrier n'en fait que 6; mais 3 sauts du lévrier en valent 7 du renard. Combien le lévrier doit-il faire de sauts pour atteindre le renard?* R. 72.

VIII. *Trois personnes placent leur argent à des taux différents: la première, qui possède 5000 fr. de plus que la seconde, fait valoir son capital à $\frac{1}{2}$ pour 100 de moins que la seconde; la troisième personne, qui a un capital plus petit de 10000 fr. que la seconde, fait valoir son bien à $2\frac{1}{2}$ pour 100 de plus que la première.*

La troisième personne a un revenu annuel plus grand de 300 fr. que le revenu de la seconde, et la première a un revenu plus faible de 50 fr. que la seconde.

On demande à quels taux les trois personnes placent leur argent, et quels capitaux elles possèdent. R. la 1re 50000 fr. à $3\frac{1}{2}$ p. 100; la 2e 45000 fr. à 4 p. 100; la 3e 35000 à 6 p. 100.

IX. *Trouver la base et la hauteur d'un rectangle tel que la hauteur soit les deux tiers de la base, et que l'aire du rectangle reste la même lorsqu'on augmente la hauteur de 4 décimètres en diminuant la base d'un demi-mètre.* R. 3^m et 2^m.

X. *On demande la valeur d'un bien que 3 héritiers doivent se partager de la manière suivante: le premier reçoit 2000 fr. plus le quart de ce qui reste; le second reçoit 4000 fr. plus le quart de ce qui reste après qu'on a soustrait la première part, et 4000 fr.; enfin, le troisième reçoit 6000 fr., plus le quart de ce qui reste après qu'on a soustrait les deux premières parts plus 6000 fr., et l'héritage est alors complètement partagé.* R. 18000 fr.

XI. *Quatre joueurs font 4 parties, avec la condition que celui qui perdra* *doublera l'argent possédé par chacun des trois autres, au moment où se décidera chaque partie Ils perdent successivement chacun une partie. Ces joueurs se retirent enfin, ayant chacun 480 fr., on demande combien ils avaient chacun en entrant au jeu.*

XII. *Former une équation* $y=bx+c$, *qui admette les deux solutions* $y=1$, $x=2$ *et* $y=100$, $x=35$. *Il s'agit de déterminer convenablement les coefficients* b, c.

$$R.\ b=\frac{100-1}{35-2}=3, \quad c=\frac{35\times1-2\times100}{35-2}=-5.$$

L'équation est $y=3x-5$.

XIII. *On a fait 3 alliages d'argent et de cuivre qui reviennent tous les trois au même prix.*

Le premier alliage était formé de 30 grammes d'argent et 50 grammes de cuivre; le second était formé de 25 grammes d'argent et 130 grammes de cuivre; le troisième pèse 125 grammes.

On demande combien il y a de grammes d'argent dans le troisième alliage. R. 27.

Des inégalités.

152. Dans la discussion des problèmes, on est conduit à effectuer des calculs sur des quantités inégales, pour en déduire de nouvelles inégalités qui expriment, relativement à la résolution de la question, des circonstances qu'il importe de connaître : la discussion du quatrième problème (n^{os} 144, 145) en offre des exemples.

Les principes qui règlent les transformations des inégalités sont évidents d'eux-mêmes, *lorsque toutes les quantités que l'on considère sont positives.* Ainsi, il est clair *qu'on peut, sans troubler une inégalité, c'est-à-dire sans que l'inégalité cesse d'exister dans le même sens, augmenter ou diminuer d'un même* NOMBRE *les deux membres à la fois, et multiplier ou diviser les deux membres par un même* NOMBRE. Par exemple, l'inégalité $3<5$ donne $3+4<5+4$, $3-2<5-2$, $3\times6<5\times6$, $\frac{3}{7}<\frac{5}{7}$.

Si l'on ajoute membre à membre, plusieurs inégalités qui ont lieu dans le même sens, les deux sommes forment une nouvelle inégalité dans le même sens que les proposées. Soient $5>3$, $10>7$, $15>10$; on en conclut $5+10+15>3+7+10$.

Si l'on multiplie membre à membre, plusieurs inégalités qui ont lieu dans le même sens, les deux produits forment une inégalité dans le même sens que les proposées. Soient $5>3$, $10>7$, $15>10$; on en conclut $5\times10\times15>3\times7\times10$.

Par suite, *une inégalité n'est pas troublée lorsqu'on élève les deux membres à une même puissance, ou lorsqu'on en extrait la racine d'un même degré.* Soit $10>7$, on en conclut $10^2>7^2$. Réciproquement, si l'on a $100>49$, on en conclut $\sqrt[2]{100}>\sqrt[2]{49}$.

Il s'agit maintenant de distinguer, parmi ces principes, ceux qui subsistent encore, *lorsque dans les calculs on admet des expressions négatives et des résultats négatifs.*

153. Rappelons d'abord les conventions qui ont été faites (nº 68), relativement à l'ordre de grandeur des quantités positives et des expressions négatives. Il en résulte que *les deux inégalités* $a>b$ *et* $a-b>0$ *sont équivalentes*, c'est-à-dire que chacune d'elles est toujours une conséquence de l'autre: cela est évident lorsque a et b sont positifs.

Si a *étant positif*, b *est négatif*, on en conclut $a>b$ (nº 68); d'ailleurs la quantité $-b$ est alors positive: on a donc aussi $a-b>0$. Enfin *lorsque* a *est négatif*, aucune des deux inégalités $a>b$, $a-b>0$ ne peut exister, à moins que b ne soit négatif en même temps que a. Soient $a=-a'$, $b=-b'$, d'où $a-b=b'-a'$. Si l'on suppose $a>b$, il en résulte $a'<b'$ (nº 68); on a donc à la fois $a>b$ et $a-b$ ou $b'-a'>0$. Si l'on suppose $a-b>0$, il en résulte $a'<b'$; on a donc à la fois $a-b>0$ et $a>b$.

Il suit de là qu'*une inégalité n'est pas troublée lorsqu'on ajoute aux deux membres ou lorsqu'on en retranche une même quantité positive ou négative.* Car $a>b$ donne $a-b>0$ et $a-b+c-c>0$; on a donc $(a+c)-(b+c)>0$ et $(a-c)-(b-c)>0$; par conséquent on a aussi $a+c>b+c$ et $a-c>b-c$.

Appliquant ce principe, *on peut* TRANSPOSER *un terme d'un membre dans l'autre pourvu qu'on change le signe de ce terme*; et lorsque l'inégalité renferme une inconnue, *on peut rassembler dans un membre tous les termes connus, et dans l'autre membre tous les termes affectés de l'inconnue.* Ainsi de l'inégalité $x+3>6-2x$, on déduit $3x>9$.

Enfin *si l'on change les signes de tous les termes d'une inégalité, en laissant chaque terme dans le membre où il était d'abord, il faut renverser le sens de l'inégalité.* Par exemple, on peut remplacer l'inégalité $x-3>6-2x$ par l'inégalité $3-x<2x-6$.

Car l'inégalité $x-3>6-2x$ donne, par la transposition des termes, $2x-6>3-x$, ou, ce qui revient au même, $3-x<2x-6$.

154. Il est facile de s'assurer qu'*une inégalité n'est pas troublée, lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise les deux membres par une*

quantité POSITIVE ; mais au contraire, *lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise les deux membres d'une inégalité par une expression* NÉGATIVE, *il faut renverser le sens de l'inégalité.* En effet, si l'on multiplie ou si l'on divise les deux membres par -1, cela revient évidemment à changer les signes de tous les termes de l'inégalité, en laissant chaque terme dans le membre où il était d'abord : il faut donc renverser le sens de l'inégalité ; et l'on devra appliquer la même règle s'il s'agit de multiplier ou de diviser les deux membres par l'expression négative $-n$, ou $-1\times n$.

De là on déduit le moyen de *chasser les dénominateurs* des termes d'une inégalité. Ainsi, à l'inégalité $\frac{x}{6}-\frac{1}{2}>1-\frac{x}{3}$, on peut substituer l'inégalité $x-3>6-2x$.

155. *Il est toujours permis d'ajouter membre à membre, plusieurs inégalités qui ont lieu dans le même sens : on en conclut, entre les deux sommes algébriques, une inégalité dans le même sens que les proposées.*

Soient par exemple, les inégalités $a>b$, $c>d$, $e>f$, etc. ; et $a+c+e+...=s$, $b+d+f+...=s'$. On en conclura $s>s'$. Car, en vertu des inégalités proposées, les différences $a-b$, $c-d$, $e-f$, etc., sont positives (nº 153), donc la quantité $a-b+c-d+e-f+$ etc., ou $a+c+e+...-b-d-f-...$, est positive. On a par conséquent $s-s'>0$, d'où $s>s'$.

156. *Il n'est pas permis, lorsqu'on multiplie membre à membre plusieurs inégalités qui ont lieu dans le même sens, de conclure généralement que les produits soient inégaux dans le même sens que les facteurs.*

On a, par exemple, les deux inégalités $3>2$ et $-2>-3$; le produit des premiers membres est -6 ; il est *égal* au produit des seconds membres.

On a encore $-1>-2$ et $-2>-3$. Le produit des premiers membres est égal à 2, le produit des seconds membres est égal à 6 ; le premier produit est *moindre* que le second.

Par suite, *si l'on élève à une même puissance les deux membres d'une inégalité, ou si l'on en extrait la racine d'un même degré, il n'est pas permis d'affirmer généralement que l'inégalité ne soit pas troublée.*

On a par exemple $+3>-3$, et au contraire $(+3)^2=(-3)^2=9$.

On a encore $-7>-10$, et au contraire $(-7)^2<(-10)^2$ ou $49<100$.

157. *Résoudre une inégalité à une seule inconnue*, c'est déter-

miner une limite supérieure ou une limite inférieure des valeurs que l'inconnue peut recevoir en satisfaisant à l'inégalité proposée.

Par exemple, l'inégalité $x-3>6-2x$... (1), sera satisfaite par les valeurs de x qui satisferont à l'inégalité $3x>9$, ou à l'inégalité $x>3$, et réciproquement. Dans cet exemple, le nombre 3 est une *limite inférieure* des valeurs de x; c'est-à-dire qu'on sait qu'il faudra n'attribuer à x que des valeurs supérieures au nombre 3, et l'on dit par cette raison, que *l'inégalité* (1) *est résolue.*

Supposons encore qu'on ait à résoudre l'inégalité $\frac{x}{9}-\frac{3}{2}>\frac{x}{6}-\frac{16}{9}$... (2). Si l'on multiplie les deux membres par -18, on obtient $27-2x<32-3x$. Ajoutant aux deux membres la quantité $3x-27$, on a $x<5$. Le nombre 5 est une *limite supérieure* des valeurs de x, c'est-à-dire qu'on devra n'attribuer à x que des valeurs inférieures au nombre 5.

Pour *résoudre une inégalité à une inconnue*, lorsque cette inconnue est élevée à la première puissance seulement, on suit la même méthode que pour résoudre une équation du premier degré (nº 95), en se fondant sur les principes généraux que nous avons indiqués (nºs 153, 154).

Si l'inconnue doit *satisfaire à la fois à plusieurs inégalités*, il peut arriver qu'on obtienne une limite inférieure et une limite supérieure, entre lesquelles la valeur de l'inconnue devra être comprise. Si, par exemple, la valeur de x doit satisfaire à la fois aux inégalités (1) et (2) précédemment résolues, les valeurs qu'on peut attribuer à x seront comprises entre 3 et 5.

CHAPITRE QUATRIÈME.

RACINE CARRÉE DES QUANTITÉS LITTÉRALES. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

Extraction de la racine carrée.

158. En algèbre, comme en arithmétique, lorsqu'il s'agit d'extraire la racine d'un certain degré d'une quantité, l'on indique l'opération au moyen du *signe radical* $\sqrt{}$; et pour la racine carrée en particulier, on se dispense d'écrire l'*indice*.

Lorsqu'un terme algébrique ne renferme pas de signe radical, on dit que ce terme est *rationnel*. Un polynôme *rationnel* est un polynôme dont tous les termes sont rationnels.

L'EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE *des quantités littérales a pour principal objet, étant donné un monôme ou un polynôme rationnel, de trouver lorsque cela est possible, un monôme ou un polynôme rationnel dont le carré soit égal à la quantité proposée.* La méthode qu'il faut suivre dans cette opération se fonde sur la loi de formation du carré d'un monôme ou d'un polynôme.

159. Remarquons d'abord que *deux quantités numériquement égales, mais affectées de signes contraires, reproduisent le même carré, qui est toujours* POSITIF; *et elles sont les seules qui puissent donner ce carré.* Ainsi la quantité a étant positive, on a à la fois $(+a)^2=+a^2$ et $(-a)^2=+a^2$; il est clair d'ailleurs qu'aucune quantité numérique différente de a ne pourrait donner un carré égal à la valeur de a^2: par conséquent, il n'existe pas de quantité, positive ou négative, autre que $+a$ ou $-a$, dont le carré soit égal à a^2.

Il suit de là que réciproquement, *toute quantité positive admet deux racines carrées, numériquement égales, mais de signes con-*

traires, et n'en admet pas plus de deux. Ainsi, les racines carrées de 25 sont $+5$ et -5; et l'on écrit pour abréger $\sqrt{25}=\pm 5$. Les racines carrées du nombre 2 sont indiquées par $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, ou $\pm\sqrt{2}$.

On conclut encore de la remarque précédente qu'*il n'existe aucun nombre positif ni aucune expression négative dont le carré puisse être égal à une expression négative;* de sorte que *la racine carrée d'une expression négative n'est calculable ni exactement, ni par approximation.* On dit, par cette raison, que *la racine carrée d'une expression négative est une expression* IMAGINAIRE. Soit, par exemple, l'expression négative -4. La valeur numérique 2 pourrait seule donner un carré numériquement égal à 4; mais $(-2)^2$ donne $+4$, ainsi que $(+2)^2$. Aucune quantité, soit positive, soit négative, ne pouvant reproduire un carré égal à -4, l'expression $\sqrt{-4}$ est dite *imaginaire.*

Par opposition, l'on appelle *quantités* RÉELLES, les quantités positives et les expressions négatives, dont la valeur numérique peut d'ailleurs être commensurable ou incommensurable. Par exemple, $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, +\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}$, sont des quantités *réelles;* mais $\pm\sqrt{-\frac{2}{3}}$, $\pm\sqrt{-a^2}$, sont des expressions *imaginaires.*

La valeur réelle et positive d'une racine carrée s'appelle *valeur numérique absolue*, ou *valeur arithmétique*, ou *détermination arithmétique* de la racine. La valeur réelle et négative de la racine, et les valeurs imaginaires s'appellent des *déterminations algébriques.*

160. MONÔMES. *Le carré d'un monôme positif ou négatif se forme en élevant le coefficient numérique au carré, et en doublant l'exposant dont chaque lettre est affectée.* Ce carré est d'ailleurs une quantité positive.

Ainsi l'on a, en vertu des règles de la multiplication.

$$(\pm 8a^3b)^2 = +8\times 8a^{3+3}\times b^{1+1} = 8^2a^{3\times 2}b^{1\times 2} = 64a^6b^2,$$

$$\left(\pm\frac{2}{3}\cdot\frac{a^3b}{m^2n^5}\right)^2 = +\frac{4}{9}\cdot\frac{a^6b^2}{m^4n^{10}}.$$

Et par suite, réciproquement, *lorsque le coefficient numérique d'un monôme positif, entier ou fractionnaire, est le carré d'un autre nombre, et que chacune des lettres est affectée d'un exposant pair, on obtient la racine carrée de ce monôme en donnant à chaque lettre un exposant égal à la moitié de l'exposant dont elle était* *affectée, et en multipliant le résultat par la racine carrée du coefficient numérique.* La racine ainsi obtenue doit d'ailleurs être affectée du double signe $\pm$.

En effet, d'après la loi de formation du carré d'un monôme, chacun des deux monômes de signes contraires qu'on obtient en se conformant à cette règle, donnera un carré égal au monôme positif proposé.

161. Lorsque le coefficient numérique d'un monôme n'est pas le carré d'un autre nombre, ou que l'exposant d'une des lettres est impair, la *racine carrée* du monôme proposé, ne peut pas être exprimée par un monôme rationnel; on indique alors, au moyen du *signe radical*, la racine carrée à extraire. Il résulte de là des expressions qu'on appelle des quantités *irrationnelles* ou des RADICAUX *du second degré*. Telles sont les quantités $\pm\sqrt{40}$, $\pm\sqrt{\frac{2}{9}a^2b}$.

Nous reviendrons sur les simplifications que ces expressions peuvent admettre (n° 172).

162. POLYNÔMES. *Le carré d'un polynôme se forme en ajoutant au carré du premier terme, le double produit du premier terme par le second, plus le carré du second, plus deux fois le produit de chacun des deux premiers termes par le troisième, plus le carré du troisième, et ainsi de suite* (*).

La loi est déjà vérifiée pour un binôme; on a $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

On peut étendre la même loi au trinôme $a+b+c$, en considérant d'abord la quantité $(a+b)$, comme formant un seul terme. On aura

$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2.$$

Je dis maintenant que si la loi est admise pour un polynôme $P=a+b+c+...+k$, composé d'un certain nombre de termes, elle sera encore vraie pour le polynôme $P+l$ qui contient un terme de plus. En effet, on a

$$(P+l)^2=P^2+2Pl+l^2=P^2+2(a+b+c+...+k)l+l^2.$$

Or, par hypothèse, la quantité P^2 est formée avec les termes a, b, c,... k, du polynôme $P+l$, conformément à la loi énoncée, et il faut ajouter à P^2, deux fois le produit du dernier terme l par chacun de ceux qui le précèdent, plus le carré de ce dernier terme. La loi

(*) Il résulte de cette loi de formation que *le carré d'un polynôme se compose de la somme des carrés de tous les termes, et de la somme des doubles produits de ces termes multipliés deux à deux.*

est donc établie pour le carré de $P+l$, si elle est vraie pour le carré de P ; or elle est vérifiée pour le binôme ; donc elle subsiste pour le trinôme, puis pour le polynôme de quatre termes, et ainsi de suite. Cette loi est donc générale.

163. *Pour extraire la racine carrée d'un polynôme, ordonnez-le par rapport aux puissances décroissantes ou aux puissances croissantes d'une lettre, extrayez la racine carrée du premier terme : le résultat sera le premier terme de la racine cherchée. Retranchant du polynôme proposé, le carré du premier terme de la racine, vous obtiendrez un reste : divisez le premier terme de ce reste par le double du premier terme de la racine ; le quotient sera le deuxième terme de la racine.*

Retranchant du premier reste le double produit du premier terme de la racine par le deuxième, et le carré du deuxième, vous obtiendrez un deuxième reste : divisez le premier terme de ce reste par le double du premier terme de la racine ; le quotient sera le troisième terme de la racine ; et ainsi de suite.

Nous allons d'abord admettre que le polynôme donné P dont on cherche la racine, est rationnel, et qu'il est le carré d'un autre polynôme rationnel P' : il faut prouver que la règle énoncée fera trouver tous les termes du polynôme $P'=\sqrt{P}$.

164. Considérant en premier lieu un polynôme P *qui ne renferme qu'une seule lettre*, x, concevons ce polynôme et sa racine exacte P', ordonnés tous deux par rapport à x de la même manière.

Désignons par A le premier terme de P et par R la somme des autres termes, de sorte qu'on a $P=A+R$.

Le polynôme P ne renfermant pas d'autre lettre que x, le terme A est un *monôme* formé du produit d'une puissance de x par un nombre connu.

Soient encore a le premier terme inconnu de la racine P' et z la somme des autres termes, de sorte qu'on a $P'=a+z$. De là $P=P'^2=a^2+2az+z^2$; et puisqu'on suppose les deux polynômes P, P', ordonnés par rapport à x, *le premier terme* A *du carré donné* P *est identiquement égal à* a^2 (n° 16, 2°) ; on a par conséquent $a=\sqrt{A}$. Or, on sait extraire la racine carrée du monôme A, et le résultat est bien le premier terme de la racine P'.

Maintenant, lorsqu'on connaît déjà un certain nombre de termes $a, b, c,\ldots$ de la racine, et qu'il reste encore à trouver les autres termes $a', b', c',\ldots$ si l'on retranche de P la quantité $(a+b+c+\ldots)^2$, c'est-à-dire le carré de la somme des termes obtenus, qu'on ordonne le reste R' comme on a ordonné P, et qu'on divise par $2a$ le premier terme A' du reste R'; le quotient sera égal à a', et l'on obtiendra ainsi successivement tous les termes de P'.

En effet, soit $M=a+b+c+\text{etc.}$, $Z=a'+b'+c'+\text{etc.}$; de sorte que

$$P'=M+Z,\ P=P'^2=M^2+2MZ+Z^2 \text{ et } R'=P-M^2=2MZ+Z^2.$$

Le premier terme du produit 2MZ est $2aa'$, le premier terme de Z^2 est a'^2.

Or, si P' est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, le terme a est d'un degré plus élevé que le terme a'; le produit $2aa'$ est donc d'un degré plus élevé que le produit a'^2; et par suite, lorsque les produits 2MZ et Z^2 sont effectués, le terme $2aa'$ est d'un degré plus élevé que tous les autres, dans la somme $2MZ+Z^2$: par conséquent le premier terme A' du reste R' est égal à $2aa'$; on a donc $a'=\frac{A'}{2a}$. On verra de même que si P' est ordonné par rapport aux puissances croissantes de x, le terme $2aa'$ est d'un degré moins élevé que les autres dans la somme $2MZ+Z^2$, et l'on conclura encore

$$2aa'=A',\ a'=\frac{A'}{2a}.$$

Il est prouvé par ce qui précède qu'en divisant par $2a$ le premier terme B du reste $R=P-a^2=P-A$, on obtient un quotient égal au second terme b de la racine (*).

Or, si l'on retranchait de P le carré $(a+b)^2$, on aurait un reste

$$R'=P-a^2-2ab-b^2=R-(2ab+b^2);$$

on pourra donc obtenir le second reste R' en retranchant du premier reste R la quantité $2ab+b^2$.

En général, lorsqu'on aura obtenu un reste $R'=P-M^2$, et qu'après avoir divisé par $2a$ le premier terme A' de ce reste, on aura obtenu un nouveau terme a' de la racine, on sera conduit à retrancher de P le carré $(M+a')^2$, pour obtenir un nouveau reste R''. On aura donc

$$R''=P-(M+a')^2=P-M^2-(2Ma'+a'^2)=R'-(2Ma'+a'^2);$$

(*) On a $P=A+R=A+B+\text{etc.}$ Le premier terme du reste R est le second terme du polynôme donné P. *Les égalités* $a=\sqrt{A}$, $b=\frac{B}{2a}$, *déterminent immédiatement les deux premiers termes de la racine au moyen des deux premiers termes du polynôme proposé.*

ce qui fait voir que le reste R'' pourra être déterminé en retranchant du reste R' le double de la somme M par le nouveau terme a', et le carré de ce nouveau terme.

Ainsi la règle fera trouver la racine d'un carré donné P qui ne renferme qu'une seule lettre.

165. Supposons maintenant que le polynôme donné P renferme deux lettres x, x', et qu'on l'ait ordonné par rapport à x. Si le premier terme A ne contient pas x, il ne renfermera donc qu'une seule lettre x', ou bien il sera un *nombre*, et l'on en pourra déterminer la racine carrée, a, par les règles précédentes. On prouvera, comme au n° 164, que $a=\sqrt{\text{A}}$ est le premier terme de la racine P', et que la règle donnée n° 163, fait trouver ensuite tous les autres termes de P'.

Si le premier terme A contient x, il est le produit d'une puissance de x par une quantité N qui ne contient pas x, de sorte que N renfermant une seule lettre x', ou bien étant un nombre, on pourra calculer $\sqrt{\text{N}}$, et par suite $\sqrt{\text{A}}$; l'on connaîtra ainsi le premier terme de la racine P', et l'on en déduira tous les autres.

Dans le cas où P renferme *trois lettres*, le multiplicateur N de la puissance de x dans le premier terme A, ne peut renfermer au plus que *deux lettres*. On saura donc obtenir $\sqrt{\text{N}}$, et par suite $\sqrt{\text{A}}$, ou le premier terme de P'.

La détermination de la racine carrée du polynôme donné P se ramenant ainsi à la détermination de la racine carrée d'une quantité qui renferme une lettre de moins, l'on peut appliquer la règle, quel que soit le nombre des lettres que renferme P.

166. Il est évident, réciproquement, que si, lorsqu'on applique les règles de l'extraction de la racine carrée à un polynôme P, l'opération se termine, c'est-à-dire *si, après avoir obtenu un certain nombre de termes* a, b, c,... *à la racine, et après avoir opéré les soustractions prescrites, on parvient à un* RESTE NUL, le polynôme $\text{P}'=a+b+c+$ etc., est la racine carrée exacte du polynôme proposé P.

Voici un exemple d'une extraction de racine carrée qui se fait exactement :

Polynôme donné P.					Racine P'.
$9n^2$ $-12np$ $+4p^2$	x^4+24n^3 $-16n^2p$	x^3+10n^4 $+4n^3p$ $+6np^3$ $-4p^4$	x^2-8n^5 $+8n^2p^3$	$x+n^6$ $-2n^3p^3$ $+p^6$	$(3n-2p)x^2+4n^2x-n^3+p^3$ $(6n-4p)x^2+8n^2x-n^3+p^3$ $-n^3+p^3$
		$-16n^4.x^2$			
2e reste.		$-6n^4$ $+4n^3p$ $+6np^3$ $-4p^4$	x^2-8n^5 $+8n^2p^3$	$x+n^6$ $-2n^3p^3$ $+p^6$	
3e reste.			0		

Le polynôme donné P renferme trois lettres n, p, x. Je l'ordonne par rapport aux puissances décroissantes de x; et parce que les multiplicateurs des puissances de x, et la quantité indépendante de x sont des polynômes, je les ordonne par rapport à une autre lettre n. De cette manière, le polynôme P est composé de *quatre* termes.

On a pour premier terme $A=Nx^4$, en posant $9n^2-12np+4p^2=N$.

J'extrais d'abord la racine carrée de N. Cette racine est $3n-2p$; il en résulte

$$A=(3n-2p)^2.x^4, \quad \text{et} \quad a=(3n-2p)x^2;$$

j'ai ainsi le *premier terme* de la racine.

Le premier reste R, que nous nous sommes dispensés d'écrire, s'obtient en supprimant le premier terme de P. On a, pour premier terme de ce reste, $B=(24n^3-16n^2p)\,x^3$. Le second terme de la racine sera donc $$b=\frac{(24n^3-16n^2p)\,x^3}{2(3n-2p)\,x^2}=\frac{12n^3-8n^2p}{3n-2p}.x.$$

Effectuant à part la division, l'on obtient $b=4n^2x$.

Il faut maintenant retrancher du premier reste R la quantité $2ab+b^2=B+b^2$; le deuxième reste s'obtiendra donc en supprimant le terme B, et en retranchant en outre $b^2=16n^4x^2$.

Le troisième terme de la racine sera donc

$$c=\frac{(-6n^4+4n^3p+6np^3-4p^4)\,x^2}{2.(3n-2p).x^2}=\frac{-3n^4+2n^3p+3np^3-2p^4}{3n-2p}.$$

Effectuant à part la division, l'on obtient $c=-n^3+p^3$.
Il faut retrancher du second reste la quantité $2(a+b)c+c^2=(2a+2b+c).c$, ou le produit

$$[(6n-4p)\,x^2+8n^2x-n^3+p^3]\times(-n^3+p^3).$$

Il résulte de cette soustraction un troisième reste *nul*. L'opération est terminée.

167. *S'il n'existe pas de polynôme rationnel et composé d'un nombre limité de termes, dont le carré soit égal au polynôme rationnel donné* P, on le reconnaîtra toujours, en appliquant au polynôme P la règle énoncée (nº 163).

Et d'abord, lorsqu'il existe un polynôme rationnel, P′, dont le carré est égal à P, si l'on conçoit les polynômes P′ et P ordonnés par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une même lettre on sait que le premier et le dernier terme de P sont respectivement les carrés du premier et du dernier terme de P′. Donc, lorsque le premier ou le dernier terme du polynôme ordonné P n'est pas le carré d'une quantité algébrique rationnelle, on en doit conclure que $\sqrt{P}$ n'est pas non plus une quantité rationnelle.

Mais supposons que le premier et le dernier termes de P soient les carrés de quantités rationnelles. *Si le polynôme* P *est ordonné par rapport aux puissances décroissantes d'une lettre* x, *l'impossibilité d'obtenir la racine carrée deviendra évidente lorsqu'on aura été conduit à poser à la racine un terme dans lequel l'exposant de* x *est moindre que la moitié de l'exposant de cette lettre dans le dernier terme de* P.

En effet, dans la première des soustractions que prescrit la règle, le premier terme de P est détruit; et dans chacune des soustractions suivantes, le premier terme de chaque reste est détruit. Donc les degrés des restes successifs vont en diminuant au moins d'une unité; et par suite, les termes obtenus successivement à la racine sont d'un degré de plus en plus petit par rapport à x. Il y aura donc un nombre limité d'opérations après lesquelles, en supposant qu'on n'ait pas eu un reste *nul*, on sera conduit à mettre à la racine un terme dans lequel l'exposant de x sera moindre que la moitié de l'exposant de cette lettre dans le dernier terme de P. Lorsque cela arrive, la puissance de x, dans le carré de ce terme de la racine, est plus petite que la puissance de x dans le dernier terme de P. Donc, à plus forte raison, la puissance de x, dans le carré de chacun des termes qu'on obtiendrait ultérieurement à la racine, serait plus petite que la puissance de x dans le dernier terme de P. Il est donc impossible qu'on obtienne jamais à la racine un *dernier terme*, dont le carré devrait être égal au dernier terme du polynôme proposé P; et l'on en conclut que l'opération ne pourra jamais se terminer.

On prouvera d'une manière semblable que *si le polynôme* P *est* *ordonné par rapport aux puissances croissantes d'une lettre,* x*, l'impossibilité d'obtenir la racine carrée deviendra évidente, lorsqu'on aura été conduit à poser à la racine un terme dans lequel l'exposant de* x *est plus grand que la moitié de l'exposant de cette lettre dans le dernier terme de* P.

Soit, par exemple, le binôme $P=x^2+4$, ordonné par rapport aux puissances *décroissantes* de x; le degré de x dans le dernier terme est *zéro*.

$$\begin{array}{l|l}
x^2+4 & x+\frac{2}{x}-\text{etc.} \\
-x^2 & \\
\hline
1^{\text{er}}\text{ reste } 4 & 2x+\frac{2}{x} \\
\hline
2^{\text{e}}\text{ reste } -\frac{4}{x^2} & \quad +\frac{2}{x}
\end{array}$$

Le premier terme obtenu à la racine est x; le second terme est $\frac{4}{2x}$ ou $\frac{2}{x}=2\times x^{-1}$; l'exposant de x dans ce second terme est moindre que la moitié de l'exposant de x dans le dernier terme de P. L'opération ne se terminera pas.

Si l'on opère sur le binôme $P=4+x^2$, ordonné par rapport aux puissances *croissantes* de x, le premier terme obtenu à la racine est 2; le second terme est $\frac{1}{4}x^2$; l'exposant de x, dans ce second terme surpasse la moitié de l'exposant de x dans le dernier terme de P. La racine se développera en une suite de termes illimitée (*).

Des opérations sur les quantités incommensurables.

168. Les expressions algébriques sur lesquelles on peut avoir à opérer, ne représentant pas toujours des valeurs commensurables, il faut expliquer ce qu'on entend par le *résultat d'une opération dans laquelle entrent des quantités incommensurables*, et montrer com-

(*) On trouvera de même

$$\sqrt{a^2+x^2}=a+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{a^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{4.6}\cdot\frac{x^6}{a^5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{4.6.8}\cdot\frac{x^8}{a^7}+\text{etc.}$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=a-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{a^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{4.6}\cdot\frac{x^6}{a^5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{4.6.8}\cdot\frac{x^8}{a^7}-\text{etc.}$$

ment les règles du calcul algébrique s'étendent et s'appliquent aux quantités incommensurables et aux expressions irrationnelles.

169. On a vu en arithmétique (page 96), qu'il est toujours possible d'obtenir des nombres commensurables, a, α, qui diffèrent l'un de l'autre d'une quantité aussi petite qu'on voudra, et qui comprennent entre eux la valeur de la racine carrée d'un nombre A.

Si l'on conçoit que la quantité a augmente en restant toujours moindre que $\sqrt{A}$, et prenne ainsi différentes valeurs a', a'', a''', etc., on pourra obtenir une valeur commensurable qui diffère de $\sqrt{A}$, d'une quantité plus petite que toute quantité donnée. C'est ce que l'on exprime en disant que $\sqrt{A}$ est une *limite* de la quantité commensurable a, qui varie en augmentant indéfiniment.

De même, si l'on conçoit que la quantité α diminue en restant toujours plus grande que $\sqrt{A}$, et prenne ainsi différentes valeurs, α', α'', α''', etc., on pourra obtenir une valeur commensurable qui ne surpasse $\sqrt{A}$ que d'une quantité plus petite que toute quantité donnée; et l'on dira que $\sqrt{A}$ est une *limite* de la quantité commensurable α, qui varie en diminuant indéfiniment.

Considérons maintenant la racine carrée d'un nombre B, différent de A, et supposons que $\sqrt{B}$ soit une expression incommensurable. Désignons par b, b', b'', etc., des nombres commensurables plus petits que $\sqrt{B}$, qui diffèrent de moins en moins de $\sqrt{B}$; et par β, β', β'', etc., des valeurs plus grandes que $\sqrt{B}$, lesquelles vont en diminuant et s'approchent de plus en plus de $\sqrt{B}$.

Les sommes $a+b$, $a'+b'$, $a''+b''$, etc., iront en augmentant. Cependant, ces sommes auront une limite, car elles doivent rester moindres que la somme $\alpha+\beta$. La *limite* des sommes variables $a+b$, $a'+b'$, etc., est ce que nous appellerons la SOMME *des quantités incommensurables* $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$. Cette définition s'appliquera à la *somme* d'un nombre quelconque de quantités incommensurables, telles qu'il soit possible d'obtenir des nombres commensurables plus petits qu'elles, et qui puissent en différer aussi peu qu'on voudra.

On peut encore définir la *somme* $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, la *limite* des sommes commensurables $\alpha+\beta$, $\alpha'+\beta'$, etc.; qui varient en diminuant indéfiniment.

Semblablement, les produits ab, $a'b'$, $a''b''$, etc.; iront en augmentant. Cependant, ces produits auront une limite, car ils doivent rester moindres que le produit $\alpha\beta$. La *limite* des produits variables ab, $a'b'$, etc., est ce que nous appellerons le PRODUIT *des quantités incommensurables* $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$. Cette définition s'appliquera au *produit* d'un nombre quelconque de quantités incommensurables.

On peut encore définir le PRODUIT *de quantités incommensurables*, telles que $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, la *limite* des produits commensurables $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, etc., qui varient en diminuant indéfiniment, et dont les facteurs approchent autant qu'on veut des quantités incommensurables proposées.

De même, la DIFFÉRENCE *de deux quantités incommensurables*, telles que $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, est la *limite* vers laquelle tendent les différences commensurables $\alpha - b$, $\alpha' - b'$, $\alpha'' - b''$, etc., qui décroissent indéfiniment; ou la *limite* des différences $a - \beta$, $a' - \beta'$, etc., qui augmentent indéfiniment. Enfin le QUOTIENT, tel que $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$, signifie la *limite* vers laquelle tendent les quotients commensurables $\frac{\alpha}{b}$, $\frac{\alpha'}{b'}$, $\frac{\alpha''}{b''}$, etc., qui décroissent indéfiniment; ou la *limite* des quotients $\frac{a}{\beta}$, $\frac{a'}{\beta'}$, etc., qui augmentent indéfiniment

170. *Le produit de plusieurs facteurs incommensurables, ne change pas dans quelque ordre qu'on indique les multiplications.* Ainsi l'on aura $\sqrt{A} \times \sqrt{B} = \sqrt{B} \times \sqrt{A}$. Cela résulte de la définition du *produit*. Car les produits commensurables ab, ba, étant constamment égaux, dans tous leurs états de grandeur, la *limite* du premier est nécessairement la même que la limite du second.

Il suit de là que toutes les règles du calcul des fractions (n° 51), s'appliquent aux fractions dont les termes sont incommensurables.

Calcul des radicaux du second degré.

171. On dit que *des radicaux du second degré sont* SEMBLABLES, lorsque la quantité placée sous chaque signe radical est la même, de sorte que les radicaux proposés ne diffèrent que par des facteurs rationnels. Ainsi les radicaux $2\sqrt{a}$, $\frac{1}{2}(b+c)\sqrt{a}$, sont *semblables*.

Il est clair que, dans un polynôme, *tous les termes qui sont formés de quantités radicales semblables se réduisent en un seul terme*, qu'on obtient en multipliant par le radical commun, la somme algébrique des facteurs rationnels. Ainsi le polynôme. . . . . . $2b\sqrt{a}+b\sqrt{a}+5c\sqrt{a}-2c\sqrt{a}$ est égal à $(2b+b+5c-2c)\sqrt{a}$, et se réduit à $(3b+3c)\sqrt{a}$, ou $3(b+c).\sqrt{a}$.

172. *Les radicaux* $\sqrt{ab^2}$ et $b\sqrt{a}$ *sont égaux*. On a en effet,

$$(b\sqrt{a})^2=b.\sqrt{a}.b.\sqrt{a}=b^2.(\sqrt{a})^2=ab^2;$$

la quantité $b\sqrt{a}$ est donc la *racine carrée* de la quantité ab^2.

De cette égalité l'on conclut : 1° qu'*on peut supprimer sous le signe radical un facteur carré* b², *pourvu qu'on écrive hors du signe radical la racine carrée*, b, *de ce facteur ;* on dit alors qu'*on a fait sortir du radical le facteur* b² ;

2° Qu'*on peut supprimer un facteur rationnel* b, *qui est hors du signe radical, pourvu qu'on multiplie la quantité qui est sous le signe radical, par le carré de ce facteur* b ; on dit alors qu'*on a fait entrer ce facteur sous le radical.*

Il peut arriver que des quantités radicales, dissemblables en apparence, soient ramenées à être semblables, lorsqu'on a fait sortir du radical les facteurs carrés. Soient par exemple, les quantités

$$5\sqrt{a},\ 2\sqrt{9ab^2}\ \text{et}\ \sqrt{4a^3b^2+8a^3bc+4a^3c^2},$$

qui renferment des quantités différentes sous le signe radical. On a

$$2\sqrt{9ab^2}=2\sqrt{a(3b)^2}=6b\sqrt{a},$$

$$\text{et}\ \sqrt{4a^3b^2+8a^3bc+4a^3c^2}=\sqrt{a(2ab+2ac)^2}=(2ab+2ac)\sqrt{a}.$$

Ainsi après la simplification, les radicaux proposés sont semblables.

173. Addition et soustraction. Pour additionner les quantités radicales, et pour soustraire une quantité radicale d'une autre quantité, l'on suit les règles déjà indiquées (nos 6, 7) ; puis l'on opère, s'il y a lieu, la réduction des radicaux semblables. Ainsi l'on a

$$2\sqrt{a}-3\sqrt{b}+(3\sqrt{a}+4\sqrt{b})$$
$$=2\sqrt{a}-3\sqrt{b}+3\sqrt{a}+4\sqrt{b}=5\sqrt{a}+\sqrt{b};$$
$$4\sqrt{a}+\sqrt{b}-(3\sqrt{a}-\sqrt{b})$$
$$=4\sqrt{a}+\sqrt{b}-3\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a}+2\sqrt{b}\ (*).$$

(*) *La somme et la différence de deux radicaux du second degré sont des quan-*

174. Multiplication. *Pour former le produit de deux radicaux du second degré, faites le produit des quantités placées sous le signe radical, et affectez ce produit du même signe radical.* Vous aurez, par exemple $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

En effet on a

$$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}$$
$$=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2=ab;$$

la quantité $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ est donc la *racine carrée* de la quantité ab.

Remarquez que *le produit de deux radicaux du second degré peut être une quantité rationnelle.* Soit, par exemple, le produit

$$\sqrt{3a}\times\sqrt{27a}=\sqrt{3a\times 27a}=\sqrt{81a^2}=9a;$$

chacun des facteurs $\sqrt{3a}$, $\sqrt{27a}$, est une quantité irrationnelle; mais leur produit $9a$ est rationnel.

175. Division. *Pour former le résultat de la division d'un radical du second degré par un autre radical du second degré, divisez la quantité placée sous le premier signe radical par la quantité placée sous le second, et affectez ce quotient du même signe radical.*

Vous aurez, par exemple, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

En effet, on a $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)=\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\dfrac{a}{b}$ (nº 170); la quantité $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est donc la *racine carrée* de la quantité $\dfrac{a}{b}$.

Remarquez que *le quotient de deux radicaux du second degré peut être une quantité rationnelle:* soit, par exemple, le quotient

---

tités irrationnelles. En effet, soit $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$; d'où $x-\sqrt{b}=\sqrt{a}$, et $(x-\sqrt{b})^2=x^2-2x\sqrt{b}+b=a$. On en déduit $x^2+b-a=2x\sqrt{b}$, et $\dfrac{x^2+b-a}{2x}=\sqrt{b}$. Donc si la somme x était rationnelle, le terme radical, $\sqrt{b}$, serait une quantité rationnelle, contrairement à l'hypothèse.

On démontre de même que $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est une quantité irrationnelle.

$$\frac{\sqrt{27a}}{\sqrt{3a}}=\sqrt{\frac{27a}{3a}}=\sqrt{9}=3;$$

chacun des termes $\sqrt{27a}$, $\sqrt{3a}$, est irrationnel; mais le quotient 3 est rationnel.

176. EXPOSANT FRACTIONNAIRE, $\frac{n}{2}$. On a vu que, si une lettre a est affectée d'un exposant pair, $n=2m$, on obtient la racine carrée de $a^n=a^{2m}$, en donnant à la lettre a l'exposant $m=\frac{n}{2}$ (n° 160), de sorte qu'on a

$$\sqrt{a^n}=\sqrt{a^{2m}}=a^{\left(\frac{2m}{2}\right)}=a^{\left(\frac{n}{2}\right)};$$

par conséquent, *l'exposant* $\frac{n}{2}$, dont la forme est fractionnaire, *indique*, lorsque la division peut se faire exactement, *qu'il faut prendre la racine carrée de la quantité* a^n.

On est convenu d'admettre dans les calculs l'exposant fractionnaire $\frac{n}{2}$, *même dans le cas où* n *est impair*, c'est-à-dire que *le symbole algébrique* $a^{\frac{n}{2}}$ *constitue, par convention, une manière d'écrire la racine* $\sqrt{a^n}$.

Par exemple $a^{\frac{3}{2}}$ signifie $\sqrt{a^3}$, et l'expression $a^{\frac{1}{2}}$ a la même signification que le radical $\sqrt{a}$.

Les règles qui déterminent l'exposant d'une lettre dans un produit ou dans un quotient, quand tous les exposants sont entiers, s'étendent au cas où l'on admet dans les calculs L'EXPOSANT FRACTIONNAIRE $\frac{n}{2}$.

Ainsi le *produit* $a^3\times a^{\frac{5}{2}}$, ou $a^{\frac{5}{2}}\times a^3$, sera $a^{3+\frac{5}{2}}=a^{\frac{11}{2}}$; car $a^{\frac{5}{2}}=\sqrt{a^5}$, par convention; on a donc

$$a^3\times a^{\frac{5}{2}}=a^3\times\sqrt{a^5}=\sqrt{a^{3\times 2}\times a^5}=\sqrt{a^{11}}=a^{\frac{11}{2}}.$$

On établira de même les égalités suivantes:

$$a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{5}{2}} = a^{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}} = a^4; \quad a^3 : a^{\frac{5}{2}} = a^{3-\frac{5}{2}} = a^{\frac{1}{2}};$$

$$a^{\frac{5}{2}} : a^3 = a^{\frac{5}{2}-3} = a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}; \quad a^{\frac{5}{2}} : a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}} = a.$$

Si l'on range par ordre de grandeur les exposants des puissances d'une quantité a; par exemple,... a^3, $a^{\frac{5}{2}}$, a^2, $a^{\frac{3}{2}}$, a, $a^{\frac{1}{2}}$, a^0, $a^{-\frac{1}{2}}$, a^{-1},..., l'on dira que ces puissances sont *rangées par ordre de grandeur*, quant à leur degré.

Il suit de là qu'*un polynôme qui renferme des radicaux du second degré peut être* ORDONNÉ *par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une même lettre.*

Par exemple le polynôme $x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, ou $\sqrt{x^3}+\sqrt{x^{-1}}$, peut être mis sous la forme $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$.

On s'assure facilement, en raisonnant comme au nº 75, que *si les facteurs d'un produit sont* ORDONNÉS, *le produit du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, ne peut se réduire avec aucun autre produit partiel;* et il en est de même du produit du dernier terme du multiplicande par le dernier terme du multiplicateur.

Par conséquent, la règle donnée au nº 163, pour l'extraction de la racine carrée d'un polynôme, est encore applicable à un polynôme dont la racine carrée renferme des radicaux du second degré. Ainsi, 1º si le polynôme donné P (qui peut renfermer des radicaux du second degré) est le carré d'un polynôme $P'=a+b+c+$ etc., composé de termes rationnels ou de radicaux du second degré, la règle énoncée fera trouver tous les termes du polynôme $P'=\sqrt{P}$;

2º S'il n'existe pas de polynôme, composé d'un nombre limité de termes, dont le carré soit égal au polynôme donné P, on le reconnaîtra toujours en appliquant cette règle au polynôme P; et le *caractère d'impossibilité* constatant que l'opération ne pourra jamais se terminer, sera celui que nous avons expliqué au nº 167.

Extraction de la racine carrée, dans laquelle on admet des radicaux du second degré.

177. Lorsque dans un terme algébrique irrationnel, une lettre

n'entre pas sous le signe radical, on dit que ce terme est *rationnel par rapport à cette lettre.*

Les quantités irrationnelles $x\sqrt{5}$, $\frac{x}{\sqrt{5}}$, sont *rationnelles par rapport à x.*

On dit qu'*un polynôme est rationnel* PAR RAPPORT A UNE LETTRE, lorsque tous les termes de ce polynôme sont *rationnels par rapport à cette lettre.*

178. Un polynôme rationnel qui n'est pas le carré d'un autre polynôme rationnel, peut néanmoins être le carré d'un polynôme *rationnel par rapport à une certaine lettre.*

Soit par exemple, le polynôme $3x^2+6x+3$, qui n'est pas le carré d'une quantité rationnelle, puisque le nombre 3 n'est pas un carré. Si l'on cherche la racine carrée de ce polynôme, en admettant à la racine des termes irrationnels, on obtient

$$x\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3x^2+6x+3};$$

cette racine est *rationnelle par rapport à x.*

179. Si l'on cherche la racine carrée du trinôme ax^2+bx+c, on obtient d'abord à la racine le binôme $x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$; le reste correspondant est $c-\frac{b^2}{4a}$, ou $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Lorsque les valeurs qu'on attribue aux coefficients a, b, c, ne rendent pas ce reste nul, c'est-à-dire, *lorsque b^2 est différent de $4ac$*, l'opération ne peut pas se terminer; car le troisième terme de la racine serait $\frac{4ac-b^2}{4a\times 2x\sqrt{a}}=\frac{(4ac-b^2)}{8a\sqrt{a}}.x^{-1}$, et le degré de ce terme par rapport à x, serait *moindre* que la moitié de l'exposant de x, dans le dernier terme $c.x^0$ du trinôme proposé. Dans ce cas, *le trinôme ax^2+bx+c ne peut pas être le carré d'un polynôme* composé d'un nombre limité de termes.

Lorsque les valeurs attribuées aux coefficients a, b, c, annulent le reste $\frac{4ac-b^2}{4a}$, c'est-à-dire, *lorsque b^2 est égal à $4ac$*, l'opération est terminée; *le trinôme ax^2+bx+c* est le *carré* du binôme $x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$, qui est *rationnel par rapport à x.*

180. Nous proposerons encore d'extraire la racine carrée du polynôme

$$\mathrm{P} = 0{,}2x^3 - 1{,}2x^2 + 3{,}8x - 6 + \frac{5}{x}.$$

Cette racine ne peut être rationnelle, ni par rapport aux nombres, ni par rapport à x.

Pour simplifier les calculs, on multiplie d'abord P par un facteur qui change le premier terme $0{,}2x^3$ en un carré ; le facteur $5x$ remplissant cette condition, on met P sous la forme

$$\mathrm{P} = \frac{1}{5x} \times (5x \times \mathrm{P}) = \frac{1}{5x}(x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 25),$$

et l'on cherche la racine du facteur $x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 25$. Cette racine, qui s'obtient en valeur exacte dans l'exemple proposé, est égale à $x^2 - 3x + 5$.

On en conclut que P est le *carré* de la quantité irrationnelle

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{5x}} = \left(\frac{x}{5} - \frac{3}{5} + \frac{1}{x}\right)\sqrt{5x} = \left(\frac{1}{5}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{5}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)\sqrt{5}.$$

Équations du second degré.

181. *Une équation du second degré à une seule inconnue, peut toujours*, par la transposition des termes, *être réduite à trois termes au plus*. Si, par exemple, on ramène l'équation proposée à la forme $\mathrm{A} = 0$ (nº 88), on pourra réduire en un seul terme, ax^2, la totalité des termes qui admettent pour facteur le carré de l'inconnue x ; le coefficient a désignant une quantité positive ou négative, qui ne renferme que des quantités connues. De même, les termes qui admettent comme facteur l'inconnue x à la première puissance, se réduiront en un seul terme bx ; enfin les termes indépendants de l'inconnue se réduiront en un seul terme c ; les quantités b, c étant connues. Alors l'équation est ramenée à la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Si le terme c se réduit à *zéro*, de sorte qu'il s'agit de résoudre l'équation incomplète $ax^2 + bx = 0$, ou $x.(ax + b) = 0$, il est clair que *cette équation admet une racine nulle, et une racine égale à* $-\frac{b}{a}$, qu'on obtient en résolvant l'équation du premier degré $ax + b = 0$. Mais *l'équation n'admet pas d'autre racine*; car une valeur de x différente de $x = 0$ et de $x = -\frac{b}{a}$, ne pouvant annuler aucun des facteurs du produit $x(ax+b)$, ne rendrait pas ce produit égal à *zéro*.

Si le coefficient b se réduit à *zéro*, de sorte qu'il s'agit de résoudre l'*équation à deux termes* $ax^2+c=0$, ou $x^2+\frac{c}{a}=0$, on en déduit $x^2=-\frac{c}{a}$ et $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (*); de sorte que l'*équation du second degré à deux termes admet deux racines, et n'en admet que deux*. Lorsque les coefficients a et c sont de *signes contraires*, la quantité $-\frac{c}{a}$ est *positive*, les racines sont RÉELLES, *numériquement égales, et de signes contraires*. Lorsque les coefficients a et c sont de *même signe*, la quantité $-\frac{c}{a}$ est *négative ;* les racines sont *imaginaires*.

182. Si aucun des coefficients a, b, c, n'est nul, de sorte qu'il s'agit de résoudre l'*équation du second degré complète* $ax^2+bx+c=0$, ou $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, on ramène la question à *résoudre une équation à deux termes* ou à *résoudre deux équations du premier degré*.

Posons pour abréger $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$. L'équation à résoudre est

$$x^2+px+q=0. \qquad (1)$$

Considérons la somme x^2+px, comme la somme des deux premiers termes du carré d'un binôme $x+z$, ce qui exige que p soit égal à $2z$, ou qu'on ait $z=\frac{p}{2}$; ce binôme est donc $x+\frac{p}{2}$, et son carré est $x^2+px+\frac{p^2}{4}$. Complétant le carré de $x+\frac{p}{2}$ dans le premier membre de l'équation (1), on a l'équation

(*) On peut aussi mettre l'équation $x^2+\frac{c}{a}=0$, sous la forme $x^2-\left(-\frac{c}{a}\right)=0$; ou $x^2-\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2=0$; ce qui revient à $\left(x+\sqrt{-\frac{c}{a}}\right).\left(x-\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)=0$. Il est alors évident que l'équation admet les *deux racines*

$$x=-\sqrt{-\frac{c}{a}},\quad x=+\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

qui annulent l'un ou l'autre des deux facteurs du produit, et qu'*il ne peut exister d'autre racine* de l'équation à deux termes proposée.

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=0, \text{ ou } \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=0. \quad (2)$$

L'équation (2) est une *équation à deux termes*, dans laquelle l'inconnue $x+\frac{p}{2}$, admet les deux valeurs $x+p=+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, $x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, et n'en admet pas d'autre.

On en conclut que l'équation (1) admet les deux racines

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \quad x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

et n'en admet pas d'autre.

Les valeurs des racines de l'équation du second degré se trouvent ainsi exprimées en fonction des quotients p, q; et l'on a, pour former ces valeurs des racines, la règle suivante :

Lorsque l'équation a été ramenée à la forme $\mathrm{x^2+px+q=0}$, *dans laquelle le coefficient du carré de l'inconnue est positif et égal à l'unité, la valeur de* x *est égale à la moitié du coefficient* p *du second terme, pris avec un signe contraire, plus ou moins la racine carrée de la* SOMME *qu'on obtient en ajoutant au carré de la moitié de ce coefficient* p, *le dernier terme* q, *pris avec un signe contraire* (*).

Il est facile de *vérifier* que ces valeurs des racines satisfont à l'équation $x^2+px+q=0$, qui revient à $x(p+x)+q=0$. Car, si l'on désigne par r la valeur du radical $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, de sorte qu'on

(*) Cette règle est encore applicable aux cas dans lesquels l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'est pas *complète*. Si le terme c se réduit à *zéro*, on a $\frac{c}{a}=q=0$; d'où $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}}$, ce qui donne

$$x'=-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}=0 \quad \text{et} \quad x''=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=-p=-\frac{b}{a}.$$

Et si le coefficient b se réduit à *zéro*, on a $\frac{b}{a}=p=0$;

d'où $$x=\pm\sqrt{-q}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

On retrouve ainsi les résultats déjà obtenus (n. 181).

a $r^2=\frac{p^2}{4}-q$, les valeurs de x, formées d'après la règle précédente, sont $x'=-\frac{p}{2}+r$, et $x''=-\frac{p}{2}-r$. On en déduit:

1° $p+x'=r+\frac{p}{2}$, $x'(p+x')=\left(r-\frac{p}{2}\right).\left(r+\frac{p}{2}\right)=r^2-\frac{p^2}{4}=-q$,

et $$x'(p+x')+q=-q+q=0,$$

2° $p+x''=-r+\frac{p}{2}$, $x''(p+x'')=\left(-r-\frac{p}{2}\right).\left(-r+\frac{p}{2}\right)=r^2-\frac{p^2}{4}=-q$,

et $$x''(p+x'')+q=0.$$

183. Si l'on veut exprimer les racines de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$, en fonction des coefficients a, b, c, il suffit de remplacer p et q par leurs valeurs, dans la formule

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

ou $$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-ap\pm\sqrt{a^2p^2-4a.aq}}{2a}.$$

On trouve ainsi $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

184. La méthode par laquelle nous avons ramené la résolution de l'équation complète $x^2+px+q=0$, à celle d'une équation à deux termes, peut encore servir à *décomposer le trinôme* x^2+px+q *en un produit de deux facteurs du premier degré par rapport à* x. Ainsi l'on a

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right);$$

et si l'on pose $-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=x'$, $-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=x''$,

on aura $$x^2+px+q=(x-x'').(x-x');$$

c'est-à-dire que le trinôme sera décomposé en un produit de deux facteurs *binômes*, du premier degré par rapport à x. On reconnaît que les quantités x', x'', indépendantes de x, sont les racines de l'équation $x^2+px+q=0$. Ce sont les valeurs particulières de x pour lesquelles la valeur du trinôme est nulle. Par conséquent :

Pour décomposer en facteurs du premier degré par rapport à x, *le trinôme* $\mathrm{ax^2+bx+c}$, *ou* $\mathrm{a}\left(\mathrm{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right)=\mathrm{a(x^2+px+q)}$, *on résoudra l'équation* $\mathrm{x^2+px+q=0}$, *c'est-à-dire que l'on calculera les racines* $\mathrm{x', x''}$, *de cette équation, et l'on aura*

$$ax^2+bx+c=a(x-x').(x-x'').$$

185. *Si la quantité* α *est racine de l'équation* $\mathrm{x^2+px+q=0}$, *le premier membre est divisible par le binôme* $\mathrm{x}-\alpha$, *et réciproquement.*

En effet, on sait que le reste de la division du polynôme x^2+px+q par le binôme $x-\alpha$ est $\alpha^2+p\alpha+q$ (n° 102). *Lorsque* α *est racine de l'équation*, l'on a $\alpha^2+p\alpha+q=0$; donc, le reste étant nul, le polynôme x^2+px+q, est *divisible* par $x-\alpha$.

Réciproquement, *lorsque la division se fait exactement*, le reste $\alpha^2+p\alpha+q$ est nul, en vertu de l'hypothèse. Donc la quantité α est *racine* de l'équation $x^2+px+q=0$.

Lorsque la quantité $\alpha^2+p\alpha+q$ est nulle, le quotient $\frac{x^2+px+q}{x-\alpha}$ est égal à $x+p+\alpha$, de sorte qu'on a $x^2+px+q=(x-\alpha)(x+p+\alpha)$.

La valeur de ce produit s'annule lorsqu'on suppose $x=\alpha$; elle s'annule encore lorsqu'on suppose $x=-p-\alpha$; d'où l'on conclut que *si la quantité* α *est racine de l'équation* $\mathrm{x^2+px+q=0}$, *l'autre racine est égale à* $-\mathrm{p}-\alpha$. *La somme algébrique des deux racines*, $-\mathrm{p}-\alpha$ *et* α, *est égale à* $-\mathrm{p}$. *Le produit des deux racines*, $-\mathrm{p}-\alpha$ *et* α, *est* $-\mathrm{p}\alpha-\alpha^2$, *quantité égale à* q, puisqu'on a $\alpha^2+p\alpha+q=0$.

186. Les deux relations que nous venons d'établir entre les racines de l'équation du second degré et les coefficients p, q, de l'équation se déduisent directement des formules

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\quad x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

On a évidemment pour la *somme*, $x'+x''=-p$; c'est-à-dire que *la* SOMME *des racines de l'équation du second degré* $\mathrm{x^2+px+q=0}$, *est égale au coefficient du second terme, pris avec un signe contraire.*

Quant au produit, les valeurs de x', x'' étant exprimées par la somme et par la différence des quantités $-\frac{p}{2}$, $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, ce prol'équation $x^2+px+q=0$. Ce sont les valeurs particulières de x pour lesquelles la valeur du trinôme est nulle. Par conséquent:

Pour décomposer en facteurs du premier degré par rapport à x, *le trinôme* ax^2+bx+c, *ou* $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x^2+px+q)$, *on résoudra l'équation* $x^2+px+q=0$, *c'est-à-dire que l'on calculera les racines* x', x'', *de cette équation, et l'on aura*

$$ax^2+bx+c=a(x-x').(x-x'').$$

185. *Si la quantité* α *est racine de l'équation* $x^2+px+q=0$, *le premier membre est divisible par le binôme* $x-\alpha$, *et réciproquement.*

En effet, on sait que le reste de la division du polynôme x^2+px+q par le binôme $x-\alpha$ est $\alpha^2+p\alpha+q$ (n° 102). *Lorsque* α *est racine de l'équation*, l'on a $\alpha^2+p\alpha+q=0$; donc, le reste étant nul, le polynôme x^2+px+q, est *divisible* par $x-\alpha$.

Réciproquement, *lorsque la division se fait exactement*, le reste $\alpha^2+p\alpha+q$ est nul, en vertu de l'hypothèse. Donc la quantité α est *racine* de l'équation $x^2+px+q=0$.

Lorsque la quantité $\alpha^2+p\alpha+q$ est nulle, le quotient $\dfrac{x^2+px+q}{x-\alpha}$ est égal à $x+p+\alpha$, de sorte qu'on a $x^2+px+q=(x-\alpha)(x+p+\alpha)$.

La valeur de ce produit s'annule lorsqu'on suppose $x=\alpha$; elle s'annule encore lorsqu'on suppose $x=-p-\alpha$; d'où l'on conclut que *si la quantité* α *est racine de l'équation* $x^2+px+q=0$, *l'autre racine est égale à* $-p-\alpha$. *La somme algébrique des deux racines*, $-p-\alpha$ *et* α, *est égale à* $-p$. *Le produit des deux racines*, $-p-\alpha$ *et* α, *est* $-p\alpha-\alpha^2$, *quantité égale à* q, puisqu'on a $\alpha^2+p\alpha+q=0$.

186. Les deux relations que nous venons d'établir entre les racines de l'équation du second degré et les coefficients p, q, de l'équation se déduisent directement des formules

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\quad x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

On a évidemment pour la *somme*, $x'+x''=-p$; c'est-à-dire que *la* SOMME *des racines de l'équation du second degré* $x^2+px+q=0$, *est égale au coefficient du second terme, pris avec un signe contraire.*

Quant au produit, les valeurs de x', x'' étant exprimées par la somme et par la différence des quantités $-\frac{p}{2}$, $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, ce produit est égal à la différence des carrés de ces quantités. On a donc

$$x'.x'' = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q;$$

c'est-à-dire que *le* PRODUIT *des racines de l'équation du second degré* $x^2 + px + q = 0$, *est égal au dernier terme* q.

187. Ces propriétés des racines de l'équation du second degré, donnent un moyen facile de *former une équation du second degré qui admette pour racines deux quantités données*, α, β.

Si nous représentons l'équation demandée par $x^2 + px + q = 0$, il s'agit de déterminer p et q, de manière que les valeurs des racines soient égales à α, β.

A cet effet, on posera $p = -(\alpha + \beta)$, $q = \alpha . \beta$; et l'équation $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha . \beta = 0$, remplira les conditions du problème.

Discussion des racines de l'équation du second degré, $x^2 + px + q = 0$.

188. *Lorsque les coefficients* p, q *de l'équation* $x^2 + px + q = 0$, *sont des quantités réelles*, 1° *les racines sont* RÉELLES ET INÉGALES *toutes les fois qu'on a* $\frac{p^2}{4} - q > 0$;

2° *Les racines sont* RÉELLES ET ÉGALES *lorsqu'on a* $\frac{p^2}{4} - q = 0$;

3° Enfin, *les racines sont* IMAGINAIRES lorsqu'on a $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

En effet, selon que la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est plus grande que *zéro*, ou nulle, ou moindre que *zéro*, c'est-à-dire négative, la valeur du radical $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, est un certain nombre r, ou bien elle est nulle, ou elle est imaginaire.

Dans le premier cas, les deux racines $x' = -\frac{p}{2} + r$, $x'' = -\frac{p}{2} - r$, sont évidemment réelles et inégales;

Dans le second cas, les racines $x' = -\frac{p}{2} + 0$, $x'' = -\frac{p}{2} - 0$, sont évidemment égales à la quantité réelle $-\frac{p}{2}$;

Dans le dernier cas, les valeurs des racines formées d'un terme réel, et d'un terme *imaginaire*, ne sont calculables ni exactement, ni par approximation; elles sont *imaginaires*.

On conclut de là que, réciproquement, *si les racines de l'équation du second degré* $x^2 + px + q = 0$, *sont réelles et inégales, la quantité* $\frac{p^2}{4} - q$ *est nécessairement positive*; que *si les racines sont réelles et égales, la quantité* $\frac{p^2}{4} - q$ *est nulle*; enfin, que *si les racines sont imaginaires, la quantité* $\frac{p^2}{4} - q$ *est négative*.

Si la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est *positive*, on peut la représenter par le carré $+r^2$ d'une quantité *réelle*, r, commensurable ou irrationnelle; alors le premier membre $x^2 + px + q$ est égal à $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - r^2$. Ainsi, *lorsque la quantité* $\frac{p^2}{4} - q$ *est positive, ou lorsque les racines sont réelles et inégales, le premier membre de l'équation proposée est la différence de deux carrés* $(x + p)^2$, r^2.

Si la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est nulle, le premier membre se réduit à $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$. Ainsi, *lorsque la quantité* $\frac{p^2}{4} - q$ *est nulle, ou lorsque les racines sont égales, le premier membre est un carré.*

Enfin, si la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est négative, la quantité positive $q - \frac{p^2}{4}$, peut être représentée par le carré r^2, d'une quantité réelle r; alors le premier membre $x^2 + px + q$ est égal à $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + r^2$. Ainsi, *lorsque la quantité* $\frac{p^2}{4} - q$ *est négative, ou lorsque les racines sont imaginaires, le premier membre de l'équation proposée est la somme de deux carrés.*

Dans ce dernier cas, où le premier membre est nécessairement la *somme de deux quantités positives*, il est clair en effet qu'aucune valeur réelle de x, positive ou négative, ne pourra rendre le premier membre égal à *zéro*.

189. *Les seules équations du second degré à coefficients réels, qui puissent avoir leurs racines* IMAGINAIRES, *sont celles dont le dernier terme* q *est* POSITIF. Car si le dernier terme q, est négatif ou nul, la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est nécessairement positive, et les racines sont réelles.

Lorsque le dernier terme q *est positif*, on compare la valeur du carré de la moitié du coefficient du second terme px, à la valeur du dernier terme

q; et selon qu'on a $\frac{p^2}{4} > q$, ou $\frac{p^2}{4} = q$, ou $\frac{p^2}{4} < q$, l'on conclut que les racines sont réelles et inégales, ou égales, ou imaginaires.

190. *Lorsqu'on a reconnu que les racines d'une équation du second degré* $x^2+px+q=0$, *sont* RÉELLES, *on peut déterminer les signes des racines* à l'inspection des signes des coefficients de l'équation.

1° *Si le dernier terme* q *est négatif*, les racines réelles x', x'', sont de *signes contraires*, parce que leur produit $x'.x''=q$ est négatif. On peut alors déterminer, de plus, si la racine *négative* a une valeur numérique absolue plus grande ou moindre que celle de la racine positive. En effet, si le coefficient p est *négatif*, la somme algébrique $x'+x''$ des racines est positive; donc la racine positive a une valeur plus grande que la valeur absolue de la racine négative. Si au contraire le coefficient p est *positif*, la somme algébrique $x'+x''$ est négative; donc la racine positive a une valeur plus petite que la valeur numérique absolue de la racine négative. Enfin si p était nul, les racines x', x'', inégales parce qu'elles sont de signes contraires, auraient des valeurs absolues égales entre elles.

2° *Si le dernier terme* q *est nul*, une des racines est nulle, *l'autre racine est affectée d'un signe contraire au signe du coefficient* p.

3° *Si le dernier terme est positif*, les racines réelles x', x'' sont de *même signe*, puisque leur produit est positif. De plus, si le coefficient p est *négatif*, la somme $x'+x''$ est positive; les deux racines sont donc *positives*; si au contraire le coefficient p est *positif*, la somme $x'+x''$ est négative; les deux racines sont donc *négatives*. De sorte que *les racines de même signe sont*, dans les deux cas, *affectées d'un signe contraire au signe du coefficient* p.

191. Lorsqu'on exprime les racines de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$, en fonction des coefficients a, b, c (n° 183), on a

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Si les coefficients a, b, c sont des quantités *réelles*, 1° les racines sont *réelles et inégales* toutes les fois qu'on a $b^2-4ac>0$;

2° Les racines sont *réelles et égales* lorsqu'on a $b^2-4ac=0$;

3° Enfin les racines sont *imaginaires* lorsqu'on a $b^2-4ac<0$; et l'on en conclut que les propositions réciproques sont vraies.

Dans le cas où les racines sont *réelles*, elles sont affectées de *signes contraires*, lorsque les coefficients a, c, sont de *signes contraires*, puisqu'alors le quotient $q=\frac{c}{a}$, qui est égal au produit des deux racines, est *négatif*. Mais si les coefficients extrêmes a, c sont de *même signe*, les deux racines sont de *même signe que la quantité* $-\frac{b}{a}$, car le quotient $q=\frac{c}{a}$ étant alors *positif*, les deux racines sont de *même signe*; et ce signe, contraire à celui du quotient $p=\frac{b}{a}$, est le même que le signe de la quantité $-\frac{b}{a}$.

192. On peut *résoudre directement* l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$, sans diviser les deux membres par le coefficient a du carré de l'inconnue. Nous admettons toujours que les coefficients a, b, c représentent des quantités réelles.

Première méthode. Supposons d'abord qu'on ait réuni tous les termes dans un même membre, de manière que le coefficient a du carré de l'inconnue soit positif. Le terme ax^2 est le carré de la quantité réelle $x\sqrt{a}$. Considérons la somme ax^2+bx, comme la somme des deux premiers termes du carré d'un binôme $x\sqrt{a}+z$, ce qui exige que bx soit égal à $2x\sqrt{a}\times z$, c'est-à-dire que b soit égal à $2\sqrt{a}\times z$, de sorte que $z=\frac{b}{2\sqrt{a}}$. Le binôme $x\sqrt{a}+z$ est donc égal à $x\sqrt{a}+\frac{b}{\sqrt{a}}$, et son carré est $ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}$. Complétant le carré de $x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$, dans le premier membre de l'équation $ax^2+bx+c=0$, (1); on a l'équation

$$ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a}+c=0,\ \text{ou}\ \left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}.\quad (2)$$

L'équation (2) est une *équation à deux termes*, dans laquelle l'inconnue $\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$ admet les deux valeurs

$$x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}=+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\ \text{et}\ x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}},$$

et n'en admet pas d'autre.

On en conclut que l'équation (1) admet les deux racines

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad (A)$$

et n'en admet pas d'autre.

Deuxième méthode. Supposons qu'on ait réuni tous les termes dans un même membre, de manière que le terme tout connu c soit positif dans l'équation
$$c+bx+ax^2=0. \qquad (1)$$

Le terme c est le carré de la quantité réelle $\sqrt{c}$. Considérons la somme $c+bx$ comme la somme des deux premiers termes du carré d'un binôme $\sqrt{c}+y$, ce qui exige que bx soit égal à $2\sqrt{c}\times y$, ou qu'on ait $y=\frac{bx}{2\sqrt{c}}$; le binôme $\sqrt{c}+y$ est donc égal à $\sqrt{c}+\frac{bx}{2\sqrt{c}}$, et son carré est $c+bx+\frac{b^2x^2}{4c}$. Complétant le carré de $\sqrt{c}+\frac{bx}{2\sqrt{c}}$ dans le premier membre de l'équation (1), on a l'équation
$$c+bx+\frac{b^2x^2}{4c}-\frac{b^2x^2}{4c}+ax^2=0,\quad \text{ou}\quad \left(\sqrt{c}+\frac{bx}{2\sqrt{c}}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4c}-a\right)x^2=0,$$

ou
$$\left(\sqrt{c}+\frac{bx}{2\sqrt{c}}\right)^2-x^2.\left(\sqrt{\frac{b^2}{4c}-a}\right)^2=0 \quad (2).$$

Or, le premier membre de l'équation (2), formé de la différence de deux carrés, est décomposable en facteurs du premier degré : la question est ramenée à résoudre l'équation
$$\left(\sqrt{c}+\frac{bx}{2\sqrt{c}}+x.\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{c}}\right)\times\left(\sqrt{c}+\frac{bx}{2\sqrt{c}}-x.\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{c}}\right)=0.$$

Cette équation admet donc deux racines, qui sont les racines des deux équations du premier degré
$$2c+bx+x\sqrt{b^2-4ac}=0, \quad \text{et} \quad 2c+bx-x\sqrt{b^2-4ac}=0,$$
et elle ne peut pas admettre d'autre racine.

On obtient ainsi les deux valeurs
$$x'=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}} \quad \text{et} \quad x''=\frac{-2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}} \quad (B)$$

193. Remarquez que *les valeurs des racines*, x', x'', *dans les formules* (A) *et* (B), *diffèrent seulement par* UN FACTEUR COMMUN *aux deux termes des fractions qui expriment* x' *et* x''. Ce facteur est $\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$ pour la valeur de x', et $\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$ pour la valeur de x''.

En effet, par les formules (B), on a

$$x' = \frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}} = \frac{-2c.\left(\dfrac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}\right)}{(b+\sqrt{b^2-4ac}).\left(\dfrac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}\right)}$$

$$= \frac{-(b-\sqrt{b^2-4ac})}{\left(\dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{2c}\right)} = \frac{-(b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a};$$

c'est la valeur de x', dans les formules (A).

De même,

$$x'' = \frac{-2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}} = \frac{-2c.\left(\dfrac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}\right)}{(b-\sqrt{b^2-4ac}).\left(\dfrac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}\right)} = \frac{-(b+\sqrt{b^2-4ac})}{2a};$$

c'est la valeur de x'', dans les formules (A).

Discussion des racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$,
dans les hypothèses $a=0$; $a=0$, $b=0$; $a=0$, $b=0$, $c=0$.

194. Si l'on considère différentes équations du second degré dans lesquelles la valeur numérique du coefficient a soit supposée de plus en plus petite, tandis que les coefficients b, c, demeurent constamment les mêmes, la valeur du binôme b^2-4ac différera de moins en moins de la quantité b^2, et la valeur du radical $\sqrt{b^2-4ac}$ approchera indéfiniment de la valeur numérique de b, à mesure que a approchera de *zéro*. Enfin, si l'on suppose que a devienne *nul*, on aura $\pm\sqrt{b^2-4ac}=\pm b$. Dans cette hypothèse, la racine $x'=\dfrac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$ (B) devient $x'=\dfrac{-2c}{b+b}=-\dfrac{c}{b}$; et en effet, l'équation $ax^2+bx+c=0$, se réduit à $bx+c=0$, par l'hypothèse $a=0$, lorsqu'on veut n'attribuer à x que des valeurs finies; et alors cette équation admet la racine $x=-\dfrac{c}{b}$.

La racine $x''=\dfrac{-2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}$ (B) devient $x''=\dfrac{-2c}{b-b}$, et se présente alors sous la forme $x''=\dfrac{m}{0}=\infty$; de sorte que cette racine a une valeur numérique *infinie*, par où l'on voit que *si la valeur du coefficient* a *dimi-*

nue en approchant de zéro autant qu'on veut, la valeur numérique de l'une des racines augmente indéfiniment, et peut surpasser toute quantité donnée.

La même hypothèse, $a=0$, introduite dans les formules (A), donne $x'=\frac{0}{0}$, au lieu de $x'=-\frac{c}{b}$; ce qui tient à ce que les deux termes de la valeur de x', savoir,

$$-b+\sqrt{b^2-4ac}=-2c\left(\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}\right),$$

et

$$2a=\frac{4ac}{2c}=\frac{(b+\sqrt{b^2-4ac})\cdot(b-\sqrt{b^2-4ac})}{2c},$$

ont un facteur commun, $\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$, qui s'annule lorsqu'on suppose $a=0$.

Or, si l'on supprime ce facteur avant de supposer $a=0$, on obtient $x'=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$, formule qui conduit, comme on l'a vu, à la valeur déterminée et finie $x'=-\frac{c}{b}$, lorsqu'on y fait l'hypothèse $a=0$.

Quant à la seconde formule, $x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (A), elle donne encore $x''=\frac{n}{0}=\infty$, comme la formule (B), ce qui tient à ce que le facteur $\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$, commun aux deux termes de la valeur de x'', ne devient pas nul lorsqu'on suppose $a=0$.

105. Si l'on suppose à la fois $a=0$ et $b=0$, sans que c soit nul, l'équation $ax^2+bx+c=0$ se réduit à $c=0$, lorsqu'on veut n'attribuer à x que des valeurs finies; il est impossible d'y satisfaire par des valeurs finies de x. Et cette double hypothèse, $a=0$, $b=0$, introduite dans les formules (B), donne effectivement $x'=\frac{-2c}{0}=\infty$, $x''=\frac{-2c}{0}=\infty$.

Mais si l'on suppose $a=0$, $b=0$ dans les formules (A), elles donnent $x'=\frac{0}{0}$, $x''=\frac{0}{0}$, ce qui tient à ce que les facteurs communs aux deux termes des valeurs (A) des racines s'annulent quand on suppose $a=0$, $b=0$.

Enfin, si l'on supposait nuls les trois coefficients a, b, c, il est clair que l'équation serait satisfaite, quelque valeur que l'on donnât à x. Et alors, les formules (B), ainsi que les formules (A), donnent les racines sous la forme $x'=\frac{0}{0}$, $x''=\frac{0}{0}$, qui marque, dans ce cas, l'indétermination des valeurs des racines.

Équations réductibles au second degré.

196. On donne le nom d'*équation bi-carrée* à une équation du 4e degré qui ne renferme que des puissances paires de l'inconnue x. *La résolution d'une équation bi-carrée peut se ramener à la résolution d'une équation du second degré.* En effet, toute équation bi-carrée peut d'abord être ramenée à la forme

$$x^4+px^2+q=0 \qquad (1);$$

et si l'on prend pour inconnue auxiliaire la quantité y, qui est égale au carré de l'inconnue x, on aura $y=x^2$, $y^2=x^4$; $x=\pm\sqrt{y}$.

Toute racine de l'équation (1) devra satisfaire à l'équation

$$y^2+py+q=0 \qquad (2),$$

et chaque racine de l'équation (2) servira à déterminer deux racines de l'équation (1).

Or, les racines de l'équation (2) sont

$$y=-\frac{2}{p}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};$$

Par conséquent, les racines de l'équation (1) sont

$$x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

Ces racines sont, deux à deux, numériquement égales et de signes contraires.

Si les deux racines de l'équation (2) sont réelles et positives, *les quatre valeurs de* x *sont* RÉELLES; si une seule racine de l'équation (2) est positive, elle donne, pour x, *deux valeurs réelles;* les deux autres valeurs de x sont imaginaires.

Enfin, si aucune des deux racines de l'équation (2) n'est réelle et positive, *les quatre valeurs de* x *sont* IMAGINAIRES.

Les racines de l'équation bi-carrée $x^4+px^2+q=0$ se réduisent à la forme $x=\pm\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, dans laquelle les quantités a, b, sont connues.

Réduction de l'expression $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ *à la forme* $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

197. Si l'on considère une équation bi-carrée, $x^4+px^2+q=0$, dans laquelle les coefficients p, q, soient *rationnels*, les quantités $-\frac{p}{2}=a$, $\frac{p^2}{4}-q=b$ sont rationnelles, mais $\sqrt{b}$ est généralement une quantité irrationnelle. Ainsi, pour obtenir les racines de cette équation, lorsqu'elles sont réelles, on est conduit à *extraire la racine carrée d'une quantité* $a+\sqrt{b}$, *en partie commensurable, et en partie incommensurable.*

Il s'agit de *déterminer dans quels cas la valeur de cette racine*, $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, *peut être exprimée par la somme* $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ *de deux radicaux du second degré, dans lesquels les quantités* α, β *soient rationnelles.*

Or, en supposant que des quantités rationnelles α, β, satisfassent à l'égalité $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, on en conclut

$$a+\sqrt{b}=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta},\ \text{et}\ \sqrt{b}-2\sqrt{\alpha\beta}=\alpha+\beta-a.$$

Le second membre, formé de termes rationnels par hypothèse, ne pourra pas être une quantité irrationnelle; il faudra donc que la différence $\sqrt{b}-2\sqrt{\alpha\beta}$ soit une quantité rationnelle, ce qui est impossible, à moins que cette différence ne soit nulle (*).

Par conséquent, il faudra qu'on ait à la fois $\alpha+\beta=a$, et $2\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{b}$, d'où $4\alpha\beta=b$, $\alpha\beta=\frac{b}{4}$. Donc α, β, seront deux quantités dont la somme a, et le produit $\frac{b}{4}$, sont connus. Ainsi, α, β, seront les racines de l'équation du second degré

$$x^2-ax+\frac{b}{4}=0 \qquad (\text{n}^\circ\ 187).$$

(*) C'est ce qu'on a démontré au n° 173. Si la quantité $\sqrt{b}-2\sqrt{\alpha\beta}=n$ est rationnelle et différente de *zéro*, on a $\sqrt{b}-n=2\sqrt{\alpha\beta}$, d'où $b+n^2-2n\sqrt{b}=4\alpha\beta$, et $\sqrt{b}=\frac{b+n^2-4\alpha\beta}{2n}$; par conséquent, les quantités b, n, α, β, étant rationnelles, la valeur $\sqrt{b}$ serait rationnelle, contrairement à l'hypothèse.

On aura $\alpha=\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$, $\beta=\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$;

et, pour que α, β, soient rationnelles, comme on le suppose, *il faudra que la quantité* a^2-b *soit un carré.*

Si cette condition nécessaire est remplie, elle est d'ailleurs suffisante. Car si l'on a $a^2-b=c^2$, la quantité c étant rationnelle, et qu'on pose $\dfrac{a+c}{2}=\alpha$, $\dfrac{a-c}{2}=\beta$, on en conclut $\alpha+\beta=a$; $\alpha\beta=\dfrac{a^2-c^2}{4}=\dfrac{b}{4}$, $\sqrt{\alpha\beta}=\dfrac{\sqrt{b}}{2}$, et par suite

$$\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=a+\sqrt{b};$$

donc la quantité $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, ou $\sqrt{\dfrac{a+c}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$, est la racine carrée de la quantité $a+\sqrt{b}$.

On démontrera de même que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse réduire l'expression* $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ *à la forme* $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$, *les quantités* α, β, *devant être rationnelles, consiste en ce que la quantité* a^2-b, *soit le carré d'une quantité rationnelle* c.

Lorsque cette condition est remplie, on a

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

Soit, par exemple, la quantité $z=\sqrt{3+\sqrt{5}}$. On a $a=3$, $b=5$, $a^2-b=c^2=4$, $c=2$; d'où $z=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{10}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$; et, en effet, $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{6}{2}+2\sqrt{\frac{5}{4}}=3+\sqrt{5}$. On aura de même $z'=\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{10}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Équations à plusieurs inconnues.

198. Toute équation du second degré à deux inconnues peut être ramenée à la forme

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

dans laquelle les lettres a, b, c, d, e, f, représentent des nombres connus.

Cette équation revient à $ay^2 + (bx + d)y + (cx^2 + ex + f) = 0$; et si l'on pose $\frac{b}{a}x + \frac{d}{a} = \text{P}$, $\frac{c}{a}x^2 + \frac{e}{a}x + \frac{f}{a} = \text{Q}$, l'équation générale du second degré à deux inconnues prendra la forme

$$y^2 + \text{P}y + \text{Q} = 0,$$

dans laquelle P et Q désignent des quantités indépendantes de y. La quantité P est du premier degré par rapport à x; la quantité Q est du second degré par rapport à x.

199. Lorsqu'il s'agit de résoudre le système des équations à deux inconnues

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0 \qquad (1)$$
$$a'y + b'x + c' = 0, \qquad (2)$$

dont l'une est du second degré, et l'autre du premier degré, on peut éliminer entre ces équations une inconnue y, par exemple. A cet effet, on tire de l'équation (2) la valeur de y exprimée en fonction de x. On a

$$y = \frac{-c' - b'x}{a'}, \qquad (3)$$

et si l'on remplace l'inconnue y par cette valeur dans l'équation (1), il en résulte une équation qui ne renferme plus que l'inconnue x, et qui est du second degré. On résoudra cette équation, que nous représentons par

$$\text{A}x^2 + \text{B}x + \text{C} = 0. \qquad (4)$$

Après avoir obtenu les racines $x = \alpha$, $x = \alpha'$, de l'équation (4), on remplacera x par α dans l'équation (3), ce qui déterminera une valeur $y = \beta$, telle que le système $x = \alpha$, $y = \beta$, satisfera aux équations (1) et (2).

On remplacera enfin x par α' dans l'équation (3), ce qui déterminera une valeur $y = \beta'$, telle que le système $x = \alpha'$, $y = \beta'$ satisfera aux équations (1) et (2).

On connaîtra alors les deux solutions que le système proposé peut admettre.

Ainsi, *l'on sait résoudre le système de deux équations à deux inconnues, l'une du premier degré, l'autre du second.*

200. *Lorsqu'il s'agit de résoudre le système de deux équations du second degré à deux inconnues, l'élimination d'une inconnue entre ces deux équations conduit,* GÉNÉRALEMENT, *à une équation*

du quatrième degré, à une inconnue, qui n'est pas réductible au second degré; mais *l'équation à une inconnue, résultant de l'élimination, ne peut jamais être d'un degré supérieur au quatrième.*

En effet, soient les deux équations générales du second degré à deux inconnues

$$y^2+Py+Q=0 \quad (1), \qquad y^2+P'y+Q'=0 \quad (2);$$

on en déduit l'équation $\quad (P-P')y+Q-Q'=0 \quad (3);$
et l'on peut substituer au système des équations (1) et (2), le système des équations (2) et (3).

L'équation (3) donne $y=\frac{Q'-Q}{P-P'}$ (4), d'où $y^2=\frac{(Q'-Q)^2}{(P-P')^2}$.

Si l'on remplace y par sa valeur dans l'équation (2), cette équation devient

$$\frac{(Q'-Q)^2}{(P-P')^2}+\frac{P'(Q'-Q)}{P-P'}+Q'=0,$$

d'où $\quad (Q'-Q)^2+P'(Q'-Q)(P-P')+Q'(P-P')^2=0;$

ou bien $\quad Q^2+Q'^2-2QQ'+P^2Q'+P'^2Q-PP'Q-PP'Q'=0 \quad (5)$

L'équation (5) ne renferme qu'une seule inconnue, x; elle est généralement du quatrième degré, puisque chacun de ses termes, Q^2, etc., est le produit de deux facteurs polynômes du second degré, ou de deux facteurs du premier degré par un facteur du second degré; elle ne peut être d'un degré supérieur, puisqu'aucun de ses termes n'est d'un degré supérieur au quatrième. Lorsque les multiplications des facteurs P, Q, P', Q', sont effectuées, elle contient *généralement* des termes dans lesquels x entre à la première ou à la troisième puissance, de sorte qu'elle n'est pas bi-carrée, et n'est pas réductible au second degré (*).

Problèmes du second degré.

201. On appelle *problèmes du second degré* les problèmes qui,

---

(*) Il est facile de s'assurer que l'équation (5) est bi-carrée, lorsque les équations proposées (1) et (2) ne renferment pas de termes, tels que dy, ex, qui ne sont que du premier degré. Dans ce cas, on sait résoudre l'équation (5). Après avoir obtenu les quatre racines de l'équation bi-carrée, on remplace x par chacune de ces racines dans l'équation (4), ce qui détermine chacune des quatre valeurs correspondantes de y. On connaît alors les quatre solutions que le système proposé peut admettre.

étant mis en équations (nº 133), conduisent à une ou plusieurs équations du second degré, sans qu'aucune des équations soit d'un degré supérieur au second.

Il résulte des observations qu'on a déjà faites (nº 134), 1º que *les valeurs* RÉELLES *des inconnues qu'on pourra obtenir en résolvant les équations d'un problème du second degré, ne satisferont pas toujours aux conditions du problème proposé.* Car l'énoncé de la question peut exiger implicitement que les valeurs des inconnues soient positives, ou entières, ou comprises entre certaines limites; si donc les valeurs *réelles* obtenues sont, ou négatives, ou fractionnaires, ou en dehors de ces limites, elles satisferont aux équations sans pouvoir résoudre la question elle-même;

2º Que *l'on pourra être conduit à des valeurs imaginaires des inconnues, sans que le problème soit impossible;* car il peut arriver qu'en partant d'une supposition qu'on n'aurait pas dû faire, on ait formé, pour un problème qui n'est pas impossible, des équations qui ne soient satisfaites que par des valeurs imaginaires; tandis qu'en rectifiant l'hypothèse qu'on avait faite on parviendrait à des valeurs réelles (*).

(*) En voici un exemple. *Les points* A, B *étant distants d'un mètre, on propose de trouver, sur la droite indéfinie* AB, *un point* C *dont la distance au point* A, *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* B, *et la distance donnée* AB$=1$ *mètre.*

Soit CA$=x$, d'où CB$=x-1$. Il faut qu'on ait $1:x::x:x-1$, ou $x^2=x-1$; par suite, $x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1}$; *les valeurs de* x *sont imaginaires.* Cependant le problème n'est pas impossible; car si, au lieu de supposer le point C situé sur le prolongement de AB, on le suppose placé sur le prolongement de BA, on aura CB$=$CA$+$AB $=x+1$; la proportion sera $1:x::x:x+1$, d'où $x^2=x+1$; par suite, $x=+\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}$; *les valeurs de* x *sont réelles;* l'une d'elles, $x'=\frac{+1+\sqrt{5}}{2}$, est positive et détermine un point qui résout la question. Si l'on suppose le point C placé entre A et B, on aura CB$=$AB$-$CA$=1-x$; la proportion sera $1:x::x:1-x$, d'où $x^2=1-x$; par suite, $x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}$; *les valeurs de* x *sont encore réelles*; l'une d'elles, $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ est positive et détermine un point qui résout la question.

202. 1er PROBLÈME. *Un négociant a placé 50000 fr. dans un commerce où il perd. Il voulait se retirer dès la première année ; mais en ayant manqué l'occasion, et ne l'ayant pu retrouver qu'à la fin de la deuxième année, il trouve que son capital est diminué de 8000 fr. de ce qu'il était à la fin de la première année.*

On demande à combien pour cent montait sa perte par an?

Désignons par A la valeur à laquelle le capital était réduit à la fin de la première année, par B la valeur du capital à la fin de la deuxième année, et par x la perte que 1 fr. de capital éprouve chaque année; de sorte qu'au bout d'un an chaque franc de capital est réduit à 1 fr.$-x$.

A l'expiration de la première année le capital 50000 fr. était donc réduit à $(1-x)\times 50000=A$; il en résulte que le capital, qui avait encore la valeur A au commencement de la deuxième année, a été de nouveau réduit, à la fin de la deuxième année, à la valeur

$$B=(1-x).A=(1-x)^2\times 50000.$$

Or, la différence des valeurs A, B, est de 8000 fr. On a donc l'équation

$$(1-x)\times 50000-(1-x)^2\times 50000=8000. \qquad (1)$$

Divisant par 50000 les deux membres de cette équation, et remarquant que $(1-x)$ est facteur du premier membre, on a

$$(1-x).(1-1+x)=\frac{4}{25}, \text{ d'où } \quad x^2-x+\frac{4}{25}=0 \qquad (2)$$

équation dont les racines sont $x'=0,8$ et $x''=0,2$.

Si l'on admet que la valeur $x'=0,80$ exprime la perte que 1 fr. éprouve par an, la perte annuelle pour chaque centaine de francs est de 80 fr., c'est-à-dire que *la perte est de* 80 *p.* 100. Et, en effet, à raison de 80 p. 100 par an, la perte sur 50000 fr., à la fin de la première année, est de 40000 fr.; de sorte que le capital est réduit à la valeur A=10000 fr. au commencement de la deuxième année; ensuite, à raison de 80 p. 100, la perte faite sur ces 10000 fr., à la fin de la deuxième année, est de 8,000 fr., conformément aux conditions de l'énoncé.

Si l'on admet que la valeur $x''=0,20$ exprime la perte que 1 fr. éprouve par an, la perte annuelle pour chaque centaine de francs est de 20 fr., c'est-à-dire que *la perte est de* 20 *p.* 100. Et en effet, à raison de 20 p. 100 par an, la perte sur 50,000 fr., à la fin de la première année, est de 10000 fr.; de sorte que le capital est réduit à la valeur $A=40000$ fr.; ensuite, à raison de 20 p. 100, la perte faite sur ces 40,000 fr., à la fin de la deuxième année, est de 8,000 fr., conformément aux conditions de l'énoncé.

On voit donc que *le problème admet deux solutions différentes*, qui sont données par les deux racines positives de l'équation du second degré.

203. 2e Problème. *Trouver un nombre tel qu'en ajoutant* 25 *unités à son carré, l'on ait la même somme qu'en ajoutant* 9 *unités à son décuple.*

Soit x le nombre cherché; il faut qu'on ait $x^2+25=10x+9$, ou $x^2-10x+25=9$, ou $(x-5)^2=9$. De là $x-5=\pm\sqrt{9}=\pm3$. Donc $x'=5+3=8$, $x''=5-3=2$.

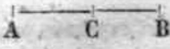
Les deux nombres 8, 2, satisfont l'un et l'autre au problème, et ils sont les seuls qui remplissent les conditions de l'énoncé (*).

204. 3e Problème. *Les points* A *et* B *étant deux points lumineux placés à une distance de* 1 *hectomètre, on propose de trouver sur la droite indéfinie* AB *un point* C *également éclairé par les deux lumières, sachant que l'intensité de la lumière* A *est* 9 *fois plus grande que l'intensité de la lumière* B.

Pour résoudre le problème on s'appuie sur ce principe de physique : que *l'effet d'une lumière est* 4 *fois plus grand lorsqu'elle est* 2 *fois plus proche,* 9 *fois plus grand lorsqu'elle est* 3 *fois plus proche*, et, en général, que *son effet est en raison inverse du carré de la distance* (Alg. de *Clairaut*).

Prenons pour mesure des intensités des lumières l'intensité de la lumière B à 1 mètre de distance du point B. Les intensités de la lumière B, à 2, 3, ..., n mètres du point B, seront exprimées par les nombres $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, ..., $\frac{1}{n^2}$. L'intensité de la lumière A, à 1 mètre de distance du point A, sera exprimée par 9, en vertu des conditions de l'énoncé. Les intensités de la lumière A, à 2, 3, ..., mètres de distance du point A, seront exprimées par les nombres $\frac{9}{4}$, $\frac{9}{9}$, etc.

(*) Les deux problèmes qu'on vient de résoudre montrent *l'utilité de l'introduction des expressions négatives dans les calculs, pour la résolution complète des problèmes.* Si l'on admettait seulement une détermination arithmétique pour la valeur du radical $\sqrt{9}$, ce serait le nombre 3. On obtiendrait seulement $x-5=3$, d'où $x=8$; l'on ne découvrirait pas la valeur positive $x=2$, qui provient de la détermination algébrique $x-5=-3$, et qui résout directement le problème.



Cela posé, admettons d'abord que le point C se trouve entre A et B. Désignons par x le nombre de mètres contenu dans la distance AC. La distance BC sera exprimée par $100-x$. L'intensité de la lumière A, à la distance AC, est exprimée par $\frac{9}{x^2}$; l'intensité de la lumière B, à la distance BC, est exprimée par $\frac{1}{(100-x)^2}$.

Donc, puisqu'on veut *que le point C soit également éclairé* par les deux lumières, il faut qu'on ait

$$\frac{9}{x^2}=\frac{1}{(100-x)^2}, \text{ d'où } \frac{x^2}{(100-x)^2}=9. \qquad (1)$$

Prenant la racine carrée des deux membres de l'équation (1), on obtient $\frac{x}{100-x}=\pm 3$; c'est-à-dire que l'on a à résoudre les deux équations du premier degré

$$\frac{x}{100-x}=+3, \quad \frac{x}{100-x}=-3. \qquad (2)$$

La première a pour racine $x'=75$; la seconde a pour racine $x''=150$.

On voit par là qu'il existe entre A et B, comme on l'avait supposé, un point C également éclairé par les deux lumières. Sa distance au point A est de 75 mètres; mais en outre il existe un second point C', également éclairé, qui se trouve à 150 mètres du point A sur le prolongement de la droite AB; de sorte que *le problème admet deux solutions.*

Il est facile de vérifier que chacun de ces deux points est également éclairé par les deux lumières. Pour le point C, l'intensité de la lumière A est exprimée par $\frac{9}{75^2}=\frac{1}{25^2}$; et l'intensité de la lumière B est aussi exprimée par $\frac{1}{25^2}$, puisque le point C est à 25 mètres du point B.

Pour le point C', l'intensité de la lumière A est exprimée par

$\frac{9}{150^2}=\frac{1}{50^2}$; et l'intensité de la lumière B est aussi exprimée par $\frac{1}{50^2}$, puisque le point C est à 50 mètres du point B.

205. Si l'on prenait pour inconnue la distance $BC=y$, d'où $AC=100-y$, on formerait l'équation

$$\frac{(100-y)^2}{y^2}=9,\quad \text{d'où}\quad \frac{100-y}{y}=\pm 3.$$

On résoudrait les deux équations du premier degré $\frac{100-y}{y}=+3$, $\frac{100-y}{y}=-3$.

La première a pour racine $y'=25$; la seconde a pour racine $y''=-50$.

La racine positive $y'=25$ fait connaître qu'il existe entre A et B, à 25 mètres du point B, un point C également éclairé par les deux lumières.

Quant à la racine négative, $y''=-50$, on peut en déduire encore une solution du problème, en appliquant ici la convention déjà motivée au n° 144; ainsi, *parce que la distance cherchée* y'' *se présente sous la forme d'une expression négative, on portera la valeur absolue de cette distance*, ou 50 mètres à partir du point B, *dans un sens contraire à celui qu'elle aurait dû prendre si elle avait été positive;* on obtiendra sur le prolongement de AB un point C' qui satisfait à la question.

206. Résolvons le même problème d'une manière générale. *Connaissant le rapport des intensités de deux lumières placées aux points* A, B, *dont la distance est donnée, trouver le point de la droite indéfinie* AB, *où les deux lumières éclairent également.*

Soient $q=m^2$ le rapport donné; $AB=a$ la distance donnée; $AC=x$ la distance du point A au point cherché C, que nous supposons d'abord placé entre A et B; d'où $BC=a-x$.

Si l'on prend pour unité l'intensité de la lumière B à l'unité de distance, il faudra que l'intensité $\frac{m^2}{x^2}$ de la lumière A au point C soit égale à l'intensité $\frac{1}{(a-x)^2}$ de la lumière B au point C. De là l'équation

$$\frac{m^2}{x^2}=\frac{1}{(a-x)^2},\quad \text{ou}\quad \frac{x^2}{(a-x)^2}=m^2. \qquad \text{(A) (*)}$$

(*) On voit que le problème est ramené à cette question : *Partager un*

Si, pour résoudre l'équation (A), l'on prend la racine carrée des deux membres, on a $\frac{x}{a-x}=\pm m$; de sorte que les racines de l'équation (A) sont les racines des deux équations du premier degré

$$x=am-mx;\quad x=-am+mx. \tag{B}$$

Ces racines sont $x'=\frac{am}{m+1},\quad x''=\frac{am}{m-1}$. (C)

Si, pour résoudre l'équation (A), l'on chasse le dénominateur $(a-x)^2$, et qu'on développe le carré de $a-x$, on a l'équation

$$x^2=a^2m^2+m^2x^2-2am^2x,\text{ ou } x^2-\frac{2am^2}{m^2-1}x+\frac{a^2m^2}{m^2-1}=0, \tag{D}$$

dont les racines sont $x=\frac{am(m+1)}{m^2-1},\quad x=\frac{am(m-1)}{m^2-1}$. (E)

Ces deux expressions ne sont pas les mêmes que celles des valeurs (C); mais il est facile de reconnaître qu'elles s'y ramènent par la suppression d'un facteur commun aux deux termes de chacune des fractions (E) : ce facteur commun est $m+1$ pour la première, et $m-1$ pour la seconde. Ainsi, les valeurs des racines de l'équation du second degré (D) sont les mêmes que les valeurs des racines des deux équations du premier degré (B).

207. Discussion. 1° Lorsque la lumière placée en A est d'une plus grande intensité que l'autre, le rapport donné, $q=m^2$, est plus grand que l'unité; l'on a $m>1$. Les valeurs $x'=\frac{am}{m+1}$, $x''=\frac{am}{m-1}$ sont positives. On a $\frac{m}{m+1}<1$, d'où $x'<a$; et $\frac{m}{m-1}>1$, d'où $x''>a$. De plus, on a $2m>m+1$, $\frac{m}{m+1}>\frac{1}{2}$, d'où $x'>\frac{1}{2}a$.

On obtient deux points, C, C', qui résolvent la question, comme au n° 204. On a $CC'=x''-x'=\frac{2m}{m^2-1}a$. — Remarquez de plus que, si le rapport $q=m^2$ diminue et diffère de moins en moins de l'unité, la fraction $\frac{m}{m+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{m}}$ diminue et diffère de moins en moins de $\frac{1}{2}$; de sorte que

---

nombre donné a, *en deux parties* a−x *et* x, *dont les carrés soient entre eux dans un rapport donné* q.

la valeur de x' tend vers la limite $\frac{a}{2}$, à mesure que le rapport q décroissant, tend vers sa limite 1. En même temps, la fraction $\frac{m}{m-1}$ augmente indéfiniment, de sorte que la valeur de x'' peut devenir plus grande que toute quantité assignable.

2° Lorsque les deux lumières sont d'égale intensité, l'on a $q=m^2=1$; et, par suite, $x'=\frac{a}{2}$. Le point C situé au milieu de AB, résout la question.

La valeur $x''=\frac{a}{0}$ devient infinie; de sorte que le point C est alors le seul qui résolve la question.

Si l'on fait la même hypothèse, $m=1$, dans les expressions (E), la première devient $x=\frac{2a}{0}=\infty$, comme la valeur x'' à laquelle elle est égale. Mais la formule $x=\frac{am(m-1)}{m^2-1}$ donne $x=\frac{0}{0}$; cela tient à la présence du facteur commun $m-1$, qui s'annule par l'hypothèse $m=1$. En supprimant d'abord ce facteur, et faisant $m=1$ dans la fraction simplifiée, on retrouve $x=\frac{a}{2}$.

3° Lorsque la lumière placée en A est d'une moindre intensité que l'autre, on a $q<1$, $m<1$. Les valeurs $x'=\frac{am}{m+1}$, $x''=\frac{am}{m-1}$ sont de signes contraires. La première est positive, et l'on a $\frac{m}{m+1}<\frac{1}{2}$, d'où $x'<\frac{a}{2}$. On obtient, entre A et B, un point C plus rapproché de la lumière la plus faible, comme au n° 205.

La seconde valeur $x''=-\left(\frac{am}{1-m}\right)$ est négative. On l'interprétera comme il a été expliqué au n° 205, et l'on obtiendra, sur le prolongement de BA, un second point C' qui résout la question, et dont la distance au point A est exprimée par $\frac{am}{1-m}$.

On a $$CC'=\frac{am}{1-m}+\frac{am}{1+m}=\frac{2m}{1-m^2}a.$$

208. Quatrième Problème. *Diviser un nombre donné*, a, *en deux parties telles que leur produit soit un* MAXIMUM (*).

Soient x, y, les parties du nombre a. *Il s'agit de déterminer* x *et* y *de manière que le produit* xy *diminue nécessairement lorsqu'on changera la valeur de* x, *ou celle de* y, *soit en la diminuant, soit en l'augmentant.*

Supposons que x désigne la plus grande des deux parties du nombre a, et prenons pour inconnue auxiliaire l'excès z de la partie x sur la quantité $\frac{a}{2}$. On aura $x=\frac{a}{2}+z$, et par suite, $y=\frac{a}{2}-z$. Le produit xy, dans tous ses états de grandeur, est donc exprimé par

$$xy=\left(\frac{a}{2}+z\right)\times\left(\frac{a}{2}-z\right)=\frac{a^2}{4}-z^2.$$

Si l'on suppose $z=0$, on a $\frac{a}{2}=x=y$ et $xy=\frac{a^2}{4}$. Si, au contraire, on suppose z différent de *zéro*, la quantité z^2 sera toujours positive, et le produit $xy=\frac{a^2}{4}-z^2$ sera moindre que $\frac{a^2}{4}$. Donc *le* MAXIMUM *du produit a lieu lorsque les parties*, x, y, *sont égales* (**).

Mais nous allons résoudre le même problème par une méthode qui fera comprendre l'*usage de l'équation du second degré dans les questions relatives aux* MAXIMUMS.

L'une des parties du nombre a étant désignée par x, l'autre partie est désignée par $a-x$. Soit p le produit des deux parties. On aura

$$x(a-x)=p,\quad \text{ou}\quad x^2-ax+p=0; \qquad \text{(A)}$$

et par suite,
$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-p}.$$

Pour que ces valeurs de x conviennent à la question, il faut qu'elles soient réelles ; il faut donc que la quantité p ne surpasse pas $\frac{a^2}{4}$. Ainsi la plus grande valeur qu'on puisse admettre pour le produit est $p=\frac{a^2}{4}$.

(*) Voici une question de géométrie qui conduit au problème proposé : *Déterminer entre tous les rectangles de même périmètre, celui dont l'aire est un maximum.*

(**) On voit de plus que *le produit des deux parties* x, y, *est d'autant plus grand que la différence* 2z *de ces deux parties est plus petite.*

Il en résulte que les deux valeurs de x sont égales à $\frac{a}{2}$; et par suite, la valeur de $a-x$ est aussi égale à $\frac{a}{2}$. Ainsi, *lorsque le produit est le plus grand possible, les parties* x, a — x, *sont égales à la moitié du nombre donné.*

Remarquez que, si la partie désignée par x, et qui doit toujours être l'une des racines de l'équation (A), devenait plus grande ou moindre que $\frac{a}{2}$, le radical $\sqrt{\frac{a^2}{4}-p}$ ne serait pas nul; la valeur correspondante du produit p serait moindre que $\frac{a^2}{4}$. Donc la valeur $p=\frac{a^2}{4}$ correspondante à l'hypothèse $x=\frac{a}{2}$, diminue nécessairement lorsqu'on change la valeur $x=\frac{a}{2}$, soit en la diminuant, soit en l'augmentant.

209. Cinquième Problème. *Connaissant le produit de deux nombres, déterminer le* minimum *de leur somme* (*).

Soit a^2 le produit donné des nombres inconnus x, y, dont la somme inconnue est s. On a $xy=a^2$, $x+y=s$. Donc les nombres x, y, sont les racines de l'équation

$$z^2-sz+a^2=0.$$

Or, on sait que $z=\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-a^2}$. Donc, pour que les valeurs de x, y soient réelles et conviennent à la question, il faut que $\frac{s^2}{4}$ ne soit pas moindre que le nombre donné a^2. Par conséquent, la plus petite valeur qu'on puisse admettre pour la quantité $\frac{s^2}{4}$ est a^2, d'où $\frac{s}{2}=a$, $s=2a$.

Lorsque ce *minimum* a lieu, les valeurs de x, y sont égales au nombre a, ou à la racine carrée du nombre donné a^2.

Calcul des expressions imaginaires.

210. On entend par le *résultat d'une opération dans laquelle*

(*) *Déterminer, entre tous les rectangles de même surface, celui dont le périmètre est un minimum.*

entrent des expressions imaginaires, le résultat auquel on parvient en appliquant les mêmes règles que si toutes les quantités proposées étaient réelles.

Soit, par exemple, l'expression imaginaire $\sqrt{-4}$; on a $-4=4\times(-1)$. Si l'on applique à cette égalité le principe établi n° 174, il viendra

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{-4}=2\sqrt{-1}.$$

On aura de même $\sqrt{-a^2}=a\sqrt{-1}$. En conséquence, *on convient de considérer les expressions* $\pm\sqrt{-a^2}$ *et* $\pm a\sqrt{-1}$, *comme équivalentes.*

Soit encore l'équation complète $x^2+px+q=0$, dans laquelle nous supposons $q>\frac{p^2}{4}$, et $q=\frac{p^2}{4}+n^2$. Les racines sont imaginaires. On a

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{-n^2};$$

$$\text{d'où} \quad x'=-\frac{p}{2}+n\sqrt{-1}; \quad x''=-\frac{p}{2}-n\sqrt{-1}.$$

Le premier membre

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}+n^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+n^2$$

peut être mis sous la forme

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-(-n^2)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{-n^2}\right)^2;$$

et si l'on convient d'appliquer à cette différence le principe établi n° 20, le premier membre prendra la forme

$$\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{-n^2}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{-n^2}\right)$$

$$\text{ou} \quad \left(x+\frac{p}{2}+n\sqrt{-1}\right).\left(x+\frac{p}{2}-n\sqrt{-1}\right);$$

il sera décomposé en un produit de deux facteurs imaginaires du premier degré par rapport à x.

211. On ne considère pas en algèbre élémentaire d'autres expressions imaginaires que celles qu'il est possible de ramener à la forme $a+b\sqrt{-1}$, les quantités a, b, étant réelles. Lorsque le coefficient

b est nul, la valeur de l'expression $b\sqrt{-1}$, qui devient $0\times\sqrt{-1}$, est considérée comme nulle; ainsi, la quantité $a+b\sqrt{-1}$ est égale à a, lorsqu'on suppose $b=0$; par où l'on voit que *les quantités réelles se trouvent comprises comme cas particulier dans les expressions imaginaires de la forme* $a+b\sqrt{-1}$.

Si l'on pose l'égalité $a+b\sqrt{-1}=a'+b'\sqrt{-1}$, on en déduit, en appliquant la règle de la transposition des termes, $a-a'=(b'-b).\sqrt{-1}$, égalité impossible, à moins qu'on ne suppose à la fois $a-a'=0$, $b'-b=0$. Ainsi, l'on convient d'entendre par *expressions imaginaires* ÉGALES, celles dans lesquelles les parties réelles a, a', sont égales, les coefficients b, b' de $\sqrt{-1}$ étant en outre égaux.

Il en résulte que l'équation unique $a+b\sqrt{-1}=a'+b'\sqrt{-1}$ équivaut au système des deux équations $a=a'$, $b=b'$.

On appelle *expressions imaginaires* CONJUGUÉES, deux expressions imaginaires qui ne diffèrent que par le signe du coefficient de $\sqrt{-1}$. Telles sont les expressions $4+3\sqrt{-1}$ et $4-3\sqrt{-1}$.

On appelle MODULE *d'une expression imaginaire* $a+b\sqrt{-1}$, la valeur numérique de la racine carrée de la quantité a^2+b^2, c'est-à-dire de la somme des carrés des deux coefficients. Deux expressions imaginaires conjuguées ont donc même module (*).

Pour que le module $\sqrt{a^2+b^2}$ de l'expression $a+b\sqrt{-1}$ soit nul, il faut qu'on ait $a=0$ et $b=0$; il faut donc que l'expression imaginaire se réduise à *zéro*. Réciproquement, si l'expression imaginaire $a+b\sqrt{-1}$ est nulle, c'est-à-dire si l'on a $a=0$ et $b=0$, il est évident que le module est nul.

212. *La somme, la différence, le produit et le quotient d'expressions de la forme* $a+b\sqrt{-1}$, sont des expressions de même forme, $A+B\sqrt{-1}$.

(*) Deux expressions imaginaires différentes et non conjuguées peuvent avoir même module; ainsi les expressions $7+9\sqrt{-1}$, $11-3\sqrt{-1}$, ont l'une et l'autre pour module la quantité $\sqrt{130}=\sqrt{49+81}=\sqrt{121+9}$.

On a

$$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}=A+B\sqrt{-1};$$

$$(a+b\sqrt{-1})-(c+d\sqrt{-1})=(a-c)+(b-d)\sqrt{-1}=A+B\sqrt{-1};$$

$$(a+b\sqrt{-1})\times(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}=A+B\sqrt{-1};$$

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}=\frac{ac+bd+(bc-ad)\sqrt{-1}}{c^2+d^2}$$
$$=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)\sqrt{-1}=A+B\sqrt{-1}.$$

213. *Le module du* PRODUIT *est égal au produit des modules des facteurs; le module du* QUOTIENT *est égal au quotient du module du dividende, divisé par le module du diviseur.*

Pour le *produit* $A+B\sqrt{-1}=(a+b\sqrt{-1})\times(c+d\sqrt{-1})$,

l'on a $\qquad A=ac-bd, \quad B=ad+bc;$

d'où $\quad A^2+B^2=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$

Donc $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}$; le module d'un produit de *deux* facteurs est donc égal au produit des modules de ces facteurs, et l'on en déduit ensuite que le principe est vrai pour un produit d'autant de facteurs qu'on voudra.

Pour le *quotient* $\quad A+B\sqrt{-1}=\dfrac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}$, $\quad$ l'on a

$$A=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\quad B=\frac{bc-ad}{c^2+d^2};\quad \text{d'où } A^2+B^2=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}.$$

Donc
$$\sqrt{A^2+B^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}.$$

214. *Si l'on forme les puissances successives de la quantité imaginaire* $\sqrt{-1}$, *l'on obtient quatre résultats différents, qui se reproduisent dans le même ordre indéfiniment.*

On a d'abord

$$(\sqrt{-1})^0=1,\qquad (\sqrt{-1})^1=+\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^2=-1,\qquad (\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1};$$

d'ailleurs on a $(\sqrt{-1})^4=1$, d'où $(\sqrt{-1})^8=1$, $(\sqrt{-1})^{8+4}=1$, et en général $(\sqrt{-1})^{4n}=1$, en désignant par n un nombre entier positif quelconque.

On aura, par suite,

$$(\sqrt{-1})^{4n+1}=(\sqrt{-1})^{4n}\times\sqrt{-1}=+\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2}=(\sqrt{-1})^{4n}\times(\sqrt{-1})^2=-1,$$
et $$(\sqrt{-1})^{4n+3}=(\sqrt{-1})^{4n}\times(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}.$$

Les puissances de $\sqrt{-1}$, à partir de la puissance *zéro*, sont donc périodiquement égales aux quantités $+1$, $+\sqrt{-1}$, -1 et $-\sqrt{-1}$.

Problèmes du second degré à résoudre.

215. I. *Quelqu'un a acheté plusieurs mètres de drap pour* 180 *francs. S'il avait reçu pour la même somme* 3 *mètres de plus, il aurait payé le mètre* 3 *francs de moins. Combien a-t-il acheté de mètres?* Rép. 12^{m}.

II. *Deux courriers, dont l'un va de Paris à Lyon, et l'autre de Lyon à Paris, sont partis de ces deux villes au même moment, et se sont rencontrés. Au moment de la rencontre, le courrier de Paris avait parcouru* 5 *myriamètres de plus que l'autre. Ils ont continué leur route; le courrier de Paris est arrivé à Lyon* 16 *heures après l'instant de la rencontre; mais le courrier de Lyon ne parviendra à Paris que* 9 *heures après l'arrivée à Lyon du courrier de Paris.*

On demande la distance de Paris à Lyon, et les vitesses des deux courriers. R. Dist. 45 myr.; vitesses 1myr.$\frac{1}{4}$ et 1 myr. à l'heure.

III. *Un marchand a acheté une pièce de drap qui a* 1 *mètre de large (la longueur est inconnue); cette pièce lui a coûté* 2680 *francs.*

Un autre marchand a acheté une seconde pièce de drap contenant 4 *mètres carrés de plus que la première; il l'a payée* 4 *francs de plus par mètre carré. Cette seconde pièce coûte* 432 *francs de plus que la première.*

On demande combien les deux pièces contiennent de mètres carrés, et quel est le prix du mètre de chaque espèce.

(Ce problème admet deux solutions).

IV. *Une personne possède* 25000 *francs qu'elle partage en deux parties inégales, dont elle tire des revenus égaux.*

Si la première partie était placée au taux de la seconde, elle produirait un revenu de 400 *francs; et si la seconde partie était placée au taux de la première, elle produirait un revenu de* 900 *francs.*

Si la première partie était placée au taux de la seconde, elle produirait un revenu de 400 fr.; et si la seconde partie était placée au taux de la première, elle produirait un revenu de 900 francs.

On propose de déterminer les deux parties du capital et les deux taux.

R. 10000 fr. et 15000 fr.; à 6 0/0 et à 4 0/0.

V. *Partager le nombre 50 en deux parties telles, que la somme de leurs quatrièmes puissances soit égale à 970000.*

(*Prenez pour inconnue auxiliaire la différence des deux parties demandées.*)

R. 20 et 30.

VI. *Une équation bi-carrée, à coefficients rationnels, ayant été résolue, on a obtenu les 4 valeurs* $x=\pm\sqrt{8\pm\sqrt{28}}.$

Quels étaient les coefficients de l'équation bi-carrée?

VII. *Trouver les racines de l'équation*

$$(1+2\sqrt{-3})x^2-(5+2\sqrt{-75})x+2(3+2\sqrt{-27})=0.$$ R. 2 et 3.

VIII. *Trouver deux nombres tels, que la somme de leurs carrés soit la plus petite possible, et que le produit de ces nombres soit égal à 100.*

R. Les deux nombres sont égaux à $10=\sqrt{100}$.

IX. *Parmi les rectangles qui contiennent 100 mètres carrés, déterminer celui dont la diagonale est la plus petite possible.*

R. La base et la hauteur sont égales à $10=\sqrt{100}$.

X. *Partager le nombre 800 en deux parties telles, que la somme formée des racines carrées des ces parties, soit la plus grande possible.*

R. Les deux parties doivent être égales.

CHAPITRE CINQUIÈME.

PROPOSITIONS SUR LES NOMBRES. — PROGRESSIONS.

216. *Les puissances successives d'un nombre plus grand que l'unité croissent au delà de toute limite.*

Soit un nombre $a=1+d$, entier ou fractionnaire, plus grand que l'unité; et q une quantité donnée, aussi grande qu'on voudra. Quelque petite que soit la différence d, je dis qu'on peut déterminer une valeur du nombre entier n qui satisfasse à l'inégalité $a^n > q$.

En effet, on a $\quad a^1 - 1 = d,$

d'où
$$\begin{aligned} a^2 - a &> d, \\ a^3 - a^2 &> d, \\ a^4 - a^3 &> d, \\ &\ldots\ldots \\ a^{n-1} - a^{n-2} &> d, \\ a^n - a^{n-1} &> d. \end{aligned}$$

Si l'on ajoute les premiers membres $a^1 - 1$, $a^2 - a$, ... $a^n - a^{n-1}$, leur somme $a^n - 1$ est évidemment plus grande que la somme des n seconds membres, quel que soit le nombre entier n. Par conséquent l'on a toujours

$$a^n - 1 > nd \quad \text{et} \quad a^n > 1 + nd.$$

Donc, pour avoir $a^n > q$, il suffit qu'on ait

$$1 + nd > q, \quad \text{ou} \quad n > \frac{q-1}{d},$$

ce qui se peut toujours.

Ainsi, quelque peu différent de l'unité que soit un nombre a, plus grand que l'unité, la quantité a^n croîtra en même temps que n, et pourra surpasser toute grandeur assignable.

217. *Les puissances successives d'un nombre plus petit que l'unité s'approchent indéfiniment de zéro.*

Soit a' un nombre plus petit que l'unité, et δ une quantité donnée aussi petite qu'on voudra : je dis qu'on peut déterminer une valeur du nombre entier n, qui satisfasse à l'inégalité

$$a'^n < \delta. \qquad (1)$$

En effet, désignons par a la valeur du quotient $\frac{1}{a'}$, de sorte que $aa' = 1$. On aura $a > 1$; $a'^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$. Or, pour que l'inégalité (1) .... $\frac{1}{a^n} < \delta$ soit vérifiée, il suffit de satisfaire à l'inégalité $a^n > \frac{1}{\delta}$; ce qui se peut toujours (n° 216).

218. *On peut toujours déterminer l'*INDICE *de la racine d'un nombre plus grand ou moindre que l'unité, de manière que cette racine diffère de l'*UNITÉ *aussi peu qu'on le voudra.*

1° Considérons un nombre $q > 1$. Soit $x = \sqrt[n]{q}$, ou $x^n = q$. Il est clair que le nombre x sera plus grand que 1.

Désignons par d une quantité donnée, aussi petite qu'on voudra. Je dis qu'on peut déterminer une valeur du nombre entier n, qui satisfasse à l'inégalité $\sqrt[n]{q} - 1 < d$.

En effet, il suffit pour cela de satisfaire à l'inégalité $\sqrt[n]{q} < 1 + d$, laquelle serait vérifiée si l'on avait $(1 + d)^n > q$; ce qui se peut toujours, en prenant $n > \frac{q-1}{d}$ (n° 216).

2° Considérons un nombre $\delta < 1$. Soit $x = \sqrt[n]{\delta}$, ou $x^n = \delta$. Il est clair que le nombre x sera plus petit que 1.

Désignons par d une quantité donnée, aussi petite qu'on voudra. Je dis qu'on peut déterminer une valeur du nombre entier n, qui satisfasse à l'inégalité $1 - \sqrt[n]{\delta} < d$.

En effet, il suffit pour cela de satisfaire à l'inégalité $1 - d < \sqrt[n]{\delta}$, laquelle serait vérifiée si l'on avait $(1 - d)^n < \delta$; or, on a vu (n° 217) qu'il est toujours possible d'obtenir une valeur de n qui satisfasse à cette dernière inégalité.

Le principe est donc démontré.

Progressions arithmétiques.

219. *Valeur d'un terme d'un rang déterminé.* Soient $a, b, c, d, \ldots, h, k, l$, les termes d'une *progression arithmétique* (page 112), composée de n termes, et dont la raison est désignée par r. On aura

$$b=a+r,\quad c=b+r=a+2r,\quad d=c+r=a+3r, \ldots,$$

et
$$l=a+(n-1)\,r. \qquad \textbf{(A)} \quad (*)$$

Si la progression est croissante, le nombre r est positif. Si la progression est décroissante, les égalités précédentes subsistent, en admettant que r représente une expression *négative*.

On aurait de même

$$k=l-r,\ h=k-r=l-2r, \ldots\ a=l-(n-1)\,r.$$

Si l'on prend successivement pour inconnue chacune des quantités a, r, n, l, les trois autres étant données, on résoudra *quatre* problèmes au moyen de l'équation (A), qui sera du premier degré.

220. *Valeur de la raison ; insertion de moyens.* Qu'on propose, par exemple, de *former une progression arithmétique qui ait pour extrêmes les nombres donnés* a, l, *et qui se compose de* n *termes*; ou, ce qui signifie la même chose, qu'on demande d'*insérer entre deux nombres donnés un nombre déterminé de moyens arithmétiques*; le problème sera résolu lorsqu'on connaîtra la raison, r, de la progression demandée. Or, on obtient, par l'équation (A), la formule

$$r=\frac{l-a}{n-1};$$

et si l'on pose $n-2=m$, d'où $n-1=m+1$, cette formule devient

$$r=\frac{l-a}{m+1},$$

le nombre m désignant le nombre des moyens à insérer entre a et l. De là on conclut la règle donnée en arithmétique (page 113).

221. *Si l'on insère un même nombre,* m, *de moyens différentiels*

(*) La formule (A) se traduit par l'énoncé du *premier principe* donné en arithmétique (p. 112).

entre les termes consécutifs d'une progression arithmétique donnée

$$\div a . b . c . d \ldots . k . l,$$

dont la raison est δ, *il en résultera une seule progression continue ayant pour raison* $\frac{\delta}{m+1}$.

Car la raison de la première progression partielle dont les extrêmes sont a et b, est égale à $\frac{b-a}{m+1} = \frac{\delta}{m+1}$; la raison, pour les progressions partielles suivantes, est exprimée par

$$\frac{c-b}{m+1}, \ \frac{d-c}{m+1}, \ \ldots \ \frac{l-k}{m+1}.$$

Donc, les différences $l-k, \ldots c-b$ étant égales à δ par hypothèse, toutes les progressions partielles ont une même raison égale à $\frac{\delta}{m+1}$; et le dernier terme de chacune d'elles est en même temps le premier terme de la suivante.

222. *La somme de deux termes également distants des extrêmes est égale à la somme des extrêmes.* Soient a et l les termes extrêmes d'une progression arithmétique dont la raison est r.

Désignons par x la valeur du terme qui a p termes avant lui, et par y la valeur du terme qui a p termes après lui. Les termes x, y sont des *termes également distants des extrêmes* a, l. On a

$$x = a + pr, \quad y = l - pr; \qquad \text{d'où} \quad x + y = a + l.$$

Somme de tous les termes d'une progression arithmétique.

223. Représentant par s la somme des n termes de la progression arithmétique dont les extrêmes sont a et l, on aura

$$s = \frac{(a+l)n}{2} \tag{B}$$

En effet, on a

$$s = a + (a+r) + \ldots + (a+pr) + \ldots + (l-pr) + \ldots + (l-r) + l; \tag{1}$$

on a aussi

$$s = l + (l-r) + \ldots + (l-pr) + \ldots + (a+pr) + \ldots + (a+r) + a. \tag{2}$$

Ajoutant ces deux égalités membre à membre on obtient

$$2s=(a+l)\times n, \quad \text{d'où} \quad s=\frac{(a+l)n}{2}.$$

Si l'on prend successivement pour inconnue chacune des quantités s, n, a, l, les trois autres étant données, on résoudra *quatre* problèmes au moyen de l'équation (B), qui sera du premier degré.

224. Entre les cinq quantités a, r, n, l, s, on a les deux relations

$$\text{(A)} \quad l=a+nr-r, \qquad \text{(B)} \quad 2s=an+nl;$$

de sorte que, *si l'on prend pour inconnues deux de ces cinq quantités, on aura deux équations* (A) *et* (B) *entre ces deux inconnues.* Après avoir trouvé la solution commune aux deux équations, l'on vérifiera si les valeurs obtenues peuvent convenir à la question relative à la progression arithmétique.

Lorsqu'on prend de toutes les manières possibles deux inconnues parmi les quantités a, r, n, l, s, on est conduit à résoudre *dix* problèmes distincts.

Deux de ces problèmes conduisent à une équation du second degré.

Si r et n sont inconnues, l'équation (A) est du second degré à deux inconnues; mais l'équation (B) est du premier degré à une seule inconnue, n; de sorte que n étant donné par cette équation (B), l'équation (A) n'est plus qu'une équation du premier degré à une seule inconnue, r.

Si a et n sont inconnues, l'équation (B) est du second degré; mais l'équation (A) est alors du premier degré à deux inconnues.

Il en est de même encore lorsque n et l sont inconnues.

Dans tous les autres cas, les équations (A),(B), sont l'une et l'autre du premier degré.

On voit par là que la résolution d'aucun de ces dix problèmes, ne conduit à une équation d'un degré supérieur au second (nº 199).

Nous avons rassemblé les résultats dans le tableau suivant.

	DONNÉES.	INCONNUES.	VALEURS DES INCONNUES.
I	a, r, n	l, s	$l=a+(n-1)r,\ s=\frac{1}{2}n\left\{2a+(n-1)r\right\}.$
II	s, r, n	a, l	$a=\frac{2s-n(n-1)r}{2n},\quad l=\frac{2s+n(n-1)r}{2n}.$
III	l, r, n	a, s	$a=l-(n-1)r,\ s=\frac{1}{2}n\left\{2l-(n-1)\right\}r.$
IV	a, l, n	s, r	$s=\frac{1}{2}n(a+l),\ r=\frac{l-a}{n-1}.$
V	a, s, n	l, r	$l=\frac{2s}{n}-a,\ r=\frac{2(s-an)}{n(n-1)}.$
VI	l, s, n	a, r	$a=\frac{2s}{n}-l,\ r=\frac{2(nl-s)}{n(n-1)}.$
VII	a, l, r	n, s	$n=\frac{l-a}{r}+1,\ s=\frac{(l+a)(l-a+r)}{2r}.$
VIII	a, s, r	n, l	$n=\frac{(r-2a)\pm\sqrt{(r-2a)^2+8rs}}{2r},\ l=a+(n-1)r.$
IX	l, r, s	n, a	$n=\frac{(r+2l)\pm\sqrt{(r+2l)^2-8rs}}{2r},\ a=l-(n-1)r.$
X	a, l, s	n, r	$n=\frac{2s}{a+l},\ r=\frac{(l+a)(l-a)}{2s-(l+a)}.$

Il est clair que les valeurs obtenues pour n, dans les quatre derniers problèmes, ne devront être admises qu'autant qu'elles soient *entières et positives;* autrement, le problème relatif à la progression serait impossible.

225. On peut remarquer que si dans la formule

$$s=\frac{1}{2}n\left\{2a+(n-1)r\right\},$$

obtenue au *premier problème*, on suppose $a=1$, $r=2$, c'est-à-dire si l'on considère la progression

$$\div 1.3.5.7.9.\ldots\left\{1+2(n-1)\right\},$$

il vient $s=n^2$. Par conséquent, *la somme des nombres impairs consécutifs, à partir de l'unité, est égale au carré du nombre des termes additionnés.* Par exemple, la somme des 100 premiers nombres impairs, est égale à 10000.

Cette remarque conduit à un moyen très-simple de *trouver deux carrés dont la somme soit un carré.* Car si l'on choisit un nombre impair $1+2n$ qui soit un carré c^2, ce nombre impair sera précédé de n nombres impairs, dont la somme est égale à n^2; et l'on aura $n^2+c^2=(n+1)^2$, puisque la somme n^2+c^2 est la somme des $(n+1)$ premiers nombres impairs.

On a, par exemple, $121=11^2=1+2\times 60$; et $60^2+11^2=61^2$.

Progressions géométriques.

226. *Valeur d'un terme d'un rang déterminé.* Soient a, b, c, ..., h, k, l, les termes d'une *progression géométrique* (Arithm., pag. 114), composée de n termes, et dont la raison est désignée par q. On aura

$$b=aq,\ c=bq=aq^2,\ \ldots\ \text{et}\ \ l=aq^{n-1}. \qquad \text{(A)}$$

Selon que la progression est croissante ou décroissante, le nombre q est plus grand ou plus petit que l'unité, et réciproquement.

On a aussi $k=\frac{l}{q}$, $h=\frac{k}{q}=\frac{l}{q^2}$, ... $a=\frac{l}{q^{n-1}}$.

Si l'on prend successivement pour inconnue chacune des quantités a, q, n, l, les trois autres étant données, on aura *quatre* problèmes dont la résolution se ramène à celle de l'équation (A).

Cette équation est du premier degré lorsque l'inconnue est a ou l; c'est une équation à deux termes, $q^{n-1}=\frac{l}{a}$, lorsque q est l'inconnue; on a alors $q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$.

Enfin, lorsque n est inconnu, on a à résoudre *une équation dans laquelle une quantité donnée*, q, *est affectée d'un exposant incon-*

nu, n -1 ; c'est ce qu'on nomme une *équation* EXPONENTIELLE (*).

227. *Insertion de moyens.* Si l'on propose d'*insérer entre deux nombres donnés un nombre déterminé*, m, *de moyens proportionnels*, c'est-à-dire de *former une progression géométrique qui ait pour extrêmes les nombres donnés* a, l, *et qui se compose de* m $+2$ *termes*, la formule $q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$ résout la question, en déterminant la raison q de la progression demandée. Car $n=m+2$, d'où $n-1=m+1$. Cette formule donne $q=\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$, le nombre m désignant le nombre des moyens à insérer entre a et l. De là on conclut la règle donnée en arithmétique (page 116).

228. *Si l'on insère un même nombre*, m, *de moyens proportionnels entre les termes consécutifs d'une progression géométrique donnée*

$$\div a : b : c : d : \ . \ . \ . \ . \ . \ : k : l,$$

dont la raison est r, *il en résulte une seule progression continue ayant pour raison* $\sqrt[m+1]{\mathrm{r}}$.

Car la raison de la première progression partielle dont les extrêmes sont a et b est égale à $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}=\sqrt[m+1]{r}$; la raison, pour les progressions partielles suivantes est exprimée par

$$\sqrt[m+1]{\frac{c}{b}},\ \sqrt[m+1]{\frac{d}{c}},\ .\ .\ .\ .\ \sqrt[m+1]{\frac{l}{k}}.$$

(*) *On peut résoudre l'équation exponentielle* $\mathrm{q}^{n-1}=\frac{1}{a}$, *au moyen des propriétés des logarithmes* (Arithm., p. 119).

En effet, on a $\log q^{n-1}=(n-1)\log q$, et $\log\left(\frac{l}{a}\right)=\log l-\log a$.

Il faudra donc qu'on ait

$$(n-1)\log q=\log l-\log a, \qquad \text{d'où} \qquad n-1=\frac{\log l-\log a}{\log q}.$$

D'ailleurs, si dans l'équation $(n-1)\log q=\log l-\log a$, l'on considère $\log q$ comme inconnu, on en déduit $\log q=\frac{\log l-\log a}{n-1}$; donc, *lorsque la raison est inconnue, elle peut être calculée à l'aide des tables de logarithmes.*

Donc, les quotients $\frac{l}{k}$, . . , $\frac{c}{b}$ étant égaux à r, par hypothèse, toutes les progressions partielles ont une même raison, égale à $\sqrt[m+1]{r}$; et le dernier terme de chacune d'elles est en même temps le premier terme de la suivante.

229. *Différence de deux termes consécutifs.* Dans une progression par quotient, *la différence de deux termes consécutifs est variable; et, si la progression est croissante, la différence entre les deux derniers termes est plus grande que toutes les différences précédentes.* De plus, *si le nombre des termes d'une progression géométrique croissante n'est pas limité, la différence de deux termes consécutifs peut devenir plus grande que toute quantité donnée.*

En effet, si nous représentons par aq^n un terme quelconque de la progression, le terme suivant sera exprimé par aq^{n+1}. La différence de ces deux termes consécutifs sera $aq^n(q-1)$, ou bien $aq^n(1-q)$, selon que la progression sera croissante ou décroissante. Dans les deux cas, la valeur de cette différence change nécessairement, en même temps que la valeur attribuée à n; c'est-à-dire qu'elle change continuellement avec le rang des deux termes que l'on compare.

Si la progression est croissante et terminée au terme qui a n termes avant lui, la différence $aq^n(q-1)$ des deux derniers termes est plus grande que la différence $aq^{n'}(q-1)$ de deux autres termes consécutifs quelconques, puisqu'on a $n > n'$, et $q^n > q^{n'}$, le nombre q étant plus grand que l'unité.

Enfin, si la progression est croissante, et si le nombre des termes n'est pas limité, la quantité q^n peut croître au delà de toute limite (n° 216); on peut donc déterminer une valeur du nombre entier n assez grande pour que le produit $aq^n(q-1)$ surpasse une quantité donnée, aussi grande qu'on voudra.

230. *Entre deux nombres donnés*, a, l, *on peut insérer un nombre de moyens tel, que la raison*, q, *diffère de l'unité aussi peu qu'on voudra; et par suite, on peut toujours insérer entre deux nombres donnés un nombre* m *de moyens tel, que la différence de deux termes consécutifs soit moindre qu'une quantité donnée, quelque petite que soit cette quantité.*

En effet: 1° on peut toujours déterminer l'*indice* $m+1$ de la racine du nombre $\left(\frac{l}{a}\right)$, de manière que cette racine (qui sera la valeur de q), diffère de l'unité aussi peu qu'on le voudra (n° 218).

2° Soit a le plus petit des deux nombres donnés, a, l. On aura $\frac{l}{a} > 1$, d'où $\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}} > 1$. Si l'on considère d'abord a comme le premier terme de la progression demandée, dont la raison inconnue est désignée par q, on aura $q = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$, d'où $q > 1$. La progression sera croissante.

Maintenant, soit M la valeur d'un moyen quelconque, et M′ la valeur du terme qui suit M. On a $M' = Mq$.

Il s'agit de satisfaire à l'inégalité

$$M' - M < \delta, \text{ ou } M(q-1) < \delta, \qquad (1)$$

quelque petite que soit la quantité δ.

Or, M étant moindre que l, on a $M(q-1) < (q-1)l$; donc pour que l'inégalité (1) se vérifie, il suffit qu'on satisfasse à l'inégalité

$$(q-1).l < \delta, \text{ ou } q-1 < \frac{\delta}{l};$$

la question est donc ramenée à *insérer un nombre de moyens tel, que l'excès de la raison* q *sur l'unité soit moindre que la quantité donnée* $\frac{\delta}{l}$; et l'on vient de prouver (1°) que cela se peut toujours.

D'ailleurs, si l'on renverse la progression croissante

$$\div\!\div a : aq : \ldots : M : M' : \ldots\ldots : l,$$

il est clair qu'on a la progression décroissante

$$:: l : \ldots\ldots M' : M : \ldots\ldots aq : a$$

dans laquelle la différence de deux termes consécutifs, M′, M, est moindre que δ.

231. On voit par là qu'il est possible de former une progression géométrique d'après laquelle on passe du nombre a au nombre l, par une série d'accroissements qu'on peut rendre aussi petits qu'on veut, de sorte que les termes croissent par degrés presque insensibles.

Par conséquent, *Si un nombre donné* N *est compris entre les deux nombres donnés* a, l, *on peut toujours insérer entre* a *et* l, *un nombre de moyens géométriques qui soit tel, que l'un de ces moyens diffère de* N *aussi peu qu'on voudra.*

La différence entre N et l'un des moyens insérés, pourra être rendue plus petite qu'une quantité quelconque donnée, δ.

Et en effet, insérez entre a et l un nombre de moyens tel que la différence entre deux termes consécutifs de la progression, soit inférieure à δ.

Désignons par M le plus grand des termes moyens qui sont moindres que N. Le terme suivant, M', sera égal à N, ou plus grand que N.

Si l'on a $M'=N$, le problème est résolu; c'est-à-dire qu'on a introduit entre a et l un terme précisément égal à N.

Si l'on a $M<N<M'$, le problème est encore résolu; car les différences $N-M$, $M'-N$ sont moindres que la différence $M'-M$, qui est elle-même moindre que δ.

232. *Entre les termes consécutifs d'une progression géométrique donnée*

$$(1) \qquad \div\!\div a : b : c : d : \ldots : h : k : l,$$

on peut insérer un nombre de moyens tel, qu'il en résulte une nouvelle progression, dans laquelle se trouvent des termes qui différeront aussi peu qu'on voudra des nombres entiers consécutifs compris entre a *et* l (*).

Car si l'on veut approcher à moins de δ, de la valeur des nombres entiers dont il s'agit, qu'on insère dans les *deux derniers termes*, k,l, un nombre de moyens tel, que la différence entre deux moyens consécutifs, soit moindre que δ (nº 230); et qu'ensuite on insère le même nombre de moyens entre a et b, puis entre b et c,... enfin entre h et k: on formera ainsi (nº 228) une nouvelle progression.

$$(2) \qquad \div\!\div a : aq : \ldots\ldots : b : bq : \ldots\ldots : h : hq : \ldots : k : \ldots : l,$$

dans laquelle *deux termes consécutifs quelconques* auront une différence moindre que δ. Car cette différence étant moindre que δ, depuis k jusqu'à l, est, à plus forte raison, moindre que δ pour les termes qui précèdent, depuis a jusqu'à k (nº 229).

Donc, si l'on considère un nombre entier N, compris entre a et l, ou bien ce nombre sera l'un des termes de la progression (2); ou bien dans la progression (2), se trouveront deux moyens consécutifs M,M', qui comprendront entre eux le nombre N, et qui n'en différeront que d'une quantité inférieure à δ.

Soit, par exemple, la progression $\div\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000$, entre les termes de laquelle on voudrait insérer des valeurs approchées des nombres 2,3,4,...11,12,...9999, à moins d'un millième d'erreur. On peut prouver que la condition serait remplie, si l'on insérait un nombre de moyens marqué par 10^{11}, ou, à plus forte raison, un nombre de moyens plus grand encore, tel que le nombre 2^{37}.

233. *Le produit de deux termes également distants des extrêmes, est égal au produit des extrêmes.*

(*) On a déjà vu dans l'*Arithmétique* (p. 121-122) l'énoncé du principe dont nous donnons ici la démonstration.

En effet, le terme $x=aq^p$ a p termes avant lui; le terme $y=\frac{l}{q^p}$ a p termes après lui; ce sont deux termes également distants des extrêmes a, l; et l'on a pour leur produit, $xy=al$.

Le produit P de tous les termes est égal à $\sqrt[2]{(a\times l)^n}$. Car on a

$$P=a\times aq\times aq^2\times\ldots\times aq^p\times\ldots\times\frac{l}{q^p}\times\ldots\times\frac{l}{q^2}\times\frac{l}{q}\times l, \quad (1)$$

on a aussi

$$P=l\times\frac{l}{q}\times\frac{l}{q^2}\times\ldots\frac{l}{q^p}\times\ldots\times aq^p\times\ldots\times aq^2\times aq\times a. \quad (2)$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, on obtient

$$P^2=(a\times l)^n,\ \text{d'où}\ P=\sqrt[2]{(a\times l)^n}. \quad (B)$$

Somme de tous les termes d'une progression géométrique.

234. Soient a le premier terme, q la raison, n le nombre des termes et s la somme de tous les termes d'une progression géométrique. On a

$$s=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=a(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})=a(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1).$$

Or, on a vu (nos 21 et 45) que

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Donc

$$\left.\begin{aligned}s&=a\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)=\frac{aq^n}{q-1}-\frac{a}{q-1};\\ s&=a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)=\left(\frac{a}{1-q}\right)-\left(\frac{a}{1-q}\right)q^n.\end{aligned}\right\}\quad (C)$$

Si l'on désigne par l le dernier terme de la progression, l'on a

$$l=aq^{n-1}\,(A),\quad \text{d'où}\quad lq=aq^n;$$

et les formules (C) deviennent

$$s=\frac{lq-a}{q-1},\quad s=\frac{a}{1-q}-\frac{lq}{1-q}. \quad (D)$$

Ce sont les formules qu'on a déjà obtenues (*Arith.*, pag. 115, 116), en remarquant que l'égalité

$$s = a + aq + aq^2 + \ldots + l, \tag{1}$$

donne

$$sq = aq + aq^2 + \ldots\ldots + l + lq; \tag{2}$$

de sorte qu'en retranchant membre à membre la première égalité de la seconde, lorsque la progression est croissante, on a

$$sq - s, \quad \text{ou} \quad s(q-1) = lq - a, \quad \text{d'où} \quad s = \frac{lq-a}{q-1};$$

et qu'en retranchant la seconde égalité de la première, lorsque la progression est décroissante, on a

$$s - sq, \quad \text{ou} \quad s(1-q) = a - lq, \quad \text{d'où} \quad s = \frac{a-lq}{1-q}.$$

235. *Discussion.* 1° Lorsqu'on a $q > 1$, *si le nombre des termes n'est pas limité, on pourra toujours additionner un nombre de termes tel, que la somme surpasse toute quantité donnée;* car la quantité q^n pouvant croître au delà de toute limite (n° 216), il en est de même de la quantité $\left(\frac{a}{q-1}\right)q^n$, et du reste $\left(\frac{a}{q-1}\right)q^n - \frac{a}{q-1} = s$.

2° Lorsqu'on a $q = 1$, la somme

$$s = a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$$

se réduit évidemment à $s = a \times n$.

Dans ce cas, la formule $s = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}$ donne $s = \frac{0}{0}$; cela tient à ce que les deux termes de la fraction qui exprime la valeur de s, admettent le facteur commun $(q-1)$, qui s'annule lorsqu'on suppose $q = 1$. Et si, avant de faire cette hypothèse, on supprime ce facteur commun, c'est-à-dire si l'on effectue la division indiquée, on retrouve

$$s = a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1});$$

et par suite, $\qquad s = a \times n$, lorsque $q = 1$.

3° Enfin, lorsqu'on a $q < 1$, la somme des termes de la progression décroissante augmente en même temps que le nombre des termes additionnés; mais cette somme ne peut pas croître au delà de toute limite. On conclut en effet de la formule (C)... $s = \frac{a}{1-q} - \left(\frac{a}{1-q}\right)q^n$, que la valeur de s s'obtient en retranchant de la quantité constante $\frac{a}{1-q}$, une quantité $\left(\frac{a}{1-q}\right)q^n$ qui ne peut pas devenir négative ; de sorte que s ne peut jamais surpasser $\frac{a}{1-q}$.

D'ailleurs, q étant moindre que 1, le résultat q^n diminue à mesure que n augmente ; par conséquent, le produit $\left(\frac{a}{1-q}\right)q^n$ diminue aussi à mesure que n augmente ; et il s'ensuit que le reste

$$\frac{a}{1-q}-\left(\frac{a}{1-q}\right)q^n$$

ou la valeur de s', augmente en même temps que n.

En outre, *Si le nombre des termes n'est pas limité, on pourra toujours additionner un nombre de termes tel, que la somme diffère de* $\frac{a}{1-q}$ *aussi peu qu'on voudra.*

Car la formule (C) donne $\frac{a}{1-q}-s=\left(\frac{a}{1-q}\right)q^n$; or, q étant moindre que 1, le résultat q^n s'approche indéfiniment de *zéro* (n° 217). Par suite, on peut déterminer une valeur de n telle, que la quantité $\left(\frac{a}{1-q}\right)q^n$ soit moindre qu'une quantité donnée δ, aussi petite qu'on voudra. On peut donc toujours obtenir une somme s qui diffère de $\frac{a}{1-q}$ d'une quantité plus petite que toute quantité donnée. C'est ce que l'on exprime en disant que $\frac{a}{1-q}$ est la *limite* de la somme s qui varie en augmentant indéfiniment. On dit encore, dans le même sens, que *la somme des termes de la progression géométrique indéfiniment décroissante* $\div\!\!\div\, a : aq : aq^2 : aq^3 :$ etc., *est* ÉGALE *à* $\frac{a}{1-q}$ (*Arith.*, page 116).

236. Si nous désignons par S la *limite* de la somme des termes de la progression géométrique décroissante, dont le premier terme est a, et la raison $q<1$; les trois quantités $a,q,$S, sont liées par la relation

$$S=\frac{a}{1-q}, \quad \text{ou} \quad S(1-q)=a.$$

Deux quelconques de ces quantités étant données, la troisième est déterminée.

Mais si le nombre S est seul donné, il est clair qu'en attribuant arbitrairement à la lettre q une valeur moindre que l'unité, on déduira de l'équation à deux inconnues $S(1-q)=a$, une valeur correspondante de a. On pourra ainsi *former autant qu'on voudra de progressions géométriques indéfiniment décroissantes, différentes les unes des autres par leur raison et par le premier terme, mais telles, que la somme de leurs termes aura constamment la même* LIMITE. C'est, par exemple, ce qui a lieu pour les progressions

$$\div\!\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \text{etc.} ; \div\!\div \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} : \frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 : \text{etc.} ; \div\!\div 1{,}8 : 0{,}18 : 0{,}018 : \text{etc.}$$

237. Entre les cinq quantités a, q, n, l, s, dans toute progression par quotient, on a les deux relations

$$(\text{A})\ldots\ l = aq^{n-1}, \quad (\text{B})\ldots\ s(q-1) = ql - a.$$

Si l'on prend de toutes les manières possibles, deux inconnues parmi ces quantités, on est conduit à résoudre *dix* problèmes distincts.

Les quatre problèmes dans lesquels on se propose de trouver le nombre des termes, donnent lieu à des *équations exponentielles* (nº 226), qu'on peut résoudre au moyen des propriétés des logarithmes.

Les deux problèmes où la raison et l'un des deux extrêmes sont inconnus, conduisent à des équations complètes d'un degré qui est en général supérieur au second.

Voici le tableau des formules relatives à ces dix problèmes.

	DONNÉES.	INCONNUES.	DÉTERMINATION DES INCONNUES.
I	a, q, n	l, s	$l = aq^{n-1}$, $s = \dfrac{a(q^n - 1)}{(q-1)}$.
II	s, q, n	a, l	$a = \dfrac{s(q-1)}{q^n - 1}$, $l = \dfrac{s(q-1)q^{n-1}}{q^n - 1}$.
III	l, q, n	a, s	$a = \dfrac{l}{q^{n-1}}$, $s = \dfrac{(q^n - 1)l}{(q-1)q^{n-1}}$.
IV	a, l, n	q, s	$q = \sqrt[n-1]{\dfrac{l}{a}}$, $s = \dfrac{l\sqrt[n-1]{l} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{l} - \sqrt[n-1]{a}}$.
V	a, s, n	q, l	$q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^2 + q + 1 = \dfrac{s}{a}$, $l = aq^{n-1}$.
VI	l, s, n	q, a	$(s-l)q^{n-1} - l(q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + q^2 + q + 1) = 0$, $a = \dfrac{l}{q^{n-1}}$.
VII	a, l, q	s, n	$s = \dfrac{lq - a}{q-1}$, $n = 1 + \dfrac{\operatorname{Log} l - \operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} q}$.
VIII	a, s, q	l, n	$l = \dfrac{a + s(q-1)}{q}$, $n = \dfrac{\operatorname{Log}(sq - s + a) - \operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} q}$.
IX	l, q, s	a, n	$a = lq - s(q-1)$, $n = 1 + \dfrac{\operatorname{Log} l - \operatorname{Log}(lq + s - sq)}{\operatorname{Log} q}$.
X	a, l, s	q, n	$q = \dfrac{s-a}{s-l}$, $n = 1 + \dfrac{\operatorname{Log} l - \operatorname{Log} a}{\operatorname{Log}(s-a) - \operatorname{Log}(s-l)}$.

CHAPITRE SIXIÈME.

ARRANGEMENTS ET COMBINAISONS. PUISSANCES EN GÉNÉRAL. NOMBRES FIGURÉS. SOMMATION DES PIEDS DE BOULETS.

Arrangements, permutations, combinaisons.

238. On entend par *arrangements* de m lettres prises n à n, les résultats qu'on peut obtenir en écrivant n de ces m lettres, les unes à la suite des autres, *de toutes les manières possibles.*

Par exemple, les *arrangements* des trois lettres a, b, c, prises deux à deux, sont

$$ab,\ ba;\quad ac,\ ca;\quad bc,\ cb.$$

Les arrangements de plusieurs lettres prennent le nom de *permutations* lorsque les lettres données sont écrites *toutes à la fois*, les unes à côté des autres, de toutes les manières possibles.

Par exemple, les *permutations* des trois lettres a, b, c, sont

$$abc,\ acb,\ bac;\quad bca,\ cab,\ cba.$$

Enfin, on entend par *combinaisons* de m lettres n à n, ceux des arrangements n à n qui diffèrent les uns des autres, au moins par une des lettres dont ils se composent.

Par exemple, les *combinaisons* des trois lettres a, b, c, prises deux à deux, sont

$$ab,\ ac,\ bc.$$

Les arrangements, tels que ab, ba, qui diffèrent seulement par l'*ordre* des lettres, ne forment qu'une seule *combinaison.*

On donne encore aux combinaisons de m lettres prises n à n, le nom de *produits différents*, ou simplement *produits* de ces lettres n à n, parce que les n lettres écrites à côté les unes des autres peuvent être considérées comme représentant les facteurs d'un produit qui reste constant, quel que soit l'*ordre* dans lequel on dispose ces n lettres.

239. *Nombre des arrangements.* Pour former tous les arrangements de m lettres prises 2 à 2, il suffit d'écrire successivement à la suite de chacune des lettres données, les $(m-1)$ lettres restantes. On aura ainsi, par exemple, les arrangements

$$\begin{array}{l} ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ \text{etc.},\\ ba,\ bc,\ bd,\ be,\ \text{etc.},\\ ca,\ cb,\ cd,\ ce,\ \text{etc.}; \end{array}$$

et ainsi de suite.

Donc, chacune des m lettres données faisant obtenir $(m-1)$ arrangements, le nombre total des arrangements de m lettres 2 à 2 sera exprimé par $m(m-1)$.

Pour former tous les arrangements de m lettres prises 3 à 3, il suffit d'écrire successivement, à la suite de chacun des arrangements de deux lettres, les $(m-2)$ lettres restantes. On aura ainsi, par exemple, les arrangements

$$\begin{array}{l} ab\,c,\ ab\,d,\ ab\,e,\ \text{etc.},\\ ac\,b,\ ac\,d,\ ac\,e,\ \text{etc.},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ ba\,c,\ ba\,d,\ ba\,e,\ \text{etc.}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

et ainsi de suite.

Donc, chacun des $m(m-1)$ arrangements 2 à 2 faisant obtenir $(m-2)$ arrangements de trois lettres, le nombre total des arrangements de m lettres 3 à 3 sera exprimé par $m(m-1)(m-2)$.

En raisonnant d'une manière semblable sur les arrangements 4 à 4, on trouve que le nombre de ces arrangements est exprimé par $m(m-1)(m-2)(m-3)$; ainsi, *le nombre des arrangements est constamment exprimé par un produit de nombres entiers consécutifs décroissants, à partir de* m; *le nombre des facteurs de ce produit étant égal au nombre des lettres qui entrent dans chacun des arrangements que l'on considère.*

On est porté à généraliser la règle, par analogie; de sorte qu'en désignant par A le nombre des arrangements de m lettres n à n, on aurait

$$(1)\qquad A = m(m-1)(m-2)(m-3)\times\ldots\times(m-n+1).$$

Pour démontrer cette loi, nous ferons voir que, si elle est vraie pour les arrangements de m lettres prises $(n-1)$ à $(n-1)$, elle sera vraie aussi pour les arrangements n à n.

Admettons donc que le nombre A′ des arrangements de m lettres $(n-1)$ à $(n-1)$ soit exprimé par le produit

$$m(m-1)(m-2)\times\ldots\times(m-n+2)$$

qui renferme $(n-1)$ facteurs.

On formera tous les arrangements de m lettres prises n à n en écrivant successivement, à la suite de chacun des arrangements de $(n-1)$ lettres, chacune des lettres restantes. Or le nombre des lettres restantes est $m-(n-1)$, ou $m-n+1$. Par conséquent, chacun des A′ arrangements $(n-1)$ à $(n-1)$ faisant obtenir $(m-n+1)$ arrangements de n lettres, le nombre total des arrangements de m lettres n à n sera exprimé par $A=A'(m-n+1)$, ou

$$A=m(m-1)(m-2)\times\ldots\times(m-n+2)(m-n+1).$$

D'ailleurs, le nombre des arrangements de m lettres prises *une* à *une* est évidemment égal à m; donc le nombre des arrangements 2 à 2 est égal à $m(m-1)$.

La loi étant vérifiée pour les arrangements 2 à 2, est vraie pour les arrangements 3 à 3, et ainsi de suite. Donc, cette loi est générale.

240. *Nombre des permutations.* Les permutations de n lettres étant les arrangements de ces lettres prises *toutes à la fois*, c'est-à-dire n à n, on obtient le nombre P des permutations de n lettres, en faisant $m=n$ dans la formule (1); et l'on obtient ainsi

$$P=n(n-1)\ldots\times2\times1=1\times2\times3\times4\times\ldots(n-1)\times n.$$

Mais il est facile de parvenir directement à ce résultat. En effet, 2 lettres, a, b, donnent seulement 2 permutations, ab, ba. Pour obtenir les permutations de 3 lettres, il suffit d'écrire successivement à la suite de chacune de ces 3 lettres les 2 permutations des deux autres; on aura ainsi 3 fois 2 permutations, ou $1\times2\times3$ permutations de 3 lettres. On verra de même que le nombre des permutations qu'on peut former avec 4 lettres est égal à 4 fois $1\times2\times3$, ou $1\times2\times3\times4$, et ainsi de suite (*). Donc, en général, pour le nombre P des permutations de n lettres, on a la formule

$$(2)\quad P=1\times2\times3\times4\times\ldots\times n.$$

(*) Ainsi, quatre nombres différents, a, b, c, d, admettent 24 permutations. Si a, b, c, d, sont les termes d'une proportion, par différence ou par quotient, il existera 8 permutations ou 8 arrangements des quatre nombres,

241. *Nombre des combinaisons.* Dans le nombre total A des arrangements de m lettres n à n, chaque *combinaison* ou chaque *produit* de n lettres se trouve répété autant de fois qu'il existe de permutations possibles entre les n facteurs de ce produit, c'est-à-dire P fois. Soit C le nombre des combinaisons ou produits différents. Chaque produit donnant P arrangements, les C produits différents donneront $P \times C$ arrangements. On a donc $A = P \times C$, d'où $C = \frac{A}{P}$; et, en remplaçant les nombres A, P, par leurs valeurs (1) et (2), on obtient la formule

$$(3) \quad C = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ .n}$$

Si, par exemple, on demande combien de problèmes il faudra résoudre lorsqu'on prendra successivement pour inconnues deux des cinq quantités a,b,c,d,e, nous aurons $m=5$, $n=2$; $C = \frac{5.4}{1\ 2} = 10$; il y aura donc dix problèmes. Dans la même question, on peut demander combien il y aura de problèmes à résoudre, lorsqu'on prendra successivement pour quantités données, trois des cinq quantités a,b,c,d,e; alors nous aurons $m=5$, $n=3$; $C = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$, comme précédemment; ce qui devait être.

242. *Le nombre des combinaisons de* m *lettres prises* n *à* n *est égal au nombre des combinaisons de* m *lettres prises* (m—n) *à* (m—n). En effet, soit C le nombre des *produits différents* ou des combinaisons n à n: si l'on divise successivement le produit des m lettres proposées par chacun de ces produits de n facteurs, on obtient un nombre C de résultats, qui sont des produits différents ou des combinaisons $(m-n)$ à $(m-n)$. Or, on obtient ainsi la totalité des combinaisons $m-n$ à $m-n$; car, réciproquement, toute combinaison de $m-n$ lettres prises parmi les m lettres proposées est un résultat qu'on retrouve nécessairement lorsqu'on divise le produit des m lettres, par le produit des n lettres qui n'entrent pas dans la combinaison particulière de $m-n$ lettres dont il s'agit.

Le même principe peut encore être démontré au moyen de la for-

---

dans lesquels l'égalité des rapports subsistera (*Arithm.*, p. 71 et 75), et 16 autres permutations ou arrangements des quatre nombres, dans lesquels ces nombres ne seront plus en proportion.

mule générale établie au numéro précédent. En vertu de cette formule, le nombre des combinaisons n à n est exprimé par

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.\quad 2.\quad \ldots\ldots\quad n},$$

ou bien

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)\times(m-n)(m-n-1)\ldots 2\times 1}{1.\quad 2.\quad \ldots\ldots\quad n\quad \times(m-n(m-n-1)\ldots 2\times 1};\quad (1)$$

et le nombre des combinaisons $(m-n)$ à $(m-n)$ est exprimé par

$$\frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.\quad 2.\quad \ldots(m-n)},$$

ou bien

$$\frac{m(m-1)\ldots(n+1)\times n(n-1)\ldots\ldots 2\times 1}{1.\quad 2.\quad \ldots(m-n)\times n(n-1)\ldots\ldots 2\times 1}\quad (2).$$

Or l'identité des valeurs des expressions (1), (2) est évidente, puisque dans chacune d'elles le numérateur est le produit des nombres consécutifs, depuis 1 jusqu'à m; et que les dénominateurs sont des produits qui diffèrent seulement par l'ordre des facteurs.

Puissances en général.

243. PUISSANCE ENTIÈRE D'UN MONÔME. *Pour élever immédiatement un monôme à une puissance dont le degré est marqué par un nombre entier quelconque* (sans passer par les puissances d'un degré inférieur), *il suffit d'élever le coefficient à cette puissance, et de multiplier l'exposant dont chaque lettre est affectée par le degré de cette puissance* (*). Ainsi l'on a

$$(8a^3b)^5 = 8^5\times a^{3\times 5}\times b^{1\times 5} = 32768\,a^{15}\,b^5.$$

On démontre cette règle en se fondant sur les principes de la multiplication, comme au nº 160.

Il s'ensuit que, réciproquement, *lorsque le coefficient numérique d'un monôme est la puissance* m$^{\text{ième}}$ *exacte d'un autre nombre, et que chacune des lettres est affectée d'un exposant multiple de* m, *on obtient la racine* m$^{\text{ième}}$ *de ce monôme en divisant par* m *l'expo-*

(*) Quant au signe, le résultat $a^m = p$ sera toujours positif si m est un nombre pair; et p aura le même signe que a si m est impair (nº 64).

sant de chaque lettre, et en multipliant le résultat par la racine m$^{\text{ième}}$ *du coefficient* (*).

Si l'on a, par exemple, $8^m \times a^h \times b^k = 8^m \times a^{\alpha m} \times b^{\beta m}$,

on en conclut $\sqrt[m]{8^m a^h b^k} = \sqrt[m]{8^m} \times a^{\frac{h}{m}} \times b^{\frac{k}{m}} = 8a^\alpha b^\beta$;

car $(8\,a^\alpha b^\beta)^m = 8^m a^{\alpha m} b^{\beta m} = 8^m a^h b^k$.

Pour former la m$^{\text{ième}}$ *puissance d'une fraction, il suffit d'élever à la* m$^{\text{ième}}$ *puissance chacun de ses deux termes*. Ainsi l'on a

$$\left(\frac{8a^3b}{3c^2d}\right)^5 = \frac{(8a^3b)^5}{(3c^2d)^5} = \frac{32768\,a^{15}b^5}{243c^{10}d^5}.$$

On démontre cette règle en se fondant sur la règle de multiplication des fractions (n° 56).

Réciproquement, *lorsqu'on peut obtenir la racine* m$^{\text{ième}}$ *exacte de chacun des deux termes d'une fraction, on détermine la racine* m$^{\text{ième}}$ *de cette fraction en extrayant la racine* m$^{\text{ième}}$ *de chacun des deux termes*.

Si, par exemple, on applique cette règle à la fraction $\frac{32768a^{15}b^5}{243c^{10}d^5}$, on a

$$\sqrt[5]{32768a^{15}b^5} = 8a^3b \quad \text{et} \quad \sqrt[5]{243c^{10}d^5} = 3c^2d;$$

or, en divisant la racine du numérateur par la racine du dénominateur, on obtient une fraction $\frac{8a^3b}{3c^2d}$ dont la cinquième puissance est égale à la fraction proposée. Le résultat $\frac{8a^3b}{3c^2d}$, auquel conduit la règle, est donc la racine cinquième de la fraction proposée.

244. Puissance fractionnaire. Par extension, l'on est convenu d'admettre dans les calculs l'*exposant fractionnaire*, même dans le cas où le numérateur de l'exposant n'est pas divisible par le dénominateur. Ainsi, *l'expression algébrique* $a^{\frac{n}{m}}$, *constitue, par convention, une manière d'indiquer la valeur du radical* $\sqrt[m]{a^n}$.

(*) Quant au signe, le résultat $\sqrt[m]{p} = a$ doit être affecté du double signe $\pm$ si m est pair; et a aura le même signe que p, si m est impair.

Nous verrons plus loin que *les règles qui déterminent l'exposant d'une lettre dans un produit ou dans un quotient, quand tous les exposants sont entiers, s'étendent au cas où l'on admet dans les calculs les exposants fractionnaires.*

245. Puissances entières d'un binôme. *La puissance* $m^{\text{ième}}$ *d'un binôme* $x+a$, *est un polynôme homogène, composé de* $m+1$ *termes dissemblables.*

Si l'on ordonne ce polynôme par rapport aux puissances décroissantes de x, *l'exposant de* x *décroît constamment d'une unité, d'un terme au terme suivant, depuis* m *jusqu'à zéro, tandis que l'exposant de* a *augmente constamment d'une unité, depuis zéro jusqu'à* m. *Les coefficients extrêmes sont égaux à l'unité, et les coefficients des termes également distants des extrêmes sont égaux entre eux*; de sorte que, si l'on désigne par P le coefficient numérique du terme qui a n termes avant lui, le nombre P sera aussi le coefficient du terme qui a n termes après lui : ces deux termes également distants des extrêmes seront exprimés par $Px^{m-n}a^n$ et par $Px^n a^{m-n}$.

Cette proposition est déjà vérifiée pour la première puissance, pour le carré et pour le cube (n^{os} 17, 19); nous allons prouver qu'elle est vraie généralement, en faisant voir que, si on l'admet pour un certain degré m, il en résulte qu'elle est encore vraie pour le degré $m+1$.

En effet, si l'on admet que $(x+a)^m$ soit égal au polynôme

$$x^m+Ax^{m-1}a+\ldots+Nx^{m-n+1}a^{n-1}+Px^{m-n}a^n+\ldots$$
$$+Px^na^{m-n}+Nx^{n-1}a^{m-n+1}+\ldots+Axa^{m-1}+a^m,$$

on trouve, en multipliant par $x+a$ ces quantités égales, que $(x+a)^{m+1}$ est égal au polynôme

$$x^{m+1}+(A+1)x^ma+\ldots+(P+N)x^{m+1-n}a^n+\ldots$$
$$+(N+P)x^na^{m+1-n}+\ldots+(1+A)xa^m+a^{m+1}.$$

Ainsi, la loi énoncée s'étend à tous les degrés.

246. On voit de plus qu'*on pourra développer les puissances successives du binôme* $x+a$, *sans qu'il soit nécessaire d'effectuer des multiplications.* Car, lorsque les coefficients sont connus pour une certaine puissance $m^{\text{ième}}$, *la somme* $N+P$ *des coefficients du* $n^{\text{ième}}$ *et du* $(n+1)^{\text{ième}}$ *termes de cette puissance, donne le coefficient du* $(n+1)^{\text{ième}}$ *terme de la puissance immédiatement supérieure.* Donc, on sait déduire des coefficients des termes de la première puissance, ceux des termes de la deuxième, puis de la troisième, et ainsi de suite.

Si nous rassemblons dans une même colonne verticale tous les coefficients des termes d'une même puissance, ainsi obtenus, nous formons le tableau suivant, qui est connu sous le nom de *triangle arithmétique de* Pascal.

Degré de la puissance du binôme.

Rang de chaque terme.	0	1er	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	etc.
1er.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	. . .
2e.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	. . .
3e.		0	1	3	6	10	15	21	28	36	. . .
4e.			0	1	4	10	20	35	56	84	. . .
5e.				0	1	5	15	35	70	126	. . .
6e.					0	1	6	21	56	126	. . .
7e.						0	1	7	28	84	. . .
8e.							0	1	8	36	. . .
9e.								0	1	9	. . .
10e.									0	1	. . .
11e.										0	. . .
etc.											

Le coefficient du deuxième terme, et celui de l'avant-dernier terme, sont toujours égaux au degré de la puissance que l'on considère. Et en effet, si A est le coefficient du deuxième terme, celui de l'avant-dernier sera aussi égal à A. Or, si l'on a, pour le degré m, l'égalité $A=m$, nous savons que pour le degré $m+1$, le coefficient du second terme sera $A+1=m+1$, c'est-à-dire qu'il sera encore égal au degré. Donc, la propriété énoncée se vérifiant dans le premier degré, dans le deuxième, est encore vraie dans le troisième, et ainsi de suite; de sorte qu'elle est générale.

Formule du binôme de Newton.

247. Newton s'est proposé de découvrir une règle au moyen de laquelle il fût possible d'*obtenir directement une puissance quelconque d'un binôme, sans être obligé de passer par les puissances précédentes.*

Il s'agit d'exprimer directement en fonction de l'exposant m, la valeur des coefficients des termes du polynôme égal à $(x+a)^m$.

Voici la formule à laquelle Newton est parvenu :

$$(x+a)^m=x^m+\frac{m}{1}ax^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\;2.\;\;3}a^3x^{m-3}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\;2.\;\;3\ldots\ldots\ldots n}a^nx^{m-n}+\ldots\ldots+a^m.$$

D'après cette formule, la loi des coefficients consiste en ce que *le coefficient du terme qui a* n *termes avant lui est égal au nombre des combinaisons* n *à* n*, qu'on peut former avec un nombre* m *de lettres, égal à l'exposant de la puissance du binôme.* C'est ce que nous allons démontrer.

248. Considérons d'abord le produit de facteurs binômes, tels que $x+a$, $x+b$, dont les seconds termes sont différents. Par là, nous éviterons les *termes semblables* qui se trouvent dans les puissances d'un binôme, et qui, en se réduisant, font naître des coefficients dont la loi n'est pas évidente. Nous pourrons ensuite revenir du produit $(x+a)(x+b)\ldots$, à la *puissance* d'un binôme, en supposant que les seconds termes des facteurs binômes deviennent égaux.

Or, en effectuant les multiplications, on parvient aux résultats suivants :

$$(x+a)(x+b) = x^2 \begin{array}{l|} +a \\ +b \end{array}\, x + ab,$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 \begin{array}{l|} +a \\ +b \\ +c \end{array}\, x^2 \begin{array}{l|} +ab \\ +ac \\ +bc \end{array}\, x + abc,$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 \begin{array}{l|} +a \\ +b \\ +c \\ +d \\ \\ \\ \end{array}\, x^3 \begin{array}{l|} +ab \\ +ac \\ +bc \\ +ad \\ +bd \\ +cd \end{array}\, x^2 \begin{array}{l|} +abc \\ +abd \\ +acd \\ +bcd \\ \\ \\ \end{array}\, x + abcd.$$

Ces résultats étant ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, on voit que *l'exposant de* x *dans le premier terme est égal au nombre des facteurs binômes qu'on a multipliés entre eux ; ensuite l'exposant de* x *décroît constamment d'une unité, jusque dans le dernier terme, où cet exposant est nul. Le coefficient du premier terme est égal à l'unité ; le coefficient du second terme est la somme des seconds termes des binômes ; le coefficient du troisième terme est la somme des produits de ces seconds termes combinés* 2 *à* 2 *; le coefficient du quatrième terme est la somme des produits de ces seconds termes combinés* 3 *à* 3*, et ainsi de suite. Le dernier terme est le produit de tous les seconds termes des facteurs binômes.*

Pour prouver que cette loi est générale, il suffit de faire voir que, si elle est admise pour le produit d'un certain nombre m de binômes, elle est encore vraie lorsqu'on introduit un facteur binôme de plus.

Représentons par A la somme des seconds termes des m binômes $x+a$, $x+b$,..., $x+k$; par B la somme des produits 2 à 2 de ces seconds termes ; par C la somme de leurs produits 3 à 3, et ainsi de suite ; enfin par U le produit de tous ces seconds termes.

Admettons que le produit $(x+a)(x+b)\times\ldots\times(x+k)$ soit égal à

$$x^m + \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} + \ldots + \mathrm{U}.$$

Si l'on multiplie ce produit par un nouveau facteur binôme $x+l$, on trouve que le produit des $(m+1)$ facteurs est égal à

$$x^{m+1}\begin{matrix}+\mathrm{A}\\+l\end{matrix}\;\Bigg|\; x^m \begin{matrix}+\mathrm{B}\\+\mathrm{A}l\end{matrix}\;\Bigg|\; x^{m-1}\begin{matrix}+\mathrm{C}\\+\mathrm{B}l\end{matrix}\;\Bigg|\; x^{m-2}\ldots\begin{matrix}+\mathrm{U}\\+\ldots\end{matrix}\;\Bigg|\; \begin{matrix}x\\ \end{matrix} \;+\mathrm{U}l.$$

La loi des exposants de x subsiste dans le nouveau produit. Le coefficient du premier terme est l'unité.

Le coefficient du second terme est $\mathrm{A}+l=a+b+\ldots+k+l$; c'est la somme des seconds termes des $(m+1)$ binômes.

Le coefficient du troisième terme est la somme de tous les produits 2 à 2 des $(m+1)$ seconds termes ; car $\mathrm{A}l=(a+b+\ldots+k)l$ est la somme des produits 2 à 2 dans lesquels entre le facteur l, combiné avec chacun des m autres seconds termes ; et B est la somme des produits 2 à 2 dans lesquels la lettre l n'entre pas.

Le coefficient du quatrième terme est la somme de tous les produits 3 à 3 des $(m+1)$ seconds termes ; car

$$\mathrm{B}l=(ab+ac+\ldots+ak+bc+\ldots+bk+\text{etc.})\times l$$

est la somme des produits trois à trois dans lesquels entre le facteur l ; et C est la somme des produits 3 à 3 dans lesquels la lettre l n'entre pas.

En continuant d'appliquer le même raisonnement à tous les termes qui suivent, jusqu'au dernier terme $\mathrm{U}l=abc\times\ldots k\times l$, qui est le produit des $m+1$ seconds termes, on reconnaît que si la loi des coefficients dans le produit $(x+a)(x+b)\times$ etc., est vraie pour m facteurs binômes, elle l'est encore pour le produit de $(m+1)$ facteurs.

Donc, cette loi est vraie pour le produit de 3 facteurs, parce qu'elle est vérifiée directement par la multiplication pour un produit de 2 facteurs. Par conséquent, elle est vraie pour 4 facteurs, et ainsi de suite. Donc elle est générale.

249. Il suffit maintenant, pour obtenir $(x+a)^m$, de considérer le cas particulier où les m seconds termes du produit

$$(x+a)(x+b)\times\ldots\times(x+k)$$

sont égaux à a.

Le premier terme est encore x^m.

Le coefficient A, qui est la somme de m nombres égaux à a, a pour valeur ma; le second terme est donc $m.ax^{m-1}$, ou $\frac{m}{1}ax^{m-1}$.

Le coefficient B est une somme de produits égaux à a^2; et le nombre de ces produits est égal au nombre des combinaisons 2 à 2 qu'on peut former avec m lettres ; ce nombre est $\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}$ (n° 241) : on a donc $B=\frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^2$. Par conséquent, le troisième terme est $\frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^2x^{m-2}$.

En général, le coefficient du terme qui a n termes avant lui est une somme de produits égaux à a^n; et le nombre de ces produits est égal au nombre des combinaisons n à n qu'on peut former avec m lettres ; ce nombre est $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ldots\ldots\ldots\ n}$. D'ailleurs, dans ce terme, l'exposant de x est $(m-n)$. Si donc on convient de désigner par T_{n+1} ce terme qui occupe le rang $n+1$, on aura

$$T_{n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ \ 3\ldots\ldots\ n}a^nx^{m-n}. \qquad \text{(A)}$$

La *formule du binôme de Newton* (n° 247) est ainsi démontrée.

250. L'expression du terme T_{n+1} donnée par la formule (A), est appelée le *terme général* du développement de $(x+a)^m$, parce que, si l'on attribue successivement au nombre n les valeurs 1, 2, 3, 4, etc., on déduira de cette formule tous les termes de la puissance du binôme, *à partir du second terme* (*).

On peut obtenir immédiatement, par la formule (A), le terme d'un rang désigné, sans s'occuper des termes précédents.

(*) Quant au premier terme x^m (qui est toujours connu immédiatement), on ne peut le considérer comme compris dans la formule (A), car le coefficient $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ \ldots\ n}$ ne présente plus de signification, lorsqu'on y suppose $n=0$.

Si l'on demande, par exemple, le sixième terme de la quatorzième puissance de $x+a$, on fera $m=14$, $n=5$, et l'on aura

$$T_6=\frac{14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5}a^5x^9=14.13.11\,a^5x^9=2002\,a^5x^9.$$

La formule (A) fait retrouver la valeur a^m pour le $(m+1)^{\text{ième}}$ terme du développement de $(x+a)^m$; elle avertit même que ce terme est le dernier; ce qu'on savait d'ailleurs (nº 245).

Et en effet, lorsqu'on suppose $n=m$, dans cette formule, le numérateur et le dénominateur du coefficient de T_{m+1} sont formés l'un et l'autre du produit des nombres consécutifs, depuis 1 jusqu'à m; ce coefficient est donc égal à l'unité; et l'on a $T_{m+1}=a^mx^0=a^m$.

Si l'on suppose $n>m$, le coefficient devient nul; et la formule montre ainsi qu'il n'existe pas de terme au delà du $(m+1)^{\text{ième}}$.

251. Lorsqu'on se propose de former une suite de *termes consécutifs* du développement de $(x+a)^m$, il est facile de les déduire les uns des autres, en se fondant sur la formule

$$(x+a)^m=x^m+\frac{m}{1}ax^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.\;2}a^2x^{m-2}+\ldots\frac{m(m-1)(m-2)..(m-n+1)}{1.\;2.\;\;3.\ldots\ldots.n}a^nx^{m-n}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\;2.\;\;3.\ldots\;n.}\frac{(m-n)}{(n+1)}a^{n+1}x^{m-n-1}+\text{etc};$$

car il en résulte que *si on multiplie le coefficient* $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\;.\;2\ldots\ldots\;n}$ *d'un terme quelconque par l'exposant* $(m-n)$ *de la lettre* x *dans ce terme, et si l'on divise le produit par l'exposant de* a, *augmenté d'une unité, on obtient le coefficient du terme suivant.* Quant aux lettres, il est clair qu'en passant d'un terme au suivant, *on doit augmenter d'une unité l'exposant de* a, *et diminuer d'une unité l'exposant de* x.

Ainsi, pour $(x+a)^4$, le premier terme étant $x^4=1\times a^0x^4$, le second terme est $\frac{1\times4}{0+1}a^1x^3=4a^1x^3$; le troisième terme est $\frac{4\times3}{1+1}a^2x^2=6a^2x^2$; le quatrième terme est $\frac{6\times2}{2+1}a^3x^1=4a^3x$; enfin, le cinquième terme est $\frac{4\times1}{3+1}a^4x^0=a^4$. De là

$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4.$$

252. *Dans le développement de* $(x+a)^m$, *les termes également éloignés des extrêmes ont des coefficients égaux.*

Ce principe, déjà établi n° 245, peut se déduire encore des considérations qui ont servi (n° 249) à démontrer la formule de Newton.

Le terme qui en a n avant lui, et le terme qui en a n après lui, sont deux termes également éloignés des extrêmes. Or le développement de $(x+a)^m$ étant composé de $m+1$ termes, le terme qui en a n après lui, en a $m-n$ avant lui. Ainsi, les termes T_{n+1} et T_{m-n+1} représentent deux termes également distants des extrêmes; et l'on sait que les coefficients de ces termes sont égaux aux nombres de combinaisons qu'on peut former avec m lettres prises n à n, et $m-n$ à $m-n$. Donc, ces deux nombres de combinaisons étant égaux (n° 242), les coefficients dont il s'agit sont égaux.

253. Dans le développement de $(x+a)^m$, *à partir du coefficient du premier terme, le coefficient d'un terme est moindre que le coefficient du terme suivant, tant que le rang du terme* T_{n+1} *auquel on est parvenu, est marqué par un nombre moindre que la moitié du nombre total des termes de ce développement.*

En effet, le nombre total des termes du développement est $m+1$; et l'on a la formule

$$T_{n+2}=T_{n+1}\times\left(\frac{m-n}{n+1}\right) \text{ (n° 251).}$$

Lorsqu'on suppose $n+1<\frac{m+1}{2}$, on en déduit les inégalités

$$2n+1<m;\ m-n>n+1 \quad \text{et} \quad \frac{m-n}{n+1}>1.$$

Donc, puisqu'on obtient le coefficient du $(n+2)^{\text{ième}}$ terme en multipliant le coefficient du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme par un nombre $\frac{m-n}{n+1}$, qui est plus grand que l'unité, le coefficient du $(n+2)^{\text{ième}}$ terme est plus grand que celui du terme qui précède.

Lorsqu'on suppose $n+1>\frac{m+1}{2}$, on en déduit $\frac{m-n}{n+1}<1$. Alors le coefficient du $(n+2)^{\text{ième}}$ terme est moindre que le coefficient du terme qui précède.

Enfin, si l'on a $n+1=\frac{m+1}{2}$ (ce qui exige que m soit impair), on en déduit $\frac{m-n}{n+1}=1$. Alors les termes consécutifs T_{n+1}, T_{n+2} ont des coefficients égaux entre eux, et plus grands que les cofficients des autres termes.

254. *La somme de tous les coefficients du développement de* $(x+a)^m$ *est égale à* 2^m.

Pour s'en assurer, il suffit de faire $x=1$, $a=1$ dans la formule

$$(x+a)^m=1.x^m+\frac{m}{1}ax^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}a^2x^{m-2}+\text{etc.} \qquad (1)$$

255. Si, dans le développement de $(x+a)^m$, on remplace a par $-a$, les termes de rang impair n'éprouvent aucun changement, parce qu'ils sont affectés des puissances paires de a (nº 64); les termes de rang pair changent de signe, parce qu'ils sont affectés des puissances impaires de a (nº 64); de sorte qu'on a

$$(x-a)^m=x^m-\frac{m}{1}ax^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}a^2x^{m-2}-\ldots\ldots\pm a^m. \ (2)$$

Le dernier terme est affecté du signe + ou du signe —, selon que m est pair ou impair.

256. *La somme des coefficients des termes de rang impair, et la somme des coefficients de rang pair dans le développement de* $(x\pm a)^m$, *sont égales à* 2^{m-1}.

Car si l'on fait $x=1$, $a=1$ dans la formule (2), il vient

$$0=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}+\text{etc.},$$

ou bien

$$1+\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}+\text{etc.}=\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}+\text{etc.};$$

ce qui prouve que la somme des coefficients de rang impair est égale à la somme des coefficients de rang pair. Par conséquent, chacune de ces deux sommes étant la moitié de la *somme de tous les coefficients* du développement, est égale à $\frac{2^m}{2}$, ou à 2^{m-1}.

257. Lorsqu'on applique la formule de Newton au développement de la puissance m d'une expression imaginaire de la forme $a\pm b\sqrt{-1}$, on trouve pour résultat une expression de la forme $A\pm B\sqrt{-1}$.

258. Puissances entières des polynômes. *On peut calculer, au moyen de la formule du binôme de Newton, les puissances des po-*

lynômes. Soit, par exemple, à développer $(a+b+c)^m$. Posons $b+c=x$; d'où

$$(a+b+c)^m=(x+a)^m=x^m+\frac{m}{1}ax^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}+\text{etc.}$$

Dans cette formule, on remplacera

$$x^m=(b+c)^m,\quad x^{m-1}=(b+c)^{m-1},\ \text{etc.},$$

par leurs développements, qui se déduisent de la formule de Newton, et la question sera résolue.

Soit encore à développer $(a+b+c+d)^m$. Posons $b+c+d=y$; d'où

$$(a+b+c+d)^m=(y+a)^m=y^m+may^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}y^{m-2}+\text{etc.}$$

Dans cette formule, on remplacera les puissances de y, ou du trinôme $b+c+d$, par leurs développements, qu'on peut obtenir comme il vient d'être dit, et la question sera résolue.

La méthode consiste à ramener le développement de la puissance du polynôme proposé, à des développements de puissances d'un polynôme qui renferme un terme de moins.

Calcul des radicaux arithmétiques et des exposants fractionnaires.

259. Lorsque le coefficient numérique d'un monôme n'est pas une puissance $m^{\text{ième}}$ exacte d'un autre nombre, ou que l'exposant d'une des lettres n'est pas un multiple de m, la racine $m^{\text{ième}}$ du monôme proposé est une quantité *irrationnelle* que l'on exprime, soit au moyen du signe *radical* $\sqrt[m]{\ }$, soit sous la forme d'une puissance *fractionnaire*. Telle est l'expression $\sqrt[m]{a}$, ou $a^{\frac{1}{m}}$ (nº 244).

La valeur *réelle et positive* d'une racine $m^{\text{ième}}$ s'appelle *valeur numérique absolue*, ou *valeur arithmétique*, ou *détermination arithmétique* de cette racine.

On comprend sous le nom de *déterminations algébriques*, la valeur *réelle et négative* d'une racine, et les *valeurs imaginaires* de cette racine.

Dans ce qui va suivre, nous considérerons seulement les *valeurs arithmétiques* des radicaux.

260. *Les expressions* $\sqrt[m]{a^p}$, $\sqrt[mn]{a^{pn}}$ sont égales; de sorte qu'on a $a^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{pn}{mn}}$.

En effet, soit $\sqrt[m]{a^p} = x$, ou $x^m = a^p$; il en résulte que $(x^m)^n = (a^p)^n$.

Or, $(x^m)^n = x^{mn}$ (*), et $(a^p)^n = a^{pn}$. Par conséquent, $x^{mn} = a^{pn}$.

La quantité x, ou $\sqrt[m]{a^p}$, est donc la racine du degré mn de la quantité a^{pn}.

Ainsi, *on ne change pas la valeur arithmétique d'un radical, lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise par un même nombre l'indice du radical, et l'exposant de la quantité placée sous le radical.* Par suite, *on ne change pas la valeur d'une puissance fractionnaire d'une quantité, lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise par un même nombre les deux termes de l'*EXPOSANT FRACTIONNAIRE.

261. *Des radicaux affectés d'indices différents peuvent toujours être transformés en radicaux affectés d'un même indice;* et, en d'autres termes, *on peut toujours réduire au même dénominateur les exposants de plusieurs puissances fractionnaires.*

Soient, par exemple, les radicaux $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[p]{b}$, $\sqrt[q]{c}$, ou les puissances fractionnaires $a^{\frac{1}{m}}$, $b^{\frac{1}{p}}$, $c^{\frac{1}{q}}$.

On a $\sqrt[m]{a} = \sqrt[mpq]{a^{pq}}$; $\sqrt[p]{b} = \sqrt[mpq]{b^{mq}}$; $\sqrt[q]{c} = \sqrt[mpq]{c^{mp}}$;

ou bien $a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{pq}{mpq}}$; $b^{\frac{1}{p}} = b^{\frac{mq}{mpq}}$; $c^{\frac{1}{q}} = c^{\frac{mq}{mpq}}$.

Les radicaux pouvant toujours être ramenés à un indice commun, il s'ensuit que les transformations qui seront démontrées pour les radicaux de *même indice*, pourront s'étendre aux autres radicaux, en concevant ceux-ci remplacés par des radicaux équivalents, et dont les indices soient égaux entre eux.

262. *La racine entière* m *d'un produit de plusieurs facteurs, est égale au produit des racines* m *des facteurs;* et *la puissance frac-*

(*) La règle donnée au n° 243 peut s'appliquer aux quantités irrationnelles. Car, pour démontrer cette règle, il suffit de s'appuyer sur le principe que nous avons établi au n° 170.

tionnaire $\frac{1}{m}$ d'un produit de plusieurs facteurs, a, b, c, *est égale au produit des puissances $\frac{1}{m}$ de ces facteurs.*

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Je dis qu'on a l'égalité} & \sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{abc}\\ \text{ou} & a^{\frac{1}{m}}\times b^{\frac{1}{m}}\times c^{\frac{1}{m}}=(abc)^{\frac{1}{m}}\end{array}\right\}\quad(1)$$

En effet, soit $x=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}$. On en déduit (n° 243)

$$x^m=\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\times\left(\sqrt[m]{b}\right)^m\times\left(\sqrt[m]{c}\right)^m,\ \text{ou}\ x^m=abc.$$

La quantité x, ou $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}$ est donc la racine $m^{ième}$ du produit abc.

263. *Les radicaux* $\sqrt[m]{a^m b}$ et $a\sqrt[m]{b}$ *sont égaux*. On a en effet

$$\sqrt[m]{a^m b}=\sqrt[m]{a^m}\times\sqrt[m]{b}=a\sqrt[m]{b}.$$

On en conclut 1° qu'on peut supprimer sous le signe $\sqrt[m]{\ }$ un facteur a^m, pourvu qu'on écrive le facteur a hors du signe radical : on dit alors qu'*on a fait sortir du radical le facteur* a^m;

2° Qu'on peut supprimer un facteur rationnel a qui est hors du signe $\sqrt[m]{\ }$, pourvu qu'on multiplie la quantité qui est sous le signe radical par la quantité a^m: on dit alors qu'*on a fait entrer ce facteur sous le radical*

264. *Les exposants des facteurs placés sous le signe radical peuvent toujours devenir moindres que l'indice.* Soit, par exemple, $n>m$ dans le radical $\sqrt[m]{a^n}$. Divisez n par m, ce qui donne un quotient entier q et un reste $r<m$; de sorte que $n=mq+r$, $a^n=a^{mq}\times a^r=(a^q)^m\times a^r$.

De là $$\sqrt[m]{a^n}=a^q.\sqrt[m]{a^r}.$$

Pour simplifier un radical, après avoir ramené les exposants des facteurs sous le signe radical à être moindres que l'indice, divisez tous ces exposants et l'indice par leur plus grand commun diviseur; ce qui ne change pas la valeur arithmétique du radical (n° 260).

Ainsi, par exemple, le radical $\sqrt[12]{a^{18}b^3c^{33}}$ se réduira d'abord à $ac^2.\sqrt[12]{a^6b^3c^9}$, et ensuite à $ac^2.\sqrt[4]{a^2bc^3}$.

265. Lorsqu'on veut *réduire plusieurs radicaux au même indice*, on simplifie d'abord chaque radical, comme il a été expliqué (n° 264) ; et l'on choisit pour indice commun le plus petit multiple des indices proposés.

Soient, par exemple, les quantités

$$\sqrt[3]{a^2},\ \sqrt[4]{b^3},\ \sqrt[6]{c^5},\quad \text{ou}\quad a^{\frac{2}{3}},\ b^{\frac{3}{4}},\ c^{\frac{5}{6}}.$$

Le plus petit multiple des indices est 12. On aura

$$\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3.4]{a^{2.4}}=\sqrt[12]{a^8};\ \sqrt[4]{b^3}=\sqrt[4.3]{b^{3.3}}=\sqrt[12]{b^9};\ \sqrt[6]{c^5}=\sqrt[6.2]{c^{5.2}}=\sqrt[12]{c^{10}};$$

ou bien $$a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{8}{12}},\ b^{\frac{3}{4}}=b^{\frac{9}{12}},\ c^{\frac{5}{6}}=c^{\frac{10}{12}}.$$

On voit que ce calcul revient à *réduire les exposants fractionnaires au plus petit dénominateur commun.*

266. On dit que *des radicaux sont* SEMBLABLES, lorsque l'indice étant le même, la quantité placée sous chaque signe radical est aussi la même ; de sorte que les radicaux proposés ne diffèrent que par des facteurs rationnels.

Il peut arriver que des radicaux, dissemblables en apparence, soient ramenés à être semblables lorsqu'ils ont été simplifiés.

Soient, par exemple, les radicaux

$$\sqrt[12]{a^{18}b^3c^{33}}\quad \text{et}\quad \sqrt[8]{256a^4b^{10}c^6},$$

qui diffèrent par leurs indices et par les quantités placées sous le signe radical.

Le premier se réduit à $ac^2\sqrt[4]{a^2bc^3}$.

Quant au second, l'on trouve que $256=16^2=4^4=2^8$; ainsi, il se réduit à $2b\sqrt[8]{a^4b^2c^6}=2b.\sqrt[4]{a^2bc^3}$. Par conséquent, après la simplification, les radicaux proposés sont semblables.

Il est clair que, dans un polynôme, *tous les termes qui sont formés de quantités radicales semblables se réduisent en un seul terme, qu'on obtient en multipliant par le radical commun*, la somme algébrique des facteurs rationnels.

267. Addition et soustraction. Après avoir simplifié chacun des radicaux proposés, l'on forme la *somme* ou la *différence* des quantités proposées, comme il a été prescrit (nos 6 et 7); puis l'on opère, s'il y a lieu, la réduction des radicaux semblables.

268. Multiplication. *Pour former le produit de plusieurs radicaux, réduisez-les d'abord au même indice; faites alors le produit des quantités placées sous les signes radicaux, et affectez ce produit du radical commun.*

On a en effet établi (n° 262) que

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{abc}.$$

269. Division. *Pour former le quotient d'une quantité radicale, divisée par une autre quantité radicale, réduisez d'abord les deux radicaux au même indice; divisez alors l'une par l'autre les quantités placées sous les radicaux, et affectez le quotient du radical commun.*

Je dis qu'on a $$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

En effet, soit $x=\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, d'où $x^m=\left(\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m=\dfrac{\left(\sqrt[m]{a}\right)^m}{\left(\sqrt[m]{b}\right)^m}$. (*)

Il en résulte que $x^m=\frac{a}{b}$, c'est-à-dire que x, ou $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ est la racine $m^{ième}$ du quotient $\frac{a}{b}$.

270. Puissances *d'un radical. Pour élever un radical à une puissance entière déterminée, il suffit d'élever à cette puissance la quantité placée sous le radical.*

Je dis qu'on a $$\left(\sqrt[m]{a}\right)^p=\sqrt[m]{a^p}.$$

(*) La règle établie au n. 243 peut s'appliquer aux fractions dont les termes sont des quantités irrationnelles (*voy.* n. 170).

Ce principe est une conséquence de la règle de multiplication (n° 268) ; mais, pour le démontrer directement, soit $\sqrt[m]{a}=x$, ou $x^m=a$. On en déduit $(x^m)^p=a^p$.

Or, $(x^m)^p=x^{mp}=x^{p \cdot m}=(x^p)^m$. Donc $(x^p)^m=a^p$, et par suite $x^p=\sqrt[m]{a^p}$, ou bien $\left(\sqrt[m]{a}\right)^p=\sqrt[m]{a^p}$.

Remarquez que, *si l'indice* m *du radical est divisible par l'exposant* p *de la puissance qu'on veut former, il suffit pour obtenir cette puissance de diviser l'indice par l'exposant*, sans changer la quantité placée sous le radical.

En effet, si le quotient $\frac{m}{p}$ est un nombre entier q, d'où $m=pq$, il s'ensuit que

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^p=\sqrt[m]{a^p}=\sqrt[pq]{a^p}=\sqrt[q]{a} \quad \text{(n° 260).}$$

Par conséquent $$\left(\sqrt[m]{a}\right)^p=\sqrt[\frac{m}{p}]{a}.$$

271. Racine *d'une quantité radicale. Pour extraire la racine d'un degré déterminé* m *d'une quantité radicale* $\sqrt[p]{a}$, *il suffit de multiplier l'indice du radical donné par le degré de la racine à extraire.* On a $\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[mp]{a}$.

En effet, soit $\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}=x$, ou $x^m=\sqrt[p]{a}$. On en déduit $(x^m)^p=a$ et $x^{mp}=a$; par conséquent $x=\sqrt[mp]{a}$, o $\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[mp]{a}$.

Remarquez que, *si la quantité soumise au radical est affectée d'un exposant divisible par l'indice de la racine à extraire, il suffit de diviser cet exposant par l'indice de la racine.*

Ainsi l'on a $$\sqrt[m]{\sqrt[p]{a^{mq}}}=\sqrt[mp]{a^{mq}}=\sqrt[p]{a^q}.$$

272. Produit *de puissances fractionnaires. La règle de la* multi-

PLICATION *des monômes* (nº 8) *s'étend au cas des exposants* FRACTIONNAIRES, parce qu'on a encore $a^{\alpha}\times a^{\alpha'}=a^{\alpha+\alpha'}$, lorsque les exposants α, α' sont fractionnaires.

On a en effet

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\times\sqrt[nq]{a^{pn}}$$
$$=\sqrt[nq]{a^{mq}\times a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq+pn}}$$
$$=a^{\frac{mq+pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

273. QUOTIENT *de puissances fractionnaires. La règle de la* DIVISION *des monômes* (nº 28) *s'étend au cas des exposants* FRACTIONNAIRES, parce qu'on a encore $\frac{a^{\alpha}}{a^{\alpha'}}=a^{\alpha-\alpha'}$, lorsque les exposants α, α' sont fractionnaires.

On a en effet

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}}=\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}}=\frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{pn}}}=\sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{pn}}}$$
$$=\sqrt[nq]{a^{mq-pn}}=a^{\frac{mq-pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

274. PUISSANCES *d'une puissance fractionnaire. La règle d'après laquelle on élève un monôme à une* PUISSANCE *désignée* (nº 243), *s'étend au cas des exposants fractionnaires*, parce qu'on a encore $(a^{\alpha})^{\alpha'}=a^{\alpha\times\alpha'}$, lorsque les exposants α, α' sont fractionnaires.

On a en effet $\qquad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p}=\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}}$$
$$=\sqrt[nq]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{nq}}=a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}}.$$

275. RACINE *d'une puissance fractionnaire. On extrait la racine du degré* m *d'une puissance fractionnaire* $a^{\frac{p}{q}}$, *en divisant l'exposant* $\frac{p}{q}$ *par l'indice* m *de la racine.*

On a en effet

$$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}\,;\quad \sqrt[m]{a^{\frac{p}{q}}}=\sqrt[m]{\sqrt[q]{a^p}}=\sqrt[mq]{a^p}=a^{\frac{p}{mq}}=a^{\frac{p}{q}:m}.$$

276. Indice fractionnaire. Soit $a^{\frac{m}{n}}=b$. La quantité a, qui doit être élevée à la puissance $\frac{m}{n}$ pour reproduire b, peut être appelée *la racine du degré* $\frac{m}{n}$ *de la quantité* b; c'est-à-dire que la définition des *racines* peut être étendue au cas où l'*indice* $\frac{m}{n}$ est fractionnaire.

On écrira $a=\sqrt[\frac{m}{n}]{b}$.

On a alors $a^{\frac{m}{n}\times\alpha}=b^{\alpha}$, d'où $a=\sqrt[\frac{m}{n}\times\alpha]{b^{\alpha}}$; de sorte que $\sqrt[\frac{m}{n}]{b}=\sqrt[\frac{m}{n}\times\alpha]{b^{\alpha}}$; c'est-à-dire que le principe établi (nº 260) pour le radical dont l'indice est un nombre entier, subsiste pour un radical dont l'indice est fractionnaire. En général, *les règles du calcul des radicaux peuvent être étendues au cas où les indices sont fractionnaires.*

277. *Exposant fractionnaire* négatif. Soit $\frac{a^{\alpha}}{a^{\alpha'}}$, un quotient dans lequel les exposants α, α' sont fractionnaires. Supposons qu'on ait $\alpha'>\alpha$, et $\alpha'=\alpha+\delta$.

Si l'on veut appliquer la règle de la division (nº 273), il viendra $\frac{a^{\alpha}}{a^{\alpha'}}=a^{\alpha-\alpha'}=a^{-\delta}$; c'est-à-dire qu'on aura une *puissance fractionnaire négative.*

D'un autre côté, le quotient $\frac{a^{\alpha}}{a^{\alpha'}}$ est égal à $1:\frac{a^{\alpha'}}{a^{\alpha}}=\frac{1}{a^{\alpha'-\alpha}}=\frac{1}{a^{\delta}}$.

On est donc conduit à faire, pour l'exposant *fractionnaire négatif*, la même convention que pour l'exposant entier négatif (nº 70); c'est-à-dire que *le symbole algébrique* $a^{-\frac{r}{s}}$ *constitue, par convention, une manière d'écrire la fraction* $1:a^{\frac{r}{s}}$.

On peut s'assurer que *les règles du calcul des exposants fractionnaires positifs s'étendent au cas des exposants fractionnaires négatifs.*

Somme des puissances semblables des termes d'une progression.

278. Progressions par quotient. *Si l'on élève à une même puissance tous les termes d'une progression par quotient, la suite des résultats ainsi obtenus forme une nouvelle progression par quotient*, de sorte que *la somme des puissances semblables des termes d'une progression par quotient s'obtient au moyen de la règle déjà établie* (nº 234).

En effet, soit la progression

$$\div a : aq : aq^2 : \ldots : aq^{n-1}; \qquad (1)$$

lorsqu'on élève chaque terme à la puissance du degré m, on obtient les résultats

$$a^m,\ a^m \times q^m,\ a^m \times q^{2m}, \ldots a^m \times q^{(n-1)m},$$

ou bien $$a^m,\ a^m \times q^m,\ a^m \times (q^m)^2, \ldots a^m \times (q^m)^{n-1}; \qquad (2)$$

et ces résultats sont évidemment les termes d'une progression par quotient dont le premier terme est a^m, et dont la raison est q^m.

Par conséquent, si nous désignons par S_m la somme des termes de la progression (2), nous aurons (nº 234).

$$S_m = \frac{a^m(q^{mn}-1)}{q^m-1}.$$

Cette formule comprend, comme cas particulier, la formule $S_1 = \dfrac{a(q^n-1)}{q-1}$. Quant à la somme S_0 des puissances *zéro* des termes de la progression (1), on a

$$S_0 = a^0 + (aq)^0 + \ldots + (aq^{n-1})^0 = 1 + 1 + \ldots + 1 = n.$$

279. Progressions par différence. Si l'on veut *obtenir la* somme *des puissances semblables des termes d'une progression par différence donnée, sans former la puissance désignée de chaque terme et sans faire l'addition*, il faut pour cela une nouvelle règle, parce que si l'on élève à une même puissance les termes d'une progression arithmétique, on a une suite de nombres qui ne sont plus en progression.

Soit, par exemple, la progression $\div$ 1.2.3.4... n; les carrés des termes sont 1, 4, 9, 16,..., n^2; ces nombres ne forment pas une progression.

Pour la somme S_0 des puissances *zéro* des n termes de la progression

$$\div a.b.c\ldots k.l, \qquad (1)$$

on a évidemment $S_0 = n$.

Pour la somme S_1 des premières puissances, nous savons qu'on a

$$S_1 = \frac{(a+l)n}{2}.$$

Maintenant, nous nous proposons d'exprimer au moyen des sommes connues S_0 et S_1, la somme $S_2 = a^2 + b^2 + \ldots + l^2$. Ensuite il s'agira d'exprimer au moyen des sommes connues S_0, S_1, S_2 la somme $S_3 = a^3 + b^3 + \ldots + l^3$.

En général, nous déterminerons la somme des puissances semblables des termes d'une progression par différence, en supposant connues les sommes des puissances des degrés inférieurs.

280. *Somme des carrés.* Soit r la raison de la progression (1). On a

$$b = a + r,\ c = b + r, \ldots, l = k + r.$$

Donc

$$\begin{aligned} b^3 &= a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3 \\ c^3 &= b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l^3 &= k^3 + 3k^2r + 3kr^2 + r^3; \end{aligned}$$

de plus,

$$(l+r)^3 = l^3 + 3l^2r + 3\,lr^2 + r^3.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, et retranchant les termes b^3, c^3,..., l^3, qui sont communs aux deux sommes résultantes, on obtient l'égalité

$$(l+r)^3 = a^3 + 3r(a^2+b^2+\ldots+l^2) + 3r^2(a+b+\ldots+l) + n \times r^3,$$

ou bien

$$(l+r)^3 = a^3 + 3r \times S_2 + 3r^2 \times S_1 + S_0 \times r^3;$$

d'où l'on déduit

$$S_2 = \frac{(l+r)^3 - a^3}{3r} - rS_1 - \frac{r^2S_0}{3}. \qquad (A)$$

Si l'on considère en particulier la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, 5,..., n, on a

$$a = 1,\ r = 1,\ l = n,\ S_0 = n,\ S_1 = \frac{(n+1)n}{2};$$

et par suite la formule (A) donne

$$S_2 = \frac{1}{3}\left\{(n+1)^3 - 1 - n - 3 \times \frac{(n+1)n}{2}\right\},$$

$$S^2 = \left(\frac{n+1}{3}\right)\left\{(n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2}\right\},$$

et enfin $$S_2 = \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\,\frac{(2n+1)}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Par exemple, la somme des carrés des dix premiers nombres est égale à $\frac{10.11.21}{6} = 385$.

281. *Somme des cubes.* Que l'on développe les quatrièmes puissances des quantités

$$b = a + r,\ c = b + r, \ldots,\ l = k + r,\ \text{ et }\ l + r;$$

qu'on ajoute, comme précédemment, les n égalités résultantes, et qu'on supprime les termes communs $b^4, c^4, \ldots, l^4$; on obtient

$$(l+r)^4 = a^4 + 4rS_3 + 6r^2S_2 + 4r^3S_1 + n \times r^4,$$

d'où l'on déduit

$$S_3 = \frac{(l+r)^4 - a^4}{4r} - \frac{3}{2}rS_2 - r^2S_1 - \frac{r^3S_0}{4}. \tag{B}$$

Si l'on considère en particulier la suite des nombres naturels $1, 2, 3, \ldots, n$, la formule (B) donne

$$S_3 = \frac{1}{4}\left\{(n+1)^4 - 1 - n - 6S_2 - 4S_1\right\},$$

$$S_3 = \left(\frac{n+1}{4}\right)\left\{(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\right\},$$

et enfin $$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = (S_1)^2;$$

de sorte que *la somme des cubes des nombres naturels est égale au carré de la somme de ces mêmes nombres.*

Par exemple, la somme des dix premiers nombres est $\frac{10.11}{2} = 55$; par suite, la somme des cubes des dix premiers nombres est 55^2 ou 3025.

282. *La somme* S_m *des* m[ièmes] *puissances des termes d'une progression arithmétique dont la raison est* r, *et dont les extrêmes sont* a *et* l, *est déterminée par la formule suivante* (*) :

(*) Nous adoptons ici la formule et la démonstration données par M. *Lionnet*, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (année 1842, p. 175).

$$S_m = \frac{(l+r)^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)r} - \frac{m}{2} r S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2.\ 3} r^2 S_{m-2} - \ldots - r^{m-1} S_1 - \frac{r^m S_0}{m+1}. \quad (M)$$

Pour le prouver, développez, par la formule de Newton (nº 247), les puissances du degré $(m+1)$ des quantités

$$b = a + r,\ c = b + r, \ldots\ l = k + r, \text{ et } l + r\,;$$

ajoutez, comme précédemment, les n égalités résultantes, et supprimez les termes communs $b^{m+1}, c^{m+1}, \ldots\ l^{m+1}$. Vous obtiendrez ainsi

$$(l+r)^{m+1} = a^{m+1} + \frac{(m+1)}{1} r S_m + \frac{(m+1)m}{1.\ 2} r^2 S_{m-1} + \ldots + \frac{(m+1)}{1} r^m S_1 + r^{m+1} \times n\,;$$

d'où l'on déduit la formule (M).

Si, dans cette formule générale, on suppose successivement $m = 0, 1, 2, 3, 4$, etc., on retrouvera d'abord les valeurs déjà obtenues pour S_0, S_1, S_2, S_3. Ces valeurs serviront ensuite à déterminer S_4 ; et en continuant ainsi, on pourra calculer la somme des puissances d'un degré aussi élevé qu'on le voudra.

Lorsque l'on considère en particulier la suite des nombres naturels, $1, 2, 3, \ldots, n$, la formule (M) donne

$$S_m = \frac{(n+1)^{m+1} - 1}{m+1} - \frac{m}{2} S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2\ .\ 3} S_{m-2} - \ldots - S_1 - \frac{S_0}{m+1}.$$

Nombres figurés.

283. Soit la progression arithmétique

$$\div 1.(1+r).(1+2r) \ldots 1 + (n-1)r, \qquad (1)$$

dont le premier terme est égal à l'unité et dont la raison est un nombre entier quelconque.

On donne le nom de *nombres figurés* aux nombres entiers qu'on obtient en prenant le premier terme, la somme des 2 premiers termes, la somme des 3 premiers termes,..., la somme des n premiers termes de la suite (1), ce qui forme une nouvelle suite de n nombres

$$1,\ 2+r,\ 3+3r,\ 4+6r,\ \ldots\ (2+(n-1)r)\frac{n}{2}\,; \qquad (2)$$

puis en prenant encore le premier terme, la somme des 2 premiers termes, la somme des n premiers termes de la suite (2), ce qui forme une nouvelle suite de nombres

$$1,\ 3+r,\ 6+4r,\ \text{etc.}; \qquad (3)$$

et ainsi de suite.

Les termes de la progression (1) forment le *premier ordre* des nombres figurés ; les termes de la suite (2) forment le *deuxième ordre ;* ceux de la suite (3), le *troisième ordre,* et ainsi de suite.

Si l'on suppose d'abord $r=0$, la progression (1) se réduit à une suite de termes tous égaux à 1. On donne à cette suite de termes égaux le nom de *nombres constants.*

Lorsqu'on suppose $r=1$, on a la progression

$$\div 1 . 2 . 3 . 4 \ldots n;$$

les termes de cette progression, et tous les nombres figurés qu'on en peut déduire, forment la *première classe* des nombres figurés (*).

Lorsqu'on suppose $r=2$, on a la progression

$$\div 1 . 3 . 5 . 7 \ldots 2n-1;$$

les termes de cette progression, ainsi que tous les nombres figurés qu'on en peut déduire, composent la *deuxième classe;* et ainsi de suite.

284. *Nombres du deuxième ordre. Dans la première classe*, les nombres du deuxième ordre se déduisent de la suite des nombres naturels $\div 1 . 2 . 3 . 4 \ldots n$; ils forment la suite $1, 3, 6, 10, \ldots \frac{(n+1)n}{2}$. On les appelle *nombres triangulaires.*

Si l'on désigne par t la valeur du $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, on a

$$t=\frac{n(n+1)}{2},\ \text{ou}\ t=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}.\ \text{De là}\ n=\frac{-1+\sqrt{8t+1}}{2}.$$

Ainsi, pour qu'un nombre entier donné, t, soit un *nombre triangulaire*, il faut que le nombre $8t+1$ soit un carré. Cette condition suffit; car, si le nombre impair $8t+1$ est un carré, sa racine est un nombre

---

(*) Si l'on développe les puissances successives d'un binôme (n° 246), on reconnaîtra que, *pour le premier terme, les coefficients sont les* NOMBRES CONSTANTS, placés sur la première ligne du *triangle arithmétique de Pascal* (p. 441) ; et que, *pour tous les autres termes des puissances développées du binôme, les coefficients sont les* NOMBRES FIGURÉS *de la première classe.*

Si l'on considère la suite des termes qui occupent le *même rang*, $(n+1)^{\text{ième}}$, dans ces puissances successives, et qui sont précédés de n termes, on trouve que leurs coefficients forment la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne horizontale du *triangle arithmétique*, et ces coefficients sont les *nombres figurés du* $n^{\text{ième}}$ *ordre* dans la première classe.

impair, $2\alpha+1$; et l'on obtient pour n une valeur entière et positive, α.

Dans la deuxième classe, les nombres du deuxième ordre se déduisent de la suite des nombres impairs

$$\div 1 . 3 . 5 . 7 \ldots 2n-1;$$

ils forment la suite des nombres quadrangulaires, ou *nombres carrés*

$$1, 4, 9, 16 \ldots n^2.$$

Dans la troisième classe, tout nombre du deuxième ordre est compris dans la formule $p=\frac{(2+(n-1)\times 3)n}{2}$, ou $p=\frac{(3n-1)n}{2}$, et il est appelé *nombre pentagone*.

En général, les nombres du *deuxième ordre*, dans toutes les classes, s'appellent *nombres* POLYGONES (*). Ils sont compris dans la formule $P=\frac{(2+(n-1)r)n}{2}$ ou $P=\frac{r}{2}n^2-\frac{(r-2)}{2}n$.

285. *Nombres du troisième ordre.* Les nombres du troisième ordre, dans toutes les classes, s'appellent encore *nombres* PYRAMIDAUX. Dans la première classe, ils se nomment *pyramidaux triangulaires*, et dans la deuxième classe, *pyramidaux quadrangulaires*.

Dans la première classe, le $n^{ième}$ nombre pyramidal, T, est la somme des n premiers nombres triangulaires. Or, tout nombre triangulaire étant compris dans la formule $t=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$, on obtiendra la suite des nombres triangulaires, si l'on y remplace successivement la lettre n par les nombres 1, 2, 3, 4, etc. On a donc

$$T=\frac{1^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3^2}{2}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

ou bien $$T=\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{2}+\frac{1+2+3+\ldots+n}{2}=\frac{S_2}{2}+\frac{S_1}{2}.$$

Substituant à S_1, S_2, leurs valeurs (nº 280), on obtient

$$T=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3\;.\;4}+\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n+1)}{12}(2n+4)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Dans la deuxième classe, le $n^{ième}$ nombre pyramidal, Q, est la somme des n premiers nombres carrés. On a donc

$$Q=S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(*) Le motif qui fait donner cette dénomination aux nombres figurés du deuxième ordre, est expliqué dans l'algèbre d'*Euler*.

Piles de boulets.

286. Concevons que des boulets de même calibre aient été disposés de manière à former une assise horizontale en se touchant les uns les autres: on pourra former une seconde assise en plaçant de nouveaux boulets au-dessus des vides de la première. En continuant ainsi, on composera une *pile de boulets.*

1° Si la base de la pile est un triangle équilatéral, et si les assises sont superposées jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un seul boulet au sommet de la pyramide, on aura une *pile triangulaire*, dont il est facile de calculer le nombre de boulets en déterminant le nombre n des boulets qui forment le côté de la base.

En effet, la première assise supérieure qui forme le sommet contient 1 boulet; la deuxième assise, placée immédiatement au-dessous du sommet, a la forme d'un triangle dont le côté contient 2 boulets; cette deuxième assise contient $1+2$ boulets; la troisième assise triangulaire a 3 boulets sur son côté, et contient $1+2+3$ boulets; enfin, la $n^{ième}$ assise, c'est-à-dire la base, a n boulets sur son côté, et contient

$$1+2+3+4\ldots+n \text{ boulets.}$$

Il en résulte que le nombre des boulets contenus dans chaque assise horizontale est un *nombre triangulaire* (n° 284), et que le nombre T des boulets composant la pile est la somme des n premiers nombres triangulaires. Par conséquent, on a

$$T=\frac{1}{6}\,n(n+1)(n+2).$$

2° Si la base de la pile est un carré, et si les assises sont superposées jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un seul boulet au sommet de la pyramide, on aura une *pile quadrangulaire*. Dans chaque assise horizontale, le nombre des boulets sera un *nombre carré*, et le nombre Q des boulets composant la pile sera la somme des n premiers nombres carrés, en supposant que le côté de la base contienne n boulets. Par conséquent, on aura

$$Q=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}.$$

3° Si la base de la pile est un rectangle, et si les assises sont superposées jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'une seule file de boulets à l'assise supérieure, on aura une *pile rectangulaire*, dont on calculera facilement le nombre de boulets, en déterminant le nombre total n

des assises, et le nombre $a+1$ des boulets de la file supérieure, ou bien encore, en déterminant le nombre des boulets contenus dans chacun des côtés de la base rectangle de la pile.

En effet, la première assise contient $a+1$ boulets;

La deuxième assise, formée de 2 files, contenant chacune $a+2$ boulets, renferme $2(a+2)$ boulets;

La troisième assise, formée de 3 files, contenant chacune $a+3$ boulets, renferme $3(a+3)$ boulets;

Enfin la $n^{ième}$ assise, formée de n files, contenant chacune $a+n$ boulets, renferme $n(a+n)$ boulets.

Si donc on désigne par R le nombre total des boulets, on a

$$R = a+2a+3a+\ldots+na+1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$
$$R = a(1+2+3+\ldots+n)+S_2 = aS_1+S_2.$$

Or, $$S_1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n(n+1)}{6},\quad S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Par conséquent $$R = \frac{n(n+1)}{6}(3a+2n+1). \qquad (1)$$

Remarquez que le nombre n, qui désigne le nombre des assises, exprime aussi le nombre des boulets du plus petit côté de la base. Car la première assise, qui n'a qu'une file, se termine par 1 boulet; le petit côté de la deuxième assise a 2 boulets; le petit côté de la troisième assise contient 3 boulets, et ainsi de suite.

D'ailleurs, la première file ayant $a+1$ boulets, le grand côté de la deuxième assise, contient $a+2$ boulets; le grand côté de la troisième assise contient $a+3$ boulets, et le grand côté de la $n^{ième}$ assise ou de la base, contient $a+n$ boulets. Soit donc $a+n=A$, d'où $a=A-n$, et $3a=3A-3n$. En remplaçant $3a$ par cette valeur dans la formule (1), on aura

$$R = \frac{n(n+1)}{6}(3A-n+1). \qquad (2)$$

C'est le nombre des boulets de la pile, exprimé en fonction des nombres de boulets A; n, contenus dans les deux côtés de la base de cette pile.

287. *Piles tronquées*. Lorsqu'une pile de boulets se termine par une assise supérieure qui contient plusieurs files, on la nomme *pile tronquée*, parce qu'elle peut être considérée comme provenant d'une pile complète dont on aurait retranché, à partir du faite, un certain nombres d'assises composant une pile complète partielle.

Il est clair que le nombre des boulets d'une pile tronquée s'obtiendra par une soustraction, lorsqu'on aura calculé les nombres de boulets des deux piles complètes dont elle est la différence.

288. PROBLÈME. *On propose de disposer en pile triangulaire, si cela est possible, un nombre donné de boulets* (*).

Il s'agit de trouver le nombre n des boulets formant le côté de la base de la pile triangulaire qui contiendrait le nombre de boulets donné, T.

Si le problème est possible, le nombre cherché n sera entier, et, en vertu de la formule

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\mathrm{T} \text{ (n° 285), ou } n(n+1)(n+2)=6\mathrm{T},$$

le nombre n devra satisfaire à l'équation

$$n^3+3n^2+2n=6\mathrm{T}.$$

Or, on a

$$n^3<n^3+3n^2+2n, \quad \text{ou} \quad n^3<6\mathrm{T},$$

et

$$n^3+3n^2+2n<n^3+3n^2+3n+1, \quad \text{ou} \quad 6\mathrm{T}<(n+1)^3.$$

Donc, le nombre 6T devant être compris entre les cubes des nombres entiers consécutifs n et $n+1$, *le nombre* n *doit être la racine du plus grand cube contenu dans le nombre connu* 6T.

En conséquence, pour résoudre le problème, *multipliez par* 6 *le nombre de boulets donné*, T ; *extrayez la racine cubique du résultat* 6T. *Ayant déterminé la racine entière* n, *approchée par défaut à moins d'une unité, faites le produit* $n(n+1)(n+2)$. *Selon que ce produit sera égal à* 6T *ou différent de* 6T, *le problème sera possible ou impossible.*

Lorsque le problème est possible, le nombre n est le nombre des assises de la pile ; il exprime aussi le nombre des boulets dont on doit former le côté de la base.

Premier exemple. Supposons qu'on ait 220 boulets. De là, $220\times 6=1320$. La racine cubique de 1320 est comprise entre 10 et 11 ; d'où $n=10$. Par suite $n(n+1)(n+2)=10\times 11\times 12=1320$.

Le problème est possible. Il y aura 10 boulets sur le côté de la base triangulaire.

Deuxième exemple. Supposons qu'on ait 285 boulets. De là,

(*) En d'autres termes, *un nombre entier* T *étant donné*, *on propose d'assigner le rang que ce nombre occupe parmi les nombres pyramidaux triangulaires*, *ou de reconnaître qu'il n'est pas un nombre pyramidal triangulaire.*

$285 \times 6 = 1710$. La racine cubique de 1710 est comprise entre 11 et 12; d'où $n = 11$. Par suite, $n(n+1)(n+2) = 11 \times 12 \times 13 = 1716$.

Le problème est impossible. La pile triangulaire qui a seulement 10 boulets sur le côté de la base, contient $\frac{10 \times 11 \times 12}{6}$ ou 220 boulets. Il y a donc $285 - 220$ ou 65 boulets qui ne sont pas placés. La pile triangulaire déterminée par la valeur de n, et qui aurait 11 boulets sur le côté de la base, contiendrait $\frac{11 \times 12 \times 13}{6}$ ou 286 boulets, nombre supérieur au nombre de boulets donné.

Troisième exemple. Supposons qu'on ait 221 boulets. De là $221 \times 6 = 1326$. La racine cubique de 1326 est comprise entre 10 et 11 ; d'où $n = 10$. Par suite, $n(n+1)(n+2) = 1320$.

Le problème est impossible. La pile triangulaire déterminée par la valeur de n contient 220 boulets, nombre inférieur au nombre de boulets donné.

289. PROBLÈME. *On propose de disposer en pile quadrangulaire, si cela est possible, un nombre donné de boulets* (*).

Il s'agit de trouver le nombre n des boulets formant le côté de la base de la pile quadrangulaire qui contiendrait le nombre de boulets donné, Q.

Si le problème est possible, le nombre cherché n sera entier ; et en vertu de la formule

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = Q \text{ (n}^{\text{o}}\text{ 285)}, \quad \text{ou} \quad n(n+1)(2n+1) = 6Q,$$

le nombre n devra satisfaire à l'équation

$$2n^3 + 3n^2 + n = 6Q \quad \text{ou} \quad n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = 3Q.$$

Or, on a

$$n^3 < n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n, \quad \text{ou} \quad n^3 < 3Q,$$

et

$$n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n < n^3 + 3n^2 + 3n + 1, \quad \text{ou} \quad 3Q < (n+1)^3.$$

Donc, le nombre 3Q devant être compris entre les cubes des nombres

(*) En d'autres termes, *un nombre entier* Q *étant donné, on propose d'assigner le rang que ce nombre occupe parmi les nombres pyramidaux quadrangulaires, ou de reconnaître qu'il n'est pas un nombre pyramidal quadrangulaire.*

entiers consécutifs n et $n+1$, *le nombre* n *doit être la racine du plus grand cube contenu dans le nombre connu* 3Q.

En conséquence, pour résoudre le problème, *multipliez par 3 le nombre de boulets donné* Q; *extrayez la racine cubique du résultat* 3Q. *Ayant déterminé la racine entière* n, *approchée par défaut à moins d'une unité, faites le produit* $n(n+1)(2n+1)$. *Selon que ce produit sera égal à 6 fois le nombre donné* Q, *ou différent de* 6Q, *le problème sera possible ou impossible.*

Premier exemple. Supposons qu'on ait 385 boulets. De là $385 \times 3 = 1155$. La racine cubique de 1155 est comprise entre 10 et 11, d'où $n = 10$. Par suite, $n(n+1)(2n+1) = 10 \times 11 \times 21 = 2310 = 385 \times 6$.

Le problème est possible. Il y aura 10 boulets sur le côté du carré qui doit former la base.

Deuxième exemple. Supposons qu'on ait 400 boulets. De là $400 \times 3 = 1200$; $400 \times 6 = 2400$. La racine cubique de 1200 est comprise entre 10 et 11, d'où $n = 10$. Par suite, $n(n+1)(2n+1) = 2310$. Le problème est impossible.

La pile quadrangulaire déterminée par la valeur de $n = 10$, contient $\frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$ boulets, nombre inférieur au nombre de boulets donné.

La pile quadrangulaire qui a 11 boulets sur le côté de la base contiendrait $\frac{11.12.23}{6}$ boulets, ou 506 boulets.

Troisième exemple. Supposons qu'on ait 500 boulets. De là $500 \times 3 = 1500$, $500 \times 6 = 3000$. La racine cubique de 1500 est comprise entre 11 et 12, d'où $n = 11$. Par suite, $n(n+1)(2n+1) = 11.12.23 = 3036$. Le problème est impossible.

La pile quadrangulaire déterminée par la valeur de $n = 11$ contient $\frac{11.12.23}{6} = 506$ boulets, nombre supérieur au nombre de boulets donné.

APPENDICE.(*)

Analyse indéterminée du premier degré.

Un problème est, en général, indéterminé, lorsque le nombre des équations auxquelles il conduit est moindre que le nombre des inconnues. La partie de l'algèbre appelée *analyse indéterminée* a pour objet l'examen des conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients des équations, pour que les inconnues admettent des valeurs entières. Elle se propose aussi la recherche de ces valeurs, appelées *solutions entières*. Nous ne parlerons ici que de l'*analyse indéterminée du premier degré.*

Généralités sur l'équation $ax+by=c$.

1. Considérons d'abord l'équation du premier degré à deux inconnues

$$ax+by=c, \tag{1}$$

dans laquelle on peut toujours supposer a, b, c entiers, premiers entre eux, et c positif.

2. *Si les coefficients* a *et* b *ne sont pas premiers entre eux, l'équation* $ax+by=c$ *n'admet aucune solution entière.*

Soit m un facteur commun aux coefficients a et b, de manière que $a=a'm$, $b=b'm$: l'équation (1) pourra se mettre sous la forme $a'x+b'y=\frac{c}{m}$. Or, c n'est pas divisible par m ; donc en remplaçant

(*) Cet appendice est de M. Catalan.

x et y par des valeurs entières, on aurait un nombre entier égal à une fraction.

3. *Si* a *et* b *sont premiers entre eux, l'équation* $ax+by=c$ *admet des solutions entières.*

Supposons d'abord a et b positifs, et $a<b$. L'équation (1), résolue par rapport à x, donne $x=\frac{c-by}{a}$. Or, si l'on divise par a les $a-1$ premiers multiples de b, aucune division ne se fera exactement, et les restes obtenus seront, dans un certain ordre, les nombres $1, 2, 3, \ldots\, a-1$ (*); l'un de ces restes sera donc égal à celui que fournit la division de c par a; et la différence $c-by$ sera divisible par a.

Si le coefficient a, par exemple, était négatif, il suffirait d'observer qu'en changeant x en $-x'$, l'équation $-ax+by=c$ revient à $ax'+by=c$: la proposition énoncée est donc générale.

4. *Si* $x=\alpha$, $y=\beta$ *forment une solution de l'équation* $ax+by=c$, *toutes les solutions sont données par le système des deux formules*

$$x=\alpha-bt,\quad y=\beta+at,$$

t *étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.*

L'équation (1) admettant pour solution $x=\alpha$, $y=\beta$, on a identiquement

$$a\alpha+b\beta=c,$$

d'où, en comparant à la proposée,

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0.$$

Cette relation donne $x-\alpha=-\frac{b(y-\beta)}{a}$.

Or, $x-\alpha$ et $y-\beta$ doivent être entiers, et, par hypothèse, a et b sont premiers entre eux; donc, par un principe connu, $y-\beta$ doit être divisible par a. Soit t le quotient; nous aurons

$$y-\beta=at,\quad \text{d'où}\quad x-\alpha=-bt.$$

5. Il suit de là que *toutes les valeurs de* x *et de* y *satisfaisant à l'équation* $ax+by=c$, *forment deux progressions par différence, dans lesquelles les raisons sont* b *et* $-$a, *ou* $-$b *et* a.

6. Il résulte aussi, de ce qui précède, que *la résolution complète*

(*) *Nouvelles Annales de mathématiques*, tome I, page 460.

de l'équation $\mathrm{ax}+\mathrm{by}=\mathrm{c}$ *se réduit à la recherche d'une seule solution de cette équation.*

Recherche d'une solution de l'équation $\mathrm{ax}+\mathrm{by}=\mathrm{c}$.

7. D'après ce que nous avons vu tout à l'heure, on pourrait trouver une solution entière en résolvant l'équation par rapport à l'inconnue x qui a le plus petit coefficient, et attribuant à y les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots\ a-1$. Ce tâtonnement ne peut être employé que si le coefficient a est fort petit. La méthode suivante est préférable.

8. Soit, pour plus de régularité dans la notation, l'équation

$$ay+bx=\mathrm{A}, \tag{2}$$

et supposons $b<a$.

On déduit, de cette équation, $x=\dfrac{\mathrm{A}-ay}{b}$; ou, en appelant Q, q, B, c les quotients et les restes que fournissent A et a divisés par b,

$$x=\mathrm{Q}-qy+\frac{\mathrm{B}-cy}{b}.$$

Nous voulons que x et y soient entiers : nous devons donc attribuer à y une valeur qui rende entière la quantité $\dfrac{\mathrm{B}-cy}{b}$. Autrement dit, la résolution de l'équation (2) est ramenée à la résolution, en nombres entiers, de

$$\frac{\mathrm{B}-cy}{b}=z,$$

ou de

$$bz+cy=\mathrm{B}, \tag{3}$$

laquelle est plus simple que la proposée; car le coefficient c, reste de la division de a par b, est moindre que b.

Résolvons l'équation (3) par rapport à l'inconnue qui a le plus petit coefficient; nous aurons

$$y=\frac{\mathrm{B}-bz}{c}=\mathrm{Q}'-q'z+\frac{\mathrm{C}-dz}{c},$$

en représentant par Q' et q' les quotients entiers de B et b par c, et par C, d les restes correspondants. Répétant le raisonnement ci-dessus, nous verrons que z doit rendre entière la quantité $\frac{C-dz}{c}$, ou que l'équation (3) se réduit à celle-ci :

$$cr+dz=C, \tag{4}$$

dans laquelle les coefficients c et d sont respectivement moindres que b et c. A son tour, cette dernière équation en entraîne une plus simple qu'elle ; et ainsi de suite.

9. Observons actuellement que les coefficients c, d, e, ... sont les restes successifs que fournirait l'opération du plus grand commun diviseur effectuée sur a et b. Car c est le reste de la division de a par b ; de même, d est le reste de la division de b par c ; etc. Par hypothèse, a et b sont premiers entre eux ; donc l'opération dont il s'agit conduira nécessairement à un dernier reste égal à l'unité. Ainsi, la résolution de l'équation (2) se réduira à celle d'une équation de cette forme

$$u+gv=G,$$

c'est-à-dire dans laquelle le coefficient de l'une des deux inconnues sera l'unité. Or, si l'on attribue à v une valeur entière quelconque, il en résultera pour u une valeur entière ; et, en remontant successivement, on finira par déterminer les valeurs entières correspondantes de x et de y.

10. On peut donner au calcul une marche régulière qui le simplifie considérablement.

Supposons

$$x=\frac{A-ay}{b},\ y=\frac{B-bz}{c},\ z=\frac{C-cr}{d},\ r=\frac{D-ds}{e},\ s=\frac{E-et}{f},$$
$$t=\frac{F-fu}{g},\ u=\frac{G-gv}{h},\ldots \tag{5}$$

Dans ces expressions, les quantités c, d, e, f,... sont, ainsi que nous l'avons déjà dit, les restes successifs fournis par la recherche du plus grand commun diviseur entre a et b : admettons, pour fixer les idées, que le dernier de ces restes, égal a l'unité, soit h.

Relativement aux quantités B, C, D,... la loi de leur composition est fort simple : B est le reste de la division de A par b ; C est le reste de la division de B par c ; etc.

Le calcul de ces divers coefficients s'effectue comme l'indique le tableau ci-après :

$$\frac{a}{\mathrm{A}}\left|\frac{b}{\mathrm{B}}\right|\frac{c}{\mathrm{C}}\left|\frac{d}{\mathrm{D}}\right|\frac{e}{\mathrm{E}}\left|\frac{f}{\mathrm{F}}\right|\frac{g}{\mathrm{G}}\left|\frac{1}{0}\right.$$

La ligne supérieure se forme comme dans l'opération du plus grand commun diviseur. Pour former la seconde ligne, on écrit A sous a, puis l'on divise ce premier terme par b; on obtient ainsi un reste B, que l'on écrit au-dessous de b; etc. En général : *chaque terme de la ligne inférieure est le reste de la division du terme placé à gauche, par le terme placé au-dessus*. Il est visible que le dernier terme, correspondant au diviseur 1, est 0.

Ces deux lignes étant calculées, on détermine les inconnues u, t, s, r, z, y, x en fonction de v, à l'aide des équations (5); c'est-à-dire que :

Chaque inconnue s'obtient en retranchant d'un terme de la seconde ligne, le produit du nombre écrit au-dessus par l'inconnue qu'on vient de déterminer, et divisant le reste par le terme écrit à la droite de ce nombre.

11. Comme application des règles précédentes, prenons l'équation

$$89x+162y=209.$$

$$\frac{162}{209}\left|\frac{89}{31}\right|\frac{73}{31}\left|\frac{16}{15}\right|\frac{9}{6}\left|\frac{7}{6}\right|\frac{2}{0}\left|\frac{1}{0}\right.$$

D'abord, 162 divisé par 89 donne pour reste 73; 89 divisé par 73 donne pour reste 16; etc.

Ensuite, 209 divisé par 89 donne 31 pour reste; 31 divisé par 73 donne encore 31; etc.

Les deux lignes étant formées, nous aurons, en prenant $v=0$:

$$u=\frac{0-2\times 0}{1}=0,\ t=\frac{6-7\times 0}{2}=3,\ s=\frac{6-9\times 3}{7}=-3,$$

$$r=\frac{15+16\times 3}{9}=7,\ z=\frac{31-73\times 7}{16}=-30,\ y=\frac{31+89\times 30}{73}=37,$$

$$x=\frac{209-162\times 37}{89}=-65.$$

L'équation est donc satisfaite par $x=-65$, $y=37$; d'où, en général,

$$x=-65+162\theta,\quad y=37-89\theta.$$

Soit encore l'équation

$$29x-47y=112.$$

Elle donne

-47	29	-18	11	-7	4	-3	1
112	25	7	7	0	0	0	0

Puis,

$$\frac{0+3\times0}{1}=0,\ \frac{0-4\times0}{-3}=0,\ \frac{0+7\times0}{4}=0,\ \frac{7-11\times0}{-7}=-1,$$

$$\frac{7-18\times1}{11}=-1,\ \frac{25+29\times1}{-18}=-3,\ \frac{112-47\times3}{29}=-1;$$

donc

$$x=-1+49\theta,\quad y=-3+29\theta.$$

On peut observer, d'après ce dernier exemple, que si la ligne inférieure est terminée par une suite de zéros, il est bon de commencer le calcul des inconnues à partir du terme qui précède le dernier zéro.

12. Nous venons d'expliquer le procédé le plus commode pour obtenir une solution de l'équation $ax+by=c$. La théorie des fractions continues peut être appliquée à cette recherche. En effet, réduisons $\frac{b}{a}$ en fraction continue, et soit $\frac{b'}{a'}$ l'avant-dernière réduite, nous aurons $ab'-ba'=\pm1$; d'où, en multipliant par $\mp c$:

$$\mp a\,.\,b'c\pm b\,.\,a'c=c.$$

En comparant cette identité à l'équation proposée, on voit que celle-ci sera vérifiée si l'on prend $x=\mp b'c$, $y=\pm a'c$.

Cette méthode a l'inconvénient de donner, pour valeurs particulières de x et de y, des multiples de c, qui peuvent être de grands nombres : l'autre méthode conduit presque toujours à la solution la plus simple.

13. Les divers procédés qui viennent d'être indiqués ne donnent pas les valeurs des inconnues en fonction *explicite* des coefficients a et b. On pourrait se proposer, cependant, de déterminer *immédiatement* des valeurs satisfaisant à une équation proposée : c'est à quoi l'on peut parvenir, dans certains cas, par la méthode suivante, due à M. Binet (*). Supposons que, dans l'équation $ax+by=c$, le

(*) *Journal de l'École polytechnique*, vingtième cahier.

coefficient a soit un nombre premier absolu. Posons $x=cx'$, $y=cy'$; d'où $ax'+by'=1$, puis $x'=-\dfrac{by'-1}{a}$.

Il s'agit de rendre entière la quantité $\dfrac{by'-1}{a}$: or, d'après le théorème de *Fermat* (*), $\dfrac{b^{a-1}-1}{a}$ est un nombre entier. Donc, si nous prenons $y'=b^{a-2}$, la valeur correspondante de x' sera entière ; et nous aurons, généralement,

$$x=-\left(c\,\frac{b^{a-1}-1}{a}+b\theta\right),\ y=cb^{a-2}+a\theta.$$

14. Si les coefficients a et b ne sont premiers ni l'un ni l'autre, mais qu'ils soient seulement premiers entre eux, désignons par k le nombre des entiers inférieurs et premiers à a; la quantité b^k-1 sera divisible par a (**). Donc, en prenant $y'=b^{k-1}$, nous aurons $x'=-\dfrac{b^k-1}{a}$, valeur entière; d'où

$$x=-\left(c\,\frac{b^k-1}{a}+b\theta\right),\ y=cb^{k-1}+a\theta.$$

Résolution, en nombres entiers positifs, de l'équation $ax+by=c$.

15. Dans cette équation, les coefficients a et b peuvent être positifs ou négatifs ; ce qui donne, en mettant les signes en évidence, les trois cas distincts :

$$ax+by=c,\quad ax-by=c,\quad -ax-by=c.$$

La dernière équation ne peut évidemment pas être résolue en nombres positifs. Quant à la seconde, si $x=\alpha$, $y=\beta$ forment une solution, on a généralement $x=\alpha+b\theta$, $y=\beta+\alpha\theta$: ce qui démontre que cette équation admet une infinité de solutions positives. Il reste donc à considérer $ax+by=c$, en supposant a, b, c positifs.

(*) *Nouvelles Annales de mathématiques*, tome I, page 463.
(**) *Id.*, page 464.

16. Représentons toujours par α et β des valeurs particulières, positives ou négatives, satisfaisant à cette équation : les valeurs générales seront

$$x = \alpha - b\theta, \qquad y = \beta + a\theta.$$

Si donc nous voulons que x et y soient positifs, nous devrons prendre le nombre entier θ de manière qu'il satisfasse aux deux conditions

$$\theta < \frac{\alpha}{b}, \qquad \theta > -\frac{\beta}{a}.$$

Si les deux limites $\frac{\alpha}{b}$, $-\frac{\beta}{a}$, ne comprennent entre elles aucun nombre entier, l'équation proposée n'admettra pas de solutions positives ; dans tous les cas, elle n'en admettra qu'un nombre limité : cherchons quel peut être ce nombre de solutions.

17. Pour cela, représentons par A le nombre entier immédiatement inférieur à $-\frac{\beta}{a}$, et par B le nombre entier immédiatement inférieur à $\frac{\alpha}{b}$: nous ne pourrons attribuer à θ que les valeurs $A+1$, $A+2$,... B, lesquelles sont en nombre $B-A$. D'ailleurs, la différence entre les deux limites de θ étant $\frac{\alpha}{b}+\frac{\beta}{a}=\frac{a\alpha+b\beta}{ab}=\frac{c}{ab}$, si nous désignons par q le quotient entier de c par ab, pris par défaut, nous aurons $B-A$ égale q ou $q+1$. Ainsi, *le nombre des solutions positives de l'équation* $ax+by=c$, *est égal à l'un des deux quotients entiers de* c *par* ab.

Résolution de l'équation $ax+by+cz=d$.

18. *Pour que cette équation, dans laquelle* a, b, c, d *sont entiers et premiers entre eux, admette des solutions entières, il faut et il suffit que* a, b, c *soient premiers entre eux.*

On verra, comme au n° 2, que si les coefficients a, b, c ne sont pas premiers entre eux, l'équation est impossible en nombres entiers. La seconde partie de la proposition résultera de ce qui suit.

19. *Si, parmi les coefficients* a, b, c, *il en est deux qui soient premiers entre eux, on peut exprimer les valeurs entières des deux inconnues correspondantes, en fonction de la troisième inconnue, et d'une indéterminée.*

Dans l'équation
$$ax + by + cz = d, \qquad (6)$$

supposons a et b premiers entre eux, et faisons passer le terme cz dans le second membre ; nous aurons en représentant $d - cz$ par t :

$$ax + by = t. \qquad (7)$$

Pour satisfaire à cette nouvelle équation, posons $x = tx'$, $y = ty'$; d'où

$$ax' + by' = 1. \qquad (8)$$

Si nous pouvons déterminer un système de valeurs numériques, vérifiant l'équation (8), ces valeurs, multipliées par t ou $d - cz$, nous donneront une solution de l'équation (7). Or, a et b sont premiers entre eux ; donc, à l'aide d'une des méthodes ci-dessus exposées, nous pourrons calculer des valeurs $x' = \alpha$, $y' = \beta$, satisfaisant à l'équation (8) ; et nous aurons alors, pour solution générale de l'équation (6) :

$$x = \alpha(d - cz) - b\theta, \quad y = \beta(d - cz) + a\theta,$$

z et θ restant arbitraires.

20. *Si, au contraire, deux quelconques des coefficients* a, b, c *ne sont pas premiers entre eux, les valeurs entières des inconnues s'expriment en fonction de deux indéterminées.*

Soit m le plus grand commun diviseur des coefficients a et b ; nous pourrons mettre l'équation (6) sous la forme

$$a'x + b'y = \frac{d - z}{m}, \qquad (9)$$

a' et b' étant les quotients de a et b par m : ces quotients sont premiers entre eux.

Représentons par t le second membre de l'équation (9), lequel doit être entier : les inconnues z et t devront satisfaire à la condition

$$cz + mt = d.$$

Or a, b, c sont premiers entre eux ; donc c et m sont premiers entre eux, et la dernière équation admet des solutions entières, données par les formules

$$z = \gamma - m\theta, \quad t = \mu + c\theta,$$

γ et μ étant les valeurs particulières de z et t.

Actuellement, l'équation (10) devient

$$a'x + b'y = c;$$

et comme a' et b' sont premiers entre eux, nous retombons sur le cas traité précédemment.

Par conséquent, en appelant α et β des valeurs entières de x' et y' vérifiant l'équation $a'x' + b'y' = 1$, nous aurons, pour valeurs générales de x et de y,

$$x = \alpha t - b'\theta', \quad y = \beta t + a'\theta'.$$

Les valeurs générales de x, y, z sont donc définitivement

$$x = \alpha(\mu + c\theta) - b'\theta', \quad y = \beta(\mu + c\theta) + a'\theta', \quad z = \gamma - m\theta.$$

21. Comme exemple de ce dernier cas, soit l'équation

$$6x + 10y + 15z = 1841.$$

Elle donne $3x + 5y = \dfrac{1841 - 15z}{2}$, $15z + 2t = 1841$. Cette dernière équation est vérifiée par $z = 1$, $t = 913$; d'où, pour les valeurs générales,

$$z = 1 - 2\theta, \quad t = 913 + 15\theta.$$

D'autre part, l'équation $3x + 5y = t$ est vérifiée par $x = 2t$, $y = -t$: les valeurs générales de x, y, z satisfaisant à l'équation proposée sont donc

$$x = 2(913 + 15\theta) - 5\theta', \quad y = -(913 + 15\theta) + 3\theta', \quad z = 1 - 2\theta.$$

Si nous voulons des solutions positives, nous devrons poser d'abord $1 - 2\theta > 0$ ou $\theta < \frac{1}{2}$: ainsi, l'indéterminée θ doit être nulle ou négative, pour que la valeur de z soit positive. Mais, les valeurs de x et de y donnent aussi

$$\theta' < \frac{2(913 + 15\theta)}{5}, \quad \theta' > \frac{913 + 15\theta}{3}.$$

Pour que ces deux conditions ne soient pas contradictoires, il faut que l'on ait

$$\frac{2(913 + 15\theta)}{5} > \frac{913 + 15\theta}{3}, \text{ ou simplement, } 913 + 15\theta > 0;$$

d'où $$\theta > -61.$$

Ainsi, nous ne pouvons attribuer à θ que les valeurs $0, -1, -2, -3, \ldots. -60$. D'ailleurs, à chacune de ces valeurs de θ, répondront une ou plusieurs valeurs de θ', déterminées par les deux conditions ci-dessus. Nous trouverons en effet,

pour $\theta=0,\quad \theta'<366,\ \theta'>304;$ d'où $\theta'=305, 306, 307, \ldots. 365;$
$\theta=-1,\quad \theta'<360,\ \theta'>299;\quad \theta'=300, 301, 302, \ldots. 359;$
$\theta=-2,\quad \theta'<354,\ \theta'>294;\quad \theta'=295, 296, 297, \ldots. 353;$
. . . .
$\theta=-59,\quad \theta'<12,\ \theta'>9;\quad \theta'=10, 11;$
$\theta=-60,\quad \theta'<6,\ \theta'>4;\quad \theta'=5.$

On peut conclure, de ce tableau, que le nombre des solutions entières et positives de l'équation proposée est égal à

$$1+2+3+4+\ldots.+61=61\times 31=1891.$$

Prenons, par exemple, $\theta=-2$, $\theta'=300$; nous aurons

$$x=266,\quad y=17,\quad z=5,$$

valeurs qui, en effet, vérifient l'équation $6x+10y+15z=1841$.

Résolution d'un système d'équations en nombre moindre que le nombre des inconnues.

22. Afin d'abréger, nous allons indiquer, sur un exemple particulier, ce qu'il y aurait à faire dans tous les cas.

Soient les équations
$$\begin{aligned} 27x-\ 5y+43z&=609,\\ 13x+11y-7u&=\ 85,\\ 20y+13z-11u&=\ 36,\end{aligned}$$

qu'il s'agit de résoudre, s'il est possible, en nombres entiers.

Si nous faisons d'abord abstraction des deux dernières, nous verrons que l'on peut satisfaire à la première équation, en prenant

$$\begin{aligned} x&=-\ 2(609-43z)+5t,\\ y&=-11(609-43z)+27t;\end{aligned}$$

t étant un nombre entier quelconque.

Ces valeurs, substituées dans la seconde équation, la transforment en celle-ci :

$$-147(609-43z)+362t-7u=85;$$

d'où
$$u=-21(609-43z)+\frac{362t-85}{7}.$$

Ainsi, $\frac{362t-85}{7}$ doit être un nombre entier : appelons-le v, nous aurons

$$v=143+362t',$$
$$t=\ \ 3+\ \ 7t'.$$

Cette valeur de t donnera

$$x=-\ \ 2(609-43z)+\ \ 5(3+7t'),$$
$$y=-11(609-43z)+27(3+7t');$$

et nous aurons en outre

$$u=-21(609-43z)+143+362t'.$$

Si nous substituons, pour y et u, ces expressions dans la troisième des équations données, elle devient

$$230z+101t'=3355.$$

Par suite,
$$z=8-101\theta,\quad t'=15+230\theta,$$

θ étant un entier quelconque.

La substitution de ces valeurs, dans les formules trouvées ci-dessus, donne enfin

$$x=10-\ \ 636\theta,$$
$$y=\ \ 1-4304\theta,$$
$$u=\ \ 8-7943\theta,$$

avec
$$z=\ \ 8-\ \ 101\theta.$$

Nous avons eu égard, successivement, à toutes les équations du problème; donc ces dernières valeurs contenant un entier arbitraire θ, résolvent complétement ces équations.

23. Nous terminerons cet appendice par l'application suivante :

Quelles sont les valeurs entières les plus générales de x *qui rendent entières les fractions*

$$\frac{37x+26}{100},\ \frac{53x+38}{72},\ \frac{19x+22}{12},\ \frac{107x+26}{120}?$$

En décomposant chaque dénominateur en facteurs premiers entre eux, nous pourrons évidemment remplacer ces fractions par les suivantes :

$$\frac{37x+26}{4},\ \frac{37x+26}{25},\ \frac{53x+38}{8},\ \frac{53x+38}{9},\ \frac{19x+22}{3},$$
$$\frac{19x+22}{4},\ \frac{107x+26}{3},\ \frac{107x+26}{5},\ \frac{107x+26}{8};$$

ou bien, en rejetant la partie entière de chaque fraction :

$$\frac{x+2}{4},\ \frac{12x+1}{25},\ \frac{5x+6}{8},\ \frac{8x+2}{9},\ \frac{x+1}{3},\ \frac{3x+2}{4},\ \frac{2x+2}{3},$$
$$\frac{2x+1}{5},\ \frac{3x+2}{8}.$$

Remarquons maintenant que pour rendre entière la fraction $\frac{5x+6}{8}$, il suffit de rendre entière $\frac{-3x+6}{8}=\frac{-3(x-2)}{8}$; et comme 8 et 3 sont premiers entre eux, il faut que $x-2$ soit divisible par 8. On peut donc remplacer $\frac{5x+6}{8}$ par la fraction plus simple $\frac{x-2}{8}$.

Des simplifications analogues se rencontrent dans les fractions $\frac{8x+2}{9}$, $\frac{3x+2}{4}$, $\frac{2x+2}{3}$; ce qui permet de les remplacer par $\frac{4x+1}{9}$, $\frac{x-2}{4}$, $\frac{x+1}{3}$. Ainsi, le problème proposé revient à rendre entières les fractions

$$\frac{x+2}{4},\ \frac{12x+1}{25},\ \frac{x-2}{8},\ \frac{4x+1}{9},\ \frac{x+1}{3},\ \frac{x-2}{4},\ \frac{x+1}{3},\ \frac{2x+1}{5},\ \frac{3x+2}{8};$$

ou, seulement, les fractions

$$\frac{x+2}{4},\ \frac{12x+1}{25},\ \frac{x-2}{8},\ \frac{4x+1}{9},\ \frac{x+1}{3},\ \frac{2x+1}{5},\ \frac{3x+2}{8}.$$

La première condition donne $x=4y-2$: cette valeur, introduite dans la seconde fraction, la transforme en $\frac{48y-23}{25}$; d'où l'on conclut $\frac{y-1}{25}=z$, et $x=100z+2$.

La troisième fraction se réduit à $\frac{25z}{2}$; d'où $z=2u$, $x=2+200u$.

La quatrième fraction donne, à son tour, $u=9v$, et $x=2+1800v$.

Cette valeur rend entières les trois dernières fractions. Conséquemment, le problème proposé sera résolu si l'on prend

$$x=2+1800\theta,$$

θ étant un nombre entier quelconque.

FIN DU TOME PREMIER.